

数值分析基础

(第二版)

Fundamentals of Numerical Analysis
(Second Edition)

关 治 陆金甫



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 978-7-04-029762-1



9 787040 297621 >

定价 38.50 元

数值分析基础

SHUZHIFENXI JICHU

(第二版)

Fundamentals of Numerical Analysis



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书着重介绍现代科学与工程计算中的有关数值方法,强调数值分析的基本概念、理论及应用,特别是数值方法在计算机上的实现。理论叙述严谨、精练,概念交代明确,方法描述清晰,系统性较强。

全书内容包括:线性代数方程组的直接方法和迭代方法,特征值问题的数值方法,非线性方程和方程组的数值方法,函数的插值和逼近,线性最小二乘法,数值积分和微分,常微分方程初值问题的数值方法等。

本书可作为理工科研究生数值分析、科学计算等课程的教材,也可以作为相关专业本科生的教材,还可供相关科研、技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数值分析基础/关治,陆金甫编.—2版.—北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-029762-1

I. ①数… II. ①关… ②陆… III. ①数值计算—高等学校—教材 IV. ①O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第097599号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京联兴盛业印刷股份有限公司

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 27.25
字 数 510 000

版 次 1998年5月第1版
2010年7月第2版
印 次 2010年7月第1次印刷
定 价 38.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29762-00

第二版前言

本书第一版按照当时的《应用数学专业数值分析课程基本要求》编写,出版后经我们和兄弟院校同行使用,有了一些教学的积累。这些年来,高等学校的专业设置和课程开设都有了很多调整和变动,数值分析课程更多为理工科各专业的研究生开设,我们也多年从事这方面的教学。为了更适应当前的情况,特别是针对一般理工科研究生“数值分析”或“科学与工程计算”一类课程的要求,我们对本书第一版进行了修订,以使新的一版更适合于这类课程使用。

修订后全书的主要内容仍然是数值分析学科的基本方法与理论,但是根据教学的需求作了一些调整,增加了一些常用的数值方法,删去了部分内容,很多章节也进行了改写。首先是各章次序的安排,把线性代数和非线性方程及方程组的数值方法放在全书的前半部分。根据我们的体会,这样的安排对教学有一定的优点。当然,本书也可以适应不同讲课次序的教师使用。其次,把原来分散的一些准备知识,特别是线性赋范空间、内积空间的一些基本概念以及它们在各种数值方法中的应用集中在第一章加强了介绍。这些数学概念有利于用比较统一的观点对不同的近似问题中误差、收敛性等进行分析。同时也在第一章中也对以下各章用到的一些线性代数知识作了复习和进一步集中补充介绍,便于读者系统地学习,也和随后关于代数问题数值方法的各章有比较紧密的联系。

这次修订对第一版各章内容有所增删。作为数值线性代数的三个主要部分的前两者,即解方程组和特征值问题的传统内容和第一版同样得到重视,而第三部分即线性最小二乘问题则在第二版得到了加强,这在第七章中有所反映。此外还增加了 Padé 逼近、自适应求积分方法等内容,删去了稀疏矩阵有关方法的详细分析、矩阵的奇异值分解、函数最佳一致逼近的古典理论、插值和积分的 Peano 余项估计等在非数学专业课程中一般较少涉及的内容,关于 B -样条函数的内容也大大地简化了。我们希望内容的增删后更适合一般理工科研究生的课程,同时也适当留有余地,不同要求和不同学时的课程可以从中选取适当的章节使用。

只要具有一般理工科专业的高等数学(微积分和微分方程)和线性代数课程的基础就可以学习本书。针对读者这样的数学基础,在修订中除了数值方法的叙述力求清晰外,还注意理论分析比较严谨,必要的数学推导比较详细。各章的习题以数值方法的使用和分析为主,也适当地包括一些概念和性质的讨论。

在各章习题之后增设了计算实习题,我们推荐读者使用 MATLAB 上机计算。由于本书适用于比较基础的课程,一些通用的数值方法软件在本书中没有介绍,读者在使用时也容易找到有关的参考资料。

第二版所列的参考文献主要是修订时用到的参考资料。当然,第一版所列出的参考文献仍然是对本书有意义的资料。

本书的前五章由关治修订,后四章由陆金甫修订。我们衷心感谢同行和读者对本书第一版的关心和帮助,更希望国内的教师、学生和其他读者对本书提出宝贵的意见,你们的意见一定会对本书进一步完善有所帮助。最后我们还要特别提及出版社的张长虹和李陶编辑,他们认真和细致的工作使本书得以顺利出版,我们深表感谢。

关 治 陆金甫
2010年2月于清华园

第一版前言

随着计算机与计算数学的发展以及它们在各种科学技术问题中的广泛应用,数值分析课程已经成为高等学校理工科的一门重要课程,它是一门应用性很强的基础课程,一般包含数值分析学科最基础和最常用的部分。几十年来,国内外数值分析教材有很大的变化,除了内容的变化和发展外,也出现了一些适应不同对象的不同类型的教材,但目前在国内还较少见到应用数学专业本科生的适用教材,本书就是为此而编写的,同时也兼顾到理工科其他专业研究生同类课程的需要。

本书按照国家教委数学与力学教学指导委员会应用数学教材建设组制定的《应用数学专业(数值分析)课程基本要求》编写,个别内容有所增删,以适应其他理工科专业研究生课程的教学。我们体会这一基本要求的特点是重视基础理论,注意本学科的发展和教学内容的更新,同时强调应用,特别是重视数值方法在计算机上的实现。数值分析课是一门基础课,它像通常的数学课程那样有自身严密的科学系统,但它又是一门应用性很强的课程,希望使学生能够用本学科的知识在计算机上进行有关的科学与工程计算。计算能力的培养对理工科各专业的学生是十分重要的,对应用数学专业的学生更是如此。所以我们在教材的选材上适当减少了古典内容的篇幅,增加近代方法的介绍,也力图在理论叙述尽量严谨的同时注意对方法的分析,使算法描述尽量清晰,并配有适量的例题,便于学生理解方法和在计算机上实现方法的数值计算。

本书的主要内容是函数的插值和逼近,数值积分和微分,解线性代数方程的直接方法和迭代方法,非线性方程和方程组的数值方法,矩阵特征值问题计算方法和常微分方程初值问题的数值解法。第一章引论除了介绍本学科的一些基本问题外,还为其他各章的一些基础知识作了准备。本书的初稿曾在清华大学校内使用,据我们的经验,60学时左右可以讲授本书的主要部分,估计75—80学时可以讲授本书的绝大部分。当然,使用本书的讲授次序不是固定不变的,大致地说,可以分为两条主要线索,即按照书上各章的自然顺序,或者是按照第一、五、六、七、八章及第二、三、四、九章的顺序讲授。书中有些内容单独安排成章、节,便于教师适应不同学时和要求选择使用,特别是带“*”号的节和段是供选择的。各章有一定数量的习题,其中一部分是有关方法的分析和理论方面的,另一部分则是数值计算的习题,可以手算,也可用计算器完成,还有一些要利用计

计算机计算,其中一些习题也带有“*”号。对于学习数值分析课程的学生来说,这两部分的练习都是重要的。

关 治 陆金甫
1994 年 11 月

本书符号

\square	定理结束
\mathbb{R}	实数集合
\mathbb{C}	复数集合
\mathbb{R}^n	全体 n 维实向量组成的集合
\mathbb{C}^n	全体 n 维复向量组成的集合
$\mathbb{R}^{m \times n}$	全体 m 行 n 列实矩阵组成的集合
$\mathbb{C}^{m \times n}$	全体 m 行 n 列复矩阵组成的集合
$\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$	由 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 张成的空间
$C[a, b]$	$[a, b]$ 上全体连续函数组成的集合
$C^n(\mathbb{R}), C^n$	\mathbb{R} 上全体 n 阶导数连续的函数组成的集合
$C^n[a, b]$	$[a, b]$ 上全体 n 阶导数连续的函数组成的集合
$\mathcal{P}_n[a, b]$	$[a, b]$ 上全体不超过 n 次的多项式函数组成的集合
$\text{sgn}(\cdot)$	符号函数
$\ \cdot\ $	范数
A^T	矩阵 A 的转置矩阵
A^H, A^*	矩阵 A 的共轭转置矩阵
$\sigma(A)$	矩阵 A 的谱
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\det A$	矩阵 A 的行列式
$\text{tr } A$	矩阵 A 的迹
$\text{cond}(A)$	矩阵 A 的条件数
$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$	对角元素为 a_1, a_2, \dots, a_n 的对角矩阵
$\dim(M)$	空间 M 的维数

目 录

第一章 引论	1
§ 1 数值分析的研究对象	1
§ 2 数值计算的误差	2
2.1 误差的来源与分类	2
2.2 绝对误差和相对误差、有效数字	3
2.3 求函数值和算术运算的误差估计	4
2.4 计算机的浮点数表示和舍入误差	5
§ 3 病态问题、数值稳定性与避免误差危害	8
3.1 病态问题与条件数	8
3.2 数值方法的稳定性	9
3.3 避免误差危害	11
§ 4 线性代数的一些基本概念	13
4.1 矩阵的特征值问题、相似变换化标准形	13
4.2 线性空间和内积空间	15
4.3 范数、线性赋范空间	19
§ 5 几种常见矩阵的性质	26
5.1 正交矩阵和酉矩阵	26
5.2 对称矩阵和对称正定矩阵	27
5.3 初等矩阵	27
5.4 可约矩阵	29
5.5 对角占优矩阵	31
习题	32
第二章 线性代数方程组的直接解法	35
§ 1 Gauss 消去法	35
1.1 顺序消去与回代过程	36
1.2 顺序消去能够实现的条件	40
1.3 矩阵的三角分解	41
§ 2 选主元素的消去法	42
2.1 有换行步骤的消去法	42
2.2 矩阵三角分解定理的推广	43

2.3 选主元素的消去法	44
§ 3 直接三角分解方法	47
3.1 Doolittle 分解方法	47
3.2 对称矩阵的三角分解、Cholesky 方法	49
3.3 带状矩阵方程组的直接方法	52
§ 4 矩阵的条件数、直接方法的误差分析	59
4.1 扰动方程组与矩阵的条件数	59
4.2 病态方程组的解法	64
4.3 列主元素消去法的舍入误差分析	65
习题	66
计算实习题	69
第三章 线性代数方程组的迭代解法	71
§ 1 迭代法的基本概念	71
1.1 向量序列和矩阵序列的极限	71
1.2 迭代公式的构造	74
1.3 迭代法收敛性分析	76
§ 2 Jacobi 迭代法和 Gauss - Seidel 迭代法	79
2.1 Jacobi 迭代法	80
2.2 Gauss - Seidel 迭代法	80
2.3 Jacobi 迭代法和 Gauss - Seidel 迭代法的收敛性	80
§ 3 超松弛迭代法	83
3.1 逐次超松弛迭代公式	83
3.2 SOR 迭代法的收敛性	85
3.3 最优松弛因子	86
3.4 对称超松弛迭代法	88
§ 4 共轭梯度法	89
4.1 与方程组等价的变分问题	89
4.2 最速下降法	90
4.3 共轭梯度法	91
4.4 预处理共轭梯度方法	95
习题	97
计算实习题	100
第四章 非线性方程和方程组的数值解法	101
§ 1 区间对分法	101
§ 2 单个方程的不动点迭代法	103

2.1	不动点和不动点迭代法	103
2.2	迭代法在区间 $[a, b]$ 的收敛性	105
2.3	局部收敛性与收敛阶	107
§ 3	迭代加速收敛的方法	109
3.1	Aitken 加速方法	109
3.2	Steffensen 迭代法	110
§ 4	Newton 迭代法和割线法	112
4.1	Newton 迭代法的计算公式	112
4.2	局部收敛性和全局收敛性	113
4.3	重根情形	115
4.4	割线法	116
§ 5	非线性方程组的不动点迭代法	118
5.1	向量值函数的连续性和导数	119
5.2	压缩映射和不动点迭代法	122
§ 6	非线性方程组的 Newton 法和拟 Newton 法	126
6.1	Newton 法	126
6.2	拟 Newton 法	128
	习题	132
	计算实习题	134
第五章 矩阵特征值问题的数值方法		136
§ 1	特征值的估计和扰动	136
1.1	特征值的估计	136
1.2	特征值的扰动	139
§ 2	正交变换和矩阵因式分解	140
2.1	Householder 变换	141
2.2	Givens 变换	143
2.3	矩阵的 QR 因式分解	144
2.4	矩阵的 Schur 因式分解	149
§ 3	幂迭代法和逆幂迭代法	150
3.1	幂迭代法	150
3.2	加速技术	152
3.3	逆幂迭代法	153
3.4	收缩方法	155
§ 4	QR 方法	156
4.1	基本 QR 迭代	156
4.2	正交相似变换化矩阵为上 Hessenberg 形式	160

4.3	Hessenberg 矩阵的 QR 方法	164
4.4	带有原点位移的 QR 方法	164
4.5	双重步 QR 方法	167
§ 5	对称矩阵特征值问题的计算	171
5.1	对称矩阵特征值问题的性质	171
5.2	Rayleigh 商迭代	172
5.3	Jacobi 方法	173
5.4	对称矩阵的 QR 方法	178
	习题	180
	计算实习题	181
第六章	插值法	183
§ 1	Lagrange 插值	183
1.1	Lagrange 插值多项式	183
1.2	插值余项及其估计	185
1.3	线性插值和二次插值	188
1.4	关于插值多项式的收敛性问题	190
§ 2	均差与 Newton 插值多项式	191
2.1	均差及其性质	191
2.2	Newton 插值多项式	194
2.3	差分及其性质	197
2.4	等距节点的 Newton 插值公式	198
§ 3	Hermite 插值	201
3.1	Hermite 插值多项式	201
3.2	重节点均差	204
3.3	Newton 形式的 Hermite 插值多项式	207
3.4	一般密切插值 (Hermite 插值)	209
§ 4	三次样条插值	210
4.1	分段线性插值及分段三次 Hermite 插值	210
4.2	三次样条插值函数	211
4.3	三次样条插值函数的计算方法	212
4.4	数值例子	215
§ 5	三次样条插值函数的性质与误差估计	216
5.1	基本性质	216
5.2	三次样条插值函数的误差估计	217
§ 6	B -样条函数	221
6.1	三次样条函数空间	221

6.2 三次 B -样条函数	222
习题	226
计算实习题	228
第七章 函数逼近	229
§1 正交多项式	229
1.1 正交多项式的基本概念及性质	229
1.2 Legendre 多项式	234
1.3 Laguerre 多项式	236
1.4 Hermite 多项式	237
§2 Chebyshev 多项式	237
2.1 Chebyshev 多项式基本性质	238
2.2 极小化性质与 Chebyshev 多项式零点插值	240
§3 函数的最佳平方逼近	244
3.1 最佳平方逼近的概念及计算	244
3.2 用正交函数组作最佳平方逼近	247
3.3 用 Legendre 多项式作最佳平方逼近	250
§4 Padé 逼近	251
4.1 Padé 逼近	252
4.2 连分式	256
§5 数据拟合	256
5.1 最小二乘曲线拟合及其计算	257
5.2 多项式拟合	259
5.3 线性化方法	261
5.4 用正交多项式作最小二乘曲线拟合	264
5.5 非多项式拟合	266
§6 线性最小二乘问题的解法	268
6.1 线性最小二乘问题	268
6.2 QR 分解	270
6.3 用 QR 分解求解线性最小二乘问题	272
§7 周期函数的最佳平方逼近	273
7.1 周期函数的最佳平方逼近	273
7.2 离散情形	275
7.3 周期复值函数	275
§8 快速 Fourier 变换	276
8.1 快速 Fourier 变换	277
8.2 以 2 为底的 FFT	278

习题	282
计算实习题	283
第八章 数值积分与数值微分	285
§ 1 数值积分的基本概念	286
1.1 代数精度	286
1.2 插值型求积公式	287
§ 2 Newton - Cotes 求积公式	288
2.1 梯形公式和 Simpson 公式	288
2.2 Newton - Cotes 求积公式	292
2.3 Newton - Cotes 求积公式的误差分析	293
2.4 开(型) Newton - Cotes 求积公式	295
2.5 Newton - Cotes 求积公式的数值稳定性	297
§ 3 复合求积公式	298
3.1 复合梯形求积公式	299
3.2 复合 Simpson 求积公式	300
3.3 带有导数值的求积公式及其复合公式	302
§ 4 Gauss 求积公式	304
4.1 Gauss 型求积公式	305
4.2 Gauss 求积方法的收敛性和稳定性	312
4.3 Gauss - Legendre 求积公式	313
4.4 Gauss - Chebyshev 求积公式	317
4.5 Gauss - Laguerre 求积公式	318
4.6 Gauss - Hermite 求积公式	319
§ 5 Romberg 求积算法	320
5.1 Euler - Maclaurin 公式	320
5.2 Richardson 外推方法	321
5.3 Romberg 求积方法	323
§ 6 自适应 Simpson 求积方法	326
§ 7 奇异积分的数值计算	330
7.1 区间截断	330
7.2 变量替换	331
7.3 Kontorovich 奇点分离法	332
§ 8 数值微分	334
8.1 数值微分公式	335
8.2 数值微分的外推算法	338
习题	339

计算实习题	341
第九章 常微分方程初值问题的数值解法	342
§ 1 常微分方程初值问题	342
§ 2 Euler 方法	343
2.1 Euler 方法	343
2.2 隐式 Euler 方法	345
2.3 梯形方法及改进 Euler 方法	346
§ 3 显式单步法	349
3.1 截断误差	349
3.2 相容性	351
3.3 收敛性	352
3.4 关于初值的稳定性	355
3.5 绝对稳定性	355
§ 4 Runge - Kutta 方法	358
4.1 用 Taylor 展开构造高阶数值方法	358
4.2 显式 Runge - Kutta 方法	360
4.3 显式 Runge - Kutta 方法的性质	365
4.4 高阶方法与隐式 Runge - Kutta 方法	366
4.5 变步长的 Runge - Kutta 方法	368
§ 5 线性多步法	371
5.1 一般形式的线性多步法	371
5.2 基于数值积分的方法	373
5.3 Adams 方法	375
5.4 预估校正方法	379
§ 6 线性差分方程	381
6.1 线性差分方程的基本性质	381
6.2 齐次差分方程的解	383
§ 7 线性多步法的相容性、收敛性及稳定性	384
7.1 相容性及方法的阶	384
7.2 收敛性	386
7.3 稳定性	391
7.4 绝对稳定性	393
§ 8 一阶方程组	397
8.1 一阶方程组	397
8.2 高阶微分方程的初值问题	400
8.3 刚性微分方程组	401

习题	403
计算实习题	405
部分习题的答案或提示	407
参考文献	418