高等学校教材

线性代数

成丽波 孙 艳
李延忠 马文联

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

成丽波　孙　艳　李延忠　马文联

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书依据高等学校数学基础课程教学指导分委员会制订的“工科类本科线性代数课程教学基本要求”、在已有的教材基础上结合作者多年的教学经验修改编写而成。

全书共六章，分别为行列式、矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换、方阵的特征值与相似对角化、二次型。每章后均有习题并附有答案，可供读者参考。

本书可作为高等学校工科类各专业本科生的线性代数课程教材，也可供准备报考工科硕士研究生及工程技术人员作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/成丽波等编．—北京:高等教育出版社，2010.6

ISBN 978-7-04-029913-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①成…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第081758号

策划编辑　李　蕊　　**责任编辑**　张耀明　　**封面设计**　赵　阳
责任绘图　尹　莉　　**版式设计**　张　岚　　**责任校对**　俞声佳
责任印制　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京机工印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010年6月第1版
印　　张	10.5	**印　　次**	2010年6月第1次印刷
字　　数	190 000	**定　　价**	15.50元

物料号　29913-00

前 言

本书是依据高等学校数学基础课程教学指导分委员会制订的“工科类本科线性代数课程教学基本要求”编写的，可供工科类各专业用作线性代数课程的教材，也可供经济管理类各专业选用。

考虑到各专业教学需要的差异，我们依照科学性、系统性、灵活性及可行性的原则，对教材内容的编排取舍做了适当处理，有些内容加了“ * ”号，希望能给使用本书的主讲教师在讲授中留有选择的余地。

书中第一章中行列式的定义沿用了拉普拉斯降阶展开法，避免了关于逆序的讨论，这样既可以节省教学时间，也简化了行列式性质的证明，而且不影响线性代数本身的学习，也不影响其他学科的应用。我们注意到，近年来国内有些线性代数教材也采用了这种定义行列式的方法。

行列式和矩阵是线性代数的两个基本工具，掌握这两个工具就为学习线性代数其他知识奠定了基础。因此我们把矩阵作为第二章，放在线性方程组理论的前面。在编写过程中一些概念的引入注意适当联系实际，例如，矩阵等概念，使抽象的概念贴近实际，学生比较容易接受，同时考虑内容的顺畅性，将内积及标准正交基、施密特正交化方法等内容放在第五章方阵的特征值与相似对角化中，并做了适当简化，便于初学者接受。

书中一些例题和习题的配备也着重考虑培养学生分析问题和解决问题的能力，使学生牢固掌握基本概念和理论，达到融会贯通、运用自如的目的。

限于编者的水平，书中的错误和缺点在所难免，诚恳希望本书的读者提出宝贵的意见。

编　者

2010 年 1 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是一种重要的数学工具，它不仅在数学中有广泛的应用，而且在物理学、力学等其他学科的研究中也经常用到．特别是在本门课程中，它是研究后面的矩阵、线性方程组及向量组的线性相关性的一种重要工具．

本章主要介绍行列式的概念、性质及计算方法，并介绍解线性方程组的克拉默法则．

§1.1 n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

考虑含有两个未知量的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为了求得方程组(1.1)的解，可以利用加减消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式(1.2)，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

并称等式左边为**二阶行列式**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

它有两行，两列（横排叫行，竖排叫列），数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 叫做该行列式第 i 行，第 j 列处的**元素**，计算规则可利用图 1－1 来记忆，称为二阶行列式的**对角线法则**．

利用二阶行列式的概念，式(1.2)中的分母、分子可分别记为

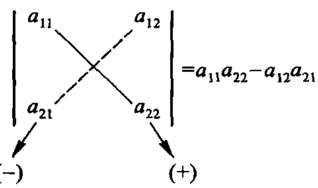

图 1－1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},$$

并称 D 是方程组(1.1)的**系数行列式**，D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 a_{12},a_{22}所得到的二阶行列式.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14.$$

因 $D\neq 0$，故题设方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.3}$$

可以得到类似的公式．为此，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1.4}$$

并称它为**三阶行列式**．行列式中的横排、竖排分别称为它的行和列．数 a_{ij}($i,j=1,2,3$)称为它的元素．三阶行列式的计算规则可利用图 1－2 来记忆，图中实线相连的三个数的积取正号，虚线相连的三个数的积取负号，它们的代数和就是(1.4)所表示的三阶行列式．这种计算方法也称为三阶行列式的对角线法则．

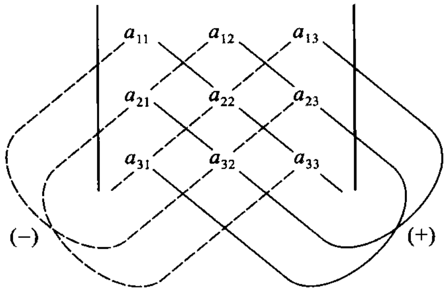

图 1－2

三阶行列式还可以通过引入余子式和代数余子式的概念来定义．对于三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

元素 a_{ij}的**余子式**就是在 D 中划掉 a_{ij}所在的行与列，余下的四个数所构成的二阶行列式，记为 M_{ij}. 例如，元素 a_{12}的余子式为

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{ij}的**代数余子式**规定为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

如，元素 a_{12}的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

有了余子式和代数余子式的概念，通过验算可以看出，三阶行列式按任一行或任一列展开，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\quad(i=1,2,3), \tag{1.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\quad(j=1,2,3), \tag{1.6}$$

所得的值都相同，为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

把(1.5)式，(1.6)式作为三阶行列式的定义，从而把三阶行列式的计算归结为二阶行列式的计算，即：三阶行列式等于它的某一行(列)元素与其代数余子式乘积之和.

如果规定一阶行列式就是元素本身，那么二阶行列式的每个元素也相应地有余子式和代数余子式，而且余子式都是一阶行列式. 不难验证，上述结论对二阶行列式也成立. 如，按第一行展开，得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\left|a_{22}\right|+(-1)^{1+2}a_{12}\left|a_{21}\right| \\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

例 2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3\times(-10)-4\times(-7)+1\times 5=3. \end{aligned}$$

请读者按对角线展开法计算.

二、n 阶行列式

由式(1.5)，式(1.7)可知，有了一阶行列式，可定义二阶行列式；有了二阶行列式可定义三阶行列式. 它们都是用一些低阶行列式表示高一阶的行列式，因此，人们自然会想到用这种递归的方法来定义 n 阶行列式.

设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列的正方形表，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

横排叫**行**，竖排叫**列**，a_{ij}是该行列式第 i 行、第 j 列处的**元素**，从左上角到右下角的对角线叫做**主对角线**，从右上角到左下角的对角线叫做**副对角线**. 下面给出

n 阶行列式的递归定义.

定义 1 n **阶行列式**(1.8)是一个代数和式,当 $n=1$ 时,定义

$$D = |a_{11}| = a_{11};$$

当 $n\geqslant 2$ 时,定义

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**;M_{ij} 是从 n 阶行列式 D 中划去 a_{ij} 所在的行和列得到的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**.

按此定义计算行列式的方法通常称为**拉普拉斯**(Laplace)**展开法**,可以叙述为:n 阶行列式等于任一行(列)元素与其代数余子式乘积之和.

从定义还可以看出,n 阶行列式按定义展开后是 $n!$ 项的代数和,每项是不同行、不同列的 n 个元素的乘积,带正号和带负号的项各占一半.

注:可利用数学归纳法证明,由定义按不同行、列展开计算 n 阶行列式 D 所得的结果是唯一确定的.

三、几种特殊的行列式

1. 对角形行列式

称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**对角形行列式**.

由行列式定义 1,将上面的行列式按第一行展开,得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad (\text{主对角线上的 } n \text{ 个元素的乘积}).$$

称

$$D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

为副对角形行列式.

$$D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{2,n-1}\\0&\cdots&a_{3,n-2}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}\left|a_{n1}\right|$$

$$=(-1)^{(1+n)+n+\cdots+3}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 三角形行列式

用同样的方法可得,三角形行列式也有类似的结果.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

§1.2 行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式,一般是较繁琐的.因此,我们要从定义推导出行列式的一些性质,以简化行列式的计算.

一、行列式的性质

定义 1 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把它的各行变成同序号的列,得到行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^{T} 叫做 D 的**转置行列式**,也可记作 D'.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 使用数学归纳法. 对于二阶行列式,结论显然成立. 假设对于 $n-1$ 阶行列式结论成立,把 n 阶行列式 D 按第一行展开,依据归纳法假设,可得

$$D=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}^{\mathrm{T}}=D^{\mathrm{T}}.$$

右端恰是 D^{T} 按第一列的展开式.

性质 1 说明,行列式的行与列具有相同的地位,凡是对行成立的性质对列也成立,反之亦然.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

证 先证明邻行互换时行列式变号.

设 D_1 是由 n 阶行列式 D 的第 i 行与第 $i+1$ 行互换得到的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots\cdots i\text{ 行}, \\ \cdots\cdots i+1\text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

把 D_1 按第 $i+1$ 行展开,有

$$D_1=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1+j}a_{ij}M_{ij}=-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=-D.$$

设 D_2 是由 n 阶行列式 D 的第 i 行与第 j 行互换得到的行列式,不妨设 $i<j$. 于是 D_2 可看成 D 的第 i 行依次经过 $j-i$ 个邻行互换后到第 j 行位置,而原第 j

行又依次经过 $j-i-1$ 个邻行互换后到第 i 行位置．因此

$$D_2 = (-1)^{(j-i)+(j-i-1)} D = -D.$$

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,那么此行列式为零．

证 互换行列式 D 中相同的两行(列),有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

证 把行列式 D 按该行展开即可得证．

推论 1 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．特别地,一行(列)的元素全为零时,行列式为零．

推论 2 如果行列式有两行(列)元素对应成比例,则此行列式为零．

证 由性质 3 的推论 1 和性质 2 的推论证得．

性质 4 如果行列式中某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

那么 D 等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 将 D 按第 i 行展开即可得证．

性质 5 行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应元素上去,行列式不变．

例如,以数 k 乘行列式 D 的第 i 行,再加到第 j 行($i\neq j$)上,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由性质 4,右端行列式等于两个行列式之和,其中一个是左端行列式,另一个行列式的第 i 行与第 j 行成比例,因此行列式为零,性质 5 证毕.

性质 6 行列式某一行(列)元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j.$$

证 不妨设 $i<j$,考虑行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdots\cdots i\text{ 行} \\ \\ \cdots\cdots j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

D_1 是用 D 中第 i 行替换第 j 行得到的行列式,因 D_1 的第 i 行与第 j 行相同,故 $D_1=0$. 把 D_1 按第 j 行展开,有

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn},$$

所以

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j).$$

上述证法如按列进行,即可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

综合行列式定义及性质 6,可得到有关代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, i=j\\0, i\neq j,\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

称为克罗内克(Kronecker)符号.

二、行列式的计算

有了行列式的定义和行列式的性质,可简化行列式的计算,从而提高运算速度.

例 1 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 D 的第 3 行已经有一个零,把第 4 列的 2 倍加到第 1 列,又把第 3 列加到第 4 列,然后按照第 3 行展开,得

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -13 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

再把上式右边三阶行列式的第 1 行加到第 2 行,按第 3 列展开,得

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 30 + 10 = 40.$$

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 D 的特点是各行元素之和为 9,把第 2,3,4 列同时加到第 1 列,提出公因子 9,再将第 1 行的 -1 倍加到第 2,3,4 行上去,得

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \times 1^4 = 9.$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

证 左边 $= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \text{右边}.$$

类似地,可以用数学归纳法证明:若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别是由 m^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,m)$,n^2 个元素 $b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成的正方形表,则有公式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|,$$

其中 * 表示行列式中对应位置上的元素可任意取值,$\boldsymbol{O}$ 表示对应位置上的元素取值均为零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

利用公式(1.9),可以进一步证明等式