概率论与数理统计精讲精练

高等学校数学学习指导丛书

与浙江大学《概率论与数理统计》（第四版）同步

编著 陈启浩

系统梳理知识体系
全面总结方法技巧
细致解答疑惑难点
精心配置分层练习

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

概率论与数理统计精讲精练

高等学校数学学习指导丛书

与浙江大学《概率论与数理统计》（第四版）同步

编著　陈启浩

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计精讲精练/陈启浩编著.—2版.—北京：北京师范大学出版社，2010.8
（高等学校数学学习指导丛书）
ISBN 978-7-303-11146-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第126668号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印 刷：益利印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：184 mm × 260 mm
印 张：20.5
字 数：510千字
版 次：2010年8月第2版
印 次：2010年8月第1次印刷
定 价：32.00元

策划编辑：岳昌庆 责任编辑：岳昌庆 程丽娟
美术编辑：毛 佳 装帧设计：毛 佳
责任校对：李 菡 责任印制：李 丽

前　言

概率论与数理统计是大学工学、经济学、管理学各专业的一门重要基础课，也是这些专业硕士研究生入学考试的必考科目之一。

概率论与数理统计概念抽象不易理解，解题方法不易掌握，这些给广大初学概率论与数理统计者带来很大的困惑，感到这门课程难学。本书旨在引导正在学习概率论与数理统计的读者能与课堂教学或自学同步，准确灵活地理解概率论与数理统计的众多概念与理论，掌握各种问题的解题方法和技巧，较快捷、较深入地学会这门课程。同时，本书无论在内容安排和例题选取上也充分考虑了正在复习迎接硕士研究生入学考试的读者的需要，使他们能在较短时期内较大幅度地提高概率论与数理统计的水平，从而从容面对数学考试。

全书按浙大《概率论与数理统计》（第四版）一至八章并参考了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写，共分八章，每章分若干节，每节都有以下三部分组成：

一、**主要内容提要**　列出该节的核心内容，即主要定义、定理及计算公式。

二、**疑问与解答**　将该节中较易混淆的概念，学习中较难解决的问题以及不易掌握的计算方法等以疑问形式提出，结合典型例题给出解答。

三、**基础练习**　这里的练习都是基础题，旨在通过它们的练习熟悉本节的有关概念、理论和计算方法。

此外，除第五、八章外，每章的最后一节是“主要方法总结与解题技巧介绍”，在这一节里不仅系统总结了本章主要问题的解题方法，而且还通过对一些具有综合性的例题分析和讲解，使读者理解各种方法的内涵。特别要指出的是，本节还介绍了有关的计算技巧，掌握这些技巧，能使我们快捷地解答通常不易思考和解答的问题，这是**本书的亮点之一**。

每章的最后都安排有综合练习，其中不仅有历届考研试题，而且还有许多好题，如能下工夫独立完成这些练习题，必将融会贯通全章的各个知识点，极大地提高分析问题和解决问题的能力。

书后附有两套期末试题，并且给出了全书练习（包括基础练习和综合练习）及期末试题的较为详细的解答，供参考。

北京师范大学出版社理科室领导和编辑们对本书的面世给予了热情的支持和帮助，谨此致以深切的谢意。

由于水平所限和成书时间仓促，书中疏漏等不足之处恐难幸免，恳请广大读者和同行指正。

陈启浩

2010 年 5 月识于北京

目录

第一章 概率论的基本概念

第一节 随机事件

一、主要内容提要

1 随机现象与随机试验

随机现象是指在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象.

随机试验是指具有以下三个特点的试验：

(1)可以在相同条件下重复地进行；

(2)每次试验结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2 随机事件

设随机试验 E 的所有可能结果的集合为 S(称为 E 的样本空间，其元素称为样本点)，则称 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件，用 A,B 或 A_k 等表示. 特别称 S 的单点集(即一个样本点组成的集合)为 E 的基本事件，此外称 S 为 E 的必然事件，称 $\varnothing$(空集)为 E 的不可能事件.

3 事件的关系

设 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都是事件.

(1)包含. 如果 $A\subset B$(即 A 发生必导致 B 发生)，则称 A 包含于 B，或称 B 包含 A.

(2)相等. 如果 $A=B$(即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$)，则称 A 与 B 相等.

(3)互不相容. 如果 A 与 B 不同时发生，则称 A 与 B 互不相容. 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)中的任意两个事件都是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)两两互不相容.

(4)对立. 如果 A,B 中有且仅有一个发生，则称 A 与 B 对立，也称 A 与 B 互逆，即 A 是 B 的逆事件或 B 是 A 的逆事件，记 A 的逆事件为 $\overline{A}$，则 $\overline{A}=B$.

(5)相互独立(见本章第三节).

4 事件的运算

设 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是事件.

(1)和运算. 事件 $A\cup B$ 称为 A 与 B 的和事件,当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,$A\cup B$ 发生.

事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\left(\text{或}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)的和事件,当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)中至少有一个发生时,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\left(\text{或}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ 发生.

由 A,B(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n$;或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)产生 $A\cup B\left(\text{或}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,\text{或}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ 的运算称为事件的和运算.

(2)积运算. 事件 $A\cap B$(简记为 AB)称为 A 与 B 的积事件,当且仅当 A 与 B 都发生时,AB 发生.

事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\left(\text{或}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)的积事件,当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)都发生时,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\left(\text{或}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ 发生.

由 A,B(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n$;或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)产生 $AB\left(\text{或}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i,\text{或}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ 的运算,称为事件的积运算.

(3)差运算. 事件 $A-B$ 称为 A 与 B 的差事件,当且仅当 A 发生而 B 不发生时,$A-B$ 发生.

由 A,B 产生 $A-B$ 的运算称为事件的差运算.

注 $\overline{A}=S-A$.

上述的事件运算满足以下的运算律,设 A,B,C 是事件:

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

(2)结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A(BC)=(AB)C$;

(3)分配律 $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),A(B\cup C)=AB\cup AC$;

(4)德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(5)吸收律 $A\cap(A\cup B)=A,A\cup(AB)=A$;

(6)双重否定律 $\overline{\overline{A}}=A$;

(7)幂等律 $A\cup A=A,AA=A$;

(8)同一律 $A\cup\varnothing=A,AS=A$;

(9)零律 $A\cup S=S,A\varnothing=\varnothing$;

(10)排中律 $A\cup\overline{A}=S,A\overline{A}=\varnothing$;

(11)差积转换律 $A-B=A\overline{B}$.

二、疑问与解答

问 1 试分别叙述事件 A,B 互不相容与对立的充分必要条件.

答 由定义知，A,B 互不相容的充分必要条件是 $AB=\varnothing$；A,B 对立的充分必要条件是 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$.

由此可知，A 与 B 对立时，A 与 B 必互不相容，但反之未必正确.

问 2 我们知道，对随机试验 E 中的随机事件 A,B，如果 $A=B$，则 A,B 就是同一个事件. 那么，对于随机事件 A,B，如何证明 $A=B$？

答 要证明 $A=B$，通常有两种方法：

(1)利用定义，即只要证明 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 即可.

(2)利用事件的运算及运算律证明.

但在解具体问题时，往往将这两种方法结合在一起使用.

例 2.1 设 A,B 是事件. 证明：$A-B=A-AB$.

证明 $A-AB=A\,\overline{AB}=A(\bar{A}\cup\bar{B})=A\bar{A}\cup A\bar{B}=\varnothing\cup A\bar{B}=A\bar{B}=A-B$.

例 2.2 设 A,B,C 是事件，它们满足 $AB\subset C$，$\bar{A}\bar{B}\subset\bar{C}$，证明：$AC=(C-B)\cup AB$.

证明 由 $\bar{A}\bar{B}\subset\bar{C}$ 得 $C\subset\overline{\bar{A}\ \bar{B}}=A\cup B$. 于是由题设得 $AB\subset C\subset A\cup B$.

由于 $(C-B)\cup AB=C\bar{B}\cup AB\subset C\bar{B}\cup C=C$,

$(C-B)\cup AB=C\bar{B}\cup AB\subset(A\cup B)\bar{B}\cup AB=A\bar{B}\cup AB=A(\bar{B}\cup B)=AS=A$,

所以有 $$(C-B)\cup AB\subset AC. \qquad ①$$

另一方面， $$AC=A(B\cup\bar{B})C=ABC\cup A\bar{B}C\subset AB\cup C\bar{B}=(C-B)\cup AB. \qquad ②$$

由①②得证 $$AC=(C-B)\cup AB.$$

问 3 “三个事件 A,B,C 中不多于两个发生”这一事件可以表示为

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\cup(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC),$$

也可以表示为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$. 这是为什么？

答 记 $D=\{A,B,C$ 中不多于两个发生$\}$，则 D 可以理解为下列三个事件中至少有一个发生：

$\{A,B,C$ 都不发生$\}$，$\{A,B,C$ 中恰有一个发生$\}$，$\{A,B,C$ 中恰有两个发生$\}$.

所以有 $D=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\cup(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)$.

另外，D 也可以理解为$\{A,B,C$ 中至少有一个不发生$\}$，即$\{\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 中至少有一个发生$\}$. 所以有 $D=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

下面再给出一个比较复杂事件用几个比较简单事件表示的例子.

例 3.1 设 A,B,C 都是事件，试用它们表示以下各个事件：

$D_1=\{A,B$ 同时发生，但 C 不发生$\}$，

$D_2=\{A,B$ 中至少有一个不发生，而 C 发生$\}$，

$D_3=\{A,B$ 中至少有一个发生，而 B,C 中至少有一个不发生$\}$，

$D_4=\{A,B,C$ 中至少有两个不发生$\}$.

解 $D_1=AB-C$， $D_2=(\bar{A}\cup\bar{B})C$， $D_3=(A\cup B)(\bar{B}\cup\bar{C})$，

$D_4=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup(\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C})$.

注 D_3,D_4 的表达式都可化简，具体如下：

$$\begin{aligned}D_3&=(A\cup B)(\bar{B}\cup\bar{C})=A\bar{B}\cup B\bar{B}\cup A\bar{C}\cup B\bar{C}\\&=A\bar{B}\cup A\bar{C}\cup B\bar{C}=A\bar{B}\cup A(B\cup\bar{B})\bar{C}\cup B\bar{C}\\&=(A\bar{B}\cup A\bar{B}\bar{C})\cup(AB\bar{C}\cup B\bar{C})\end{aligned}$$

$$=A\overline{B}\cup B\overline{C}.\text{（利用吸收律）}$$

$$\begin{aligned}D_4&=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup(\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C})\\&=(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C})\\&=\overline{A}\overline{B}(\overline{C}\cup C)\cup\overline{A}\overline{C}(\overline{B}\cup B)\cup\overline{B}\overline{C}(\overline{A}\cup A)\\&=\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C}.\end{aligned}$$

三、基础练习

1. 单项选择题

(1)设 A,B 是事件，则下列命题正确的是(　　).

A. 若 A,B 互不相容，则 $\overline{A},\overline{B}$ 也互不相容

B. 若 $A-B=\varnothing$，则 A,B 互不相容

C. 若 A,B 对立，则 $\overline{A},\overline{B}$ 也对立

D. 若 $A-B=\varnothing$，则 A,B 对立

(2)设 A,B 是事件，则下列命题正确的是(　　).

A. $(A\cup B)-B=A$　　B. $A-B=A\overline{B}$

C. $(A-B)\cup B=A\cup B$　　D. $A\cup AB=A\cup B$

(3)设 A,B,C 是事件，则下列命题正确的是(　　).

A. 若 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$　　B. 若 $AC=BC$，则 $A=B$

C. 若 $A-B=A$，则 $AB=\varnothing$　　D. $A\cup BC=AB\cup AC$

(4)设 A,B,C 是事件，A,C 互不相容，则以下命题不正确的是(　　).

A. $ABC=\varnothing$　　B. $A\cup B-C=A\cup(B-C)$

C. $AB-CB=AB$　　D. $A\cup C=S$

(5)设 A,B 是事件，则 $A\cup B=B$ 的充分必要条件是(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. A 与 B 对立

C. $AB=A$　　D. $AB=B$

2. 填空题

(1)设 A 表示事件“在一次比赛中甲胜而乙输”(比赛无平局)，则 $\overline{A}$ 表示________________.

(2)如图 1.1 所示的电路中，用 A 表示事件“信号灯亮”，B_1,B_2,B_3,B_4 分别表示开关Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ闭合，则 $\overline{A}$ 用 B_1,B_2,B_3,B_4 表示的表示式为______________.

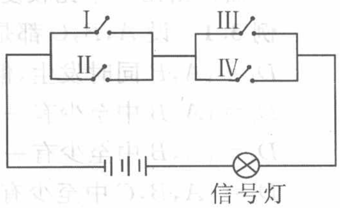

图 1.1

(3)设甲盒中有合格品与次品各 2 件，乙盒中有合格品 1 件次品 2 件，现从甲盒中任取 2 件放入乙盒中，混合后从乙盒中任取 2 件放回甲盒. 记

$A=\{$两次取放后甲盒中有 3 件合格品与 1 件次品$\}$，

$B_{ij}=\{$从甲盒中取出的是 i 件合格品与 j 件次品$\}(i,j=0,1,2,i+j=2)$，

$C_{ij}=\{$从乙盒中取出的是 i 件合格品与 j 件次品$\}(i,j=0,1,2,i+j=2)$，

则 A 可以表示为____________________.

(4)掷一颗骰子两次，记

$A=\{$两次点数之和为 8$\}$，

$B_i=\{$第一次掷的点数为 $i\}(i=1,2,\cdots,6)$，

$C_j=\{$第二次掷的点数为 $j\}(j=1,2,\cdots,6)$，

则 A 可以表示为____________________.

(5)已知 A,B,C 是事件，如果它们满足 $(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\overline{A\cup B}\cup\overline{\bar{A}\cup B}=C$，则 $B=$________.

第二节 事件的概率及等可能概型

一、主要内容提要

1 概率的定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$. 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件，则称 $P(A)$ 是 A 的概率：

(1)对每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；(非负性)

(2)对必然事件 S，有 $P(S)=1$；(规范性)

(3)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是 E 的两两互不相容事件，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).\text{（可列可加性）}$$

2 概率的基本性质

设 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件，则

(1)$P(\varnothing)=0$；

(2) 当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容时，有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3)如果 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$(由此还可以得到 $P(B)\leqslant P(A)$)；

(4)$P(A)\leqslant 1$；

(5)$P(A)=1-P(\bar{A})$.

3 等可能概型

如果随机试验 E 具有以下特性，则称其为等可能概型(或古典概型)：

(1)E 的样本空间 S 只包含有限个样本点(因此只有有限个基本事件)，例如 n 个；

(2)E 的每个基本事件发生的可能性相同.

设 A 是等可能概型 E 的事件，则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

其中,k 是 A 包含的基本事件个数.

二、疑问与解答

问 1 由概率基本性质(2)可以得到事件的概率计算中的加法公式.试述常用的两事件的加法公式和三事件的加法公式.

答 设 A,B,C 是事件,则两事件和三事件的加法公式分别是:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

特别当 A 与 B 互不相容时,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

特别当 A,B,C 两两互不相容时,有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

加法公式是事件概率计算的常用公式之一,利用它可以通过 $P(A)$,$P(B)$ 及 $P(AB)$ 的计算获得 $P(A\cup B)$.对三事件的加法公式也有相同的说法.

例 1.1 设 A,B,C 是事件.已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$.求:

(1)AC,BC 中至少有一个发生的概率 p_1;

(2)A,B,C 中至少有一个发生的概率 p_2.

解 首先由题设 $P(AB)=0$ 可得 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,即 $P(ABC)=0$.

$$(1)\ p_1=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ACBC)$$
$$=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-0=\frac{1}{4}.$$

$$(2)\ p_2=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+0=\frac{1}{2}.$$

例 1.2 设事件 A 与 B 同时发生时 C 必发生.证明:

$$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

证明 由题设知 $AB\subset C$,所以有 $P(AB)\leqslant P(C)$.于是

$$1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-P(C),$$

由此证得 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

问 2 设 A 是事件,则有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.通常称这一公式为逆概公式,那么逆概公式有什么用处?

答 从逆概公式本身来看,可由 $P(\overline{A})$ 求 $P(A)$.因此当 A 比较复杂,其概率不易计算时,可考虑它的逆事件 $\overline{A}$,如果 $\overline{A}$ 比较简,$P(\overline{A})$ 较易计算,则利用逆概公式就由 $P(\overline{A})$ 算出 $P(A)$.

例 2.1 设 A,B,C 是事件,已知 $P(AB)+P(AC)+P(BC)=\frac{1}{2}$,$P(ABC)=\frac{1}{16}$,求 $A,B,$

C 中不多于 1 个发生的概率 p.

解 根据所给条件,不能按

$p=P(A,B,C$ 中不多于 1 个发生$)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C)$

$=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$(因为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C},A\overline{B}\overline{C},\overline{A}B\overline{C},\overline{A}\overline{B}C$ 两两互不相容)

计算. 故考虑应用逆概公式:

由于$\{A,B,C$ 中不多于 1 个发生$\}=\overline{\{A,B,C\text{ 中至少有两个发生}\}}=\overline{AB\cup AC\cup BC}$,

所以 $p=P(A,B,C$ 中不多于 1 个发生$)=P\,\overline{(AB\cup AC\cup BC)}$

$=1-P(AB\cup AC\cup BC)$

$=1-[P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABAC)-P(ABBC)-P(ACBC)+P(ABACBC)]$

$=1-[P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)-P(ABC)-P(ABC)+P(ABC)]$

$=1-\left(\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{8}.$

问 3 设 A,B 是事件,则当 $B\subset A$ 时 $P(A-B)=P(A)-P(B)$. 那么对于一般的 A,B,即 A,B 未必满足 $B\subset A$ 时,这个减法公式成为什么形式?

答 由于 $A-B=A-AB$(见上一节例 2.1),而 $AB\subset A$,所以,对于一般的 A,B 有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

这是事件概率计算中的减法公式的一般形式.

例 3.1 设 A,B,C 是事件.

(1)当 $P(A\cup B)=0.6,P(B)=0.3$ 时,求 $P(A\overline{B})$;

(2)当 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9,P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=0.97$ 时,求 $P(AB-C)$.

解 (1)$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=[P(A)+P(B)-P(AB)]-P(B)$

$=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$

(2)$P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)=[1-P(\overline{AB})]-[1-P(\overline{ABC})]$

$=P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})-P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.97-0.9=0.07.$

问 4 投掷两枚不可分辨的匀质硬币,观察它们出现正面与反面的结果. 这个随机试验 E 是否为等可能概型?

答 E 只有三个基本事件:

$A_1=\{$两个正面$\}$,$A_2=\{$两个反面$\}$以及 $A_3=\{$一个正面一个反面$\}$,

但是 $P(A_1)=\frac{1}{4},P(A_2)=\frac{1}{4},P(A_3)=\frac{1}{2}$,即各个基本事件发生的可能性不尽相同,所以 E 不是等可能概型.

如果两枚硬币是可分辨的,例如分别记为 1 号硬币和 2 号硬币,则这个随机试验(记为 E_1)就是一个等可能概型. 这是因为,E_1 有四个基本事件:

$B_1=\{$两个正面$\}$,$B_2=\{$两个反面$\}$,$B_3=\{$1 号正面而 2 号反面$\}$,$B_4=\{$1 号反面而 2 号正面$\}$,

并且 $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=\frac{1}{4}$,即 E_1 具有等可能概型必须具备的两个特性.

问 5 如何计算等可能概型 E 的随机事件的概率?

答 通常有两种方法:

方法一 利用等可能概型的随机事件概率的定义计算. 设 A 是 E 的事件,S 是 E 的样本

空间，它们分别包含 k 个和 n 个 E 的基本事件，则 $P(A)=\frac{k}{n}$. 于是，欲计算 $P(A)$，只要算出 n 和 k 即可.

方法二 利用事件概率的计算公式（例如，加法公式，减法公式及逆概公式）计算等可能概型的随机事件 A 的概率 $P(A)$.

例 5.1 将 2 封不同的信随机地投入到编号为 1,2,3,4 的邮箱，求 1,2 号邮箱各有一封信的概率 p.

解 将两封信随机地投入到 4 个邮箱，是等可能概型.

记 $A=\{1,2$ 号邮箱各有一封信$\}$，则

$$P(A)=\frac{k}{n}, \qquad ①$$

容易知道，两封信随机地投入到 4 个邮箱的不同投法数 $n=C_4^1\cdot C_4^1=16$，两封信分别投入 1,2 号邮箱的不同投法数 $k=2!=2$. 将它们代入①得

$$P(A)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

例 5.2 从 5 双不同号码的鞋子中任取 4 只，求：

(1)所取的 4 只鞋子中没有成双的概率；

(2)所取的 4 只鞋子中至少有 2 只成双的概率.

解 从 5 双不同号码的鞋子中任取 4 只，是等可能概型. 记

$$A=\{4\text{ 只鞋子中没有成双}\},$$

则
$$\overline{A}=\{4\text{ 只鞋子中至少有 2 只成双}\}.$$

(1)$P(A)=\frac{k}{n}$, ①

其中，n 是从 10 只鞋子中任取 4 只的不同取法数，于是 $n=C_{10}^4=210$. 下面计算 k.

要使 4 只鞋子中没有成双的，应先从 5 双鞋中任取 4 双，然后从每双中任取一只，因此不同取法数 $k=C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$.

将 n 与 k 的值代入①得

$$P(A)=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}.$$

(2)$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{13}{21}$.

例 5.3 四面体的顶点和各棱中点共 10 个，在其中任取 4 个点，求它们不共面的概率.

解 从 10 个点中任取 4 个点，是等可能概型.

记 $A=\{4$ 个点不共面$\}$，则 $\overline{A}=\{4$ 个点共面$\}$，并且

$$P(\overline{A})=\frac{k}{n}, \qquad ①$$

其中，$n=C_{10}^4=210$，这是显然的，下面计算 k，即 10 个点中任取 4 个点使它们共面的不同取法种数. 4 个点共面情形可分三类：

(1)取出的 4 个点位于四面体的同一面上，此时有 $4C_6^4$ 种不同取法；

(2)取出的 4 个点中有 3 个点位于同一棱上，而另一个点位于对棱的中点，例如 AB 的对棱中点为 M(图 1.2). 由于四面体有 6 条棱，因此此时共有 6 种不同取法；

(3)由中位线构成的平行四边形,如图 1.2 中的平行四边形 $abcd$. 这样的平行四边形只有 3 个,因此此时共有 3 种不同取法.

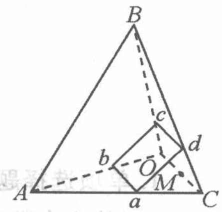

图 1.2

综上所述,从 10 个点中任取 4 个点,它们共面的不同取法种数 $k=4C_6^4+6+3=69$,将 n 和 k 的值代入①得

$$P(\overline{A})=\frac{69}{210}=\frac{23}{70}.$$

于是 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{23}{70}=\frac{47}{70}$.

例 5.4 在 1~1 000 的一千个整数中任取一个整数,求取到的整数既不能被 4 整除,也不能被 6 整除的概率.

解 从 1~1 000 的一千个整数中任取一个,是等可能概型.

记 $A=\{$取到的整数既不能被 4 整除,也不能被 6 整除$\}$,

$A_4=\{$取到的整数能被 4 整除$\}$,

$A_6=\{$取到的整数能被 6 整除$\}$,

$A_{12}=\{$取到的整数能被 12 整除$\}$,

则 $A=\overline{A}_4\overline{A}_6$,所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\overline{A}_4\overline{A}_6)=P(\overline{A_4\cup A_6})=1-P(A_4\cup A_6)\\&=1-[P(A_4)+P(A_6)-P(A_4A_6)]=1-P(A_4)-P(A_6)+P(A_{12})\end{aligned} \quad ①$$

(因为一个整数既能被 4 整除,又能被 6 整除的充分必要条件是能被 12 整除).

由于 1~1 000 的一千个整数中,能被 4,6,12 整除的分别仅为 250,166,83,所以

$$P(A_4)=\frac{250}{1\,000},P(A_6)=\frac{166}{1\,000},P(A_{12})=\frac{83}{1\,000},$$

将它们代入①得 $$P(A)=1-\frac{250}{1\,000}-\frac{166}{1\,000}+\frac{83}{1\,000}=0.667.$$

例 5.5 有一批灯泡共 50 个,其中有 2 个是废品,一个检验员随机地取出 n 个灯泡进行逐个检查,问 n 至少多大时,才能保证发现至少一个灯泡是废品的概率大于 $\frac{1}{2}$?

解 从一批产品中随机取出 n 个灯泡是等可能概型.

记 $A=\{$检查 n 个灯泡发现至少一个是废品$\}$,则

$$\overline{A}=\{\text{检查 } n \text{ 个灯泡发现没有废品}\}.$$

$$P(\overline{A})=\frac{C_{48}^n}{C_{50}^n}=\frac{\dfrac{48\times47\times\cdots\times(48-n+3)\times(48-n+2)\times(48-n+1)}{n!}}{\dfrac{50\times49\times48\times\cdots\times(50-n+1)}{n!}}=\frac{(50-n)(49-n)}{50\times49}.$$

由题设 $P(A)>\frac{1}{2}$,即 $P(\overline{A})<\frac{1}{2}$ 得 $\frac{(50-n)(49-n)}{50\times49}<\frac{1}{2}$,即 $n^2-99n+25\times49<0$.

解此不等式得 $n\geqslant15$. 由此可知,至少要取 15 个灯泡进行检查才能保证发现至少有一个灯泡是废品的概率大于 $\frac{1}{2}$.