毛纲源理工类数学辅导系列

高等数学学习指导 硕士研究生备考指南

线性代数
解题方法技巧归纳
（第3版）

毛纲源 编著

△ 专题讲解 涵盖重点难点
△ 通俗易懂 帮助记忆理解
△ 同步学习 深入辅导指点
△ 复习迎考 获益效果明显

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源理工类数学辅导系列

线性代数学习指导　硕士研究生备考指南

线性代数
解题方法技巧归纳
（第 3 版）

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法技巧归纳(第3版)/毛纲源　编著.—武汉:华中科技大学出版社,2010年4月
ISBN 978-7-5609-6137-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.线性代数-高等学校-解题　Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第064825号

线性代数解题方法技巧归纳(第3版)　　毛纲源　编著

策划编辑:王汉江(14458270@qq.com)
责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群
责任校对:周　娟　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850mm×1168mm　1/32　印张:15.25　字数:380 000
版次:2010年4月第3版　印次:2010年4月第16次印刷
ISBN 978-7-5609-6137-8/O·530　定价:28.80元

第 3 版前言

《线性代数解题方法技巧归纳》第 2 版出版后，一直受到广大读者的厚爱，多次印刷，久销不衰. 对于广大读者的支持和关心，在此表示深切感谢. 根据读者对本书的使用情况及其意见和要求，特作进一步的修改. 为突出重点和难点，对其内容进行了调整、充实和删改，但保持全书原有的特色：按问题分类，通过引例，剖析各类题目的解题思路，归纳、总结其解题方法和技巧. 例题丰富而又典型，类型广，梯度大，叙述详细，通俗易懂，便于自学. 此外，不少例题还给出了一题多解，从多角度详细分析，深入浅出地讲解，希望收到举一反三、化难为易的效果. 本书仍以同济大学数学系编的《线性代数》(第五版)为蓝本编写，不少例题和习题选自该教材中的典型习题.

通过对本书的学习，有助于加强对线性代数基本内容的理解和掌握，提高读者分析问题和解决问题的能力，这是作者最大的心愿.

由于作者水平有限，书中难免有不少缺点和不妥之处，恳请同行、读者批评指正.

毛纲源

北京师范大学珠海分校国际商学部

2010 年 2 月

第2版前言

本书自1993年出版以来，印刷多次，一直受到广大读者的欢迎与好评，与此同时广大读者对本书也提出了不少宝贵的意见，这些意见对本书的修改帮助很大，在此深表谢意.

此次修订较大，增补了不少内容，这些内容都是学好线性代数、备考硕士研究生的重要内容.

本书对同济大学数学教研室编的《线性代数》(第三版)中较难解的典型习题和历届全国硕士研究生入学考试数学试卷一和数学试卷二中的线性代数试题，都作了详细的解答.供学习线性代数和备考硕士研究生的读者阅读、参考.

本书虽经修改，限于编者水平，不妥与错误之处仍在所难免.敬请指正.

毛纲源

1999年7月于武汉工业大学

第 1 版前言

本书将线性代数的主要内容按问题分类，通过引例，归纳各类问题的解题规律、方法和技巧. 例题类型广，有一定梯度，除给出基本概念和基本运算的例题外，还有不少典型例题，其中大部分选自非数学专业的研究生的人学试题.

由于本书着重基本解题方法、技巧的归纳和应用，不同于一般的教科书、习题集和题解，它自具特色，对学习线性代数有很好的参考价值.

本书可供大专院校、电大、职大、函大等广大学生学习线性代数时参考；对于自学者及有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值.

本书的编写和出版工作得以顺利进行，与华中理工大学出版社的大力支持和帮助是分不开的，武汉大学熊全淹教授对本书提出了许多宝贵的意见，湘潭大学唐佑华教授对初稿作了仔细的审校，提出了很好的修改意见. 在此一并表示衷心感谢.

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者指正.

毛纲源

1993 年 5 月于武汉工业大学

目　录

第 1 章　行列式计算

1.1　如何用定义计算行列式及其部分项

1. 排列逆序数的算法

任一 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 可用下述两种方法计算.

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数;

或　$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 前面比 i_1 大的数的个数 $+ i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 前面比 i_{n-1} 大的数的个数.

例 1[1.2(2),(5)]*　按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:(1) 4　1　3　2;(2) 1　3 $\cdots$ $(2n-1)$　2　4 $\cdots$ $(2n)$.

解　(1) **解一**　4 后面比 4 小的数有 3 个,1 后面没有比它小的数,3 后面比它小的数只有 1 个,故 $\tau(4\ \ 1\ \ 3\ \ 2) = 3+0+1+0 = 4$.

解二　4 前面比 4 大的数没有,1 前面比 1 大的数只有 1 个,3 前面比 3 大的数只有 1 个,2 前面比 2 大的数有 2 个,因而

$$\tau(4\ \ 1\ \ 3\ \ 2) = 0+1+1+2 = 4.$$

(2) 该排列中的前 n 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 之间不构成逆序,后 n 个数 $2,4,6,\cdots,2n$ 之间也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.显然 1 后面没有比它小的数,3 后面仅有一个数 2 比 3 小;5 后面仅有 2 个数 2、4 比 5 小;$\cdots$;$2n-1$ 后面比它小的数有 $n-1$ 个,即 $2,4,6,\cdots,2n-2$;因而 $\tau[1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ \cdots\ (2n)] = 0+1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$.

例 2　求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ 的逆序数,并确定它们的奇偶性.

解　$\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 21] = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = n(n-1)/2$.由于 $n(n-1)/2$ 的奇偶性与 n 的取值有关,故应作如下讨论:

---

* [1.2(2),(5)]表示该例(或习题)是同济大学数学系编《线性代数》(第五版)中习题一第 2 题的第 2、第 5 小题.下同.

当 $n=4k$ 时，$n(n-1)/2=2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$n(n-1)/2=2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$n(n-1)/2=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$n(n-1)/2=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

例 3　选择 i 和 k 使 9 元排列 $1274i56k9$ 为偶排列.

解　显然 i 与 k 只能取 3 和 8 两个数. 若取 $i=3$，$k=8$，由于排列的逆序数为 $\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)=0+0+4+1+0+0+0+0+0=5$，故该排列为奇排列. 因对换改变排列的奇偶性，故取 $i=8$，$k=3$ 时的排列 1 2 7 4 8 5 6 3 9 为偶排列.

例 4[1.7]　设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$（元素为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的 n 阶行列式也可记作 $D=\det(a_{ij})$）. 把 D 上下翻转、逆时针旋转 90°、依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{n(n-1)/2}D$，$D_3=D$.

证　(1) 先计算 D_1. 为此通过行的交换将 D_1 变换成 D，从而找出 D_1 与 D 的关系.

D_1 的最后一行是 D 的第 1 行，把它依次与前面的行交换，直至换到第 1 行，共进行 $n-1$ 次行的交换. 这时新行列式的最后一行是 D 的第 2 行，把它依次与前面的行交换，直至换到第 2 行，共进行 $n-2$ 次行的变换……直到最后一行是 D 的第 $n-1$ 行，只需经过一次行的交换即可将其换到第 $n-1$ 行，这样就把 D_1 经行的交换变为 D. 共进行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=n(n-1)/2$$

次行的交换，故 $D_1=(-1)^{n(n-1)/2}D$.

(2) 为理解将 D 逆时针旋转 90°的结果，先以三阶行列式为例说明 D 经过逆时针旋转 90°后的结果，即

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{经逆时针}} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}=\widetilde{\Delta}_3$$

逆时针旋转 90°后所得的行列式 $\widetilde{\Delta}_3$ 的第 1 行、第 2 行、第 3 行恰好是 Δ_3 的第 3 列、第 2 列、第 1 列.

一般情况也是如此,逆时针旋转 90°后所得行列式 D_2 的第 $1,2,\cdots,n$ 行分别为原行列式 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列. 若把 D_2 再上下翻转得 $\widetilde{D}_2$,则 $\widetilde{D}_2$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次是 D 的第 $1,2,\cdots,n$ 列,即 $\widetilde{D}_2=D^{\mathrm{T}}$. 于是由(1)得

$$D_2=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}\widetilde{D}_2=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}D.$$

(3) 注意到若把 D_3 逆时针旋转 90°得 $\widetilde{D}_3$,则 $\widetilde{D}_3$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 列恰好是 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列,于是再把 $\widetilde{D}_3$ 左右翻转(其结果与上下翻转一样)就得到 D. 于是由(1)、(2)得到

$$D_3=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\widetilde{D}_3=D.$$

注意　上例的结论要理解,记住. 即对行列式 D 作转置、依副对角线翻转、旋转 180°所得行列式不变,但作上下、左右翻转,逆(顺)时针旋转 90°所得行列式为 $(-1)^{n(n-1)/2}D$.

尤其是对行列式作上下、左右翻转时经常用到上述结论. 特用命题表述如下.

命题 1.1.1　设 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|_{n\times n}$,将 D_n 上下或左右翻转,依次得到

$$D_n^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_n^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

则
$$D_n^{(1)}=(-1)^{n(n-1)/2}D_n,\quad D_n^{(2)}=(-1)^{n(n-1)/2}D_n.$$

2. 行列式展开式中某项所带符号的确定方法

调换项中元素位置,使每项所对应的行下标(即第一个下标)为自然排列,然后求其列下标所组成的排列的逆序数. 根据行列式定义,由其奇偶性,确定该项所带符号.

或者直接分别计算该项行下标和列下标所组成的排列的逆序数,由这两个逆序数之和的奇偶性,确定该项所带符号。

例 5　在六阶行列式 $D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$ 中证明 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 是 D_6 中的一项,并求这项应带的符号.

解　调换项中元素位置,使其行下标为自然排列,得到

$$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}=a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}.$$

此时右端的行下标排列为自然排列，列下标排列为 362415，为 6 元排列.因而右端是位于 D_6 的不同行、不同列的 6 个元素的乘积，故它是 D_6 的一项.

该项所带符号既可由右端列下标排列的逆序数的奇偶性，也可由左端行下标排列与列下标排列的逆序数之和的奇偶性确定.

因 $\tau(362415)=8$ 或 $\tau(531462)+\tau(123456)=8+0=8$，故所给项应带正号.

3. 用定义计算行列式的方法

对于含零元素较多的行列式用定义计算较简便.因行列式的项中有一因数为零时，该项的值为零，故只需求出所有非零项即可.如何求出呢？常用下述两法.

法一 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项.

当行列式含大量零元素，尤其是行列式的非零元素乘积项只有不多的几项时，用此法计算比较简便.

例 6 用行列式定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \begin{array}{l} (a_{ij}\neq 0; i=k, j=k+1, \\ \quad k=1,2,3,4; \\ a_{5t}\neq 0, t=1,2,3,4,5). \end{array}$$

解 由行列式定义知，每一非零项由不同行、不同列的 5 个非零元素乘积所组成.第 1 行的非零元素只有 a_{12}，它位于第 2 列，于是该项第 2 行的非零元素不能在第 2 列，那只有 a_{23}.同法可求第 3,4 两行中不同行、不同列的非零元素只能取 a_{34}, a_{45}.第 5 行虽有 5 个非零元素，但与前面 4 个元素不同列的只有 a_{51}，于是该项 5 个非零元素的乘积为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

再确定该项所带符号.由于行下标已按自然顺序排列，而列下标的排列为 2 3 4 5 1，且该排列的逆序数 $\tau(2\ 3\ 4\ 5\ 1)=4$，故带正号.因除这一项外，其他不同行、不同列的元素乘积全等于零，所以 $D_5=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

注意 用上法求非零元素乘积项时，不一定从第 1 行开始，哪一行的非零元素最少(最好只有一个)就从哪一行开始，例如可以从最后一行开始计算习题 1.1 第 3(1)题.

例 7 一个 n 阶行列式中等于零的元素个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零.

解 根据行列式定义，该行列式展开后都是 n 个元素相乘，而 n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每项都至少含一个零元素，所以每项必等于零，故此行列式等于零.

法二 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \quad (1.1.1)$$

可知，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个，相应的该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式等于零. 这里 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置写出 j_1 可能取的数码；再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中，求出 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列.

例 8 用定义计算 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$ $(a_i,b_i,c_i,d_i\neq 0,i=1,2)$.

解 设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=a_1,a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$. 同法可求：$j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$. 因 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成四个 4 元排列：

$$1\,2\,3\,4;\quad 1\,4\,3\,2;\quad 3\,2\,1\,4;\quad 3\,4\,1\,2,$$

故 D_4 中相应的非零项共有四项，它们分别为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1c_1b_2d_2,$$

$$(-1)^{\tau(1\,4\,3\,2)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1d_1b_2c_2,$$

$$(-1)^{\tau(3\,2\,1\,4)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1c_1a_2d_2,$$

$$(-1)^{\tau(3\,4\,1\,2)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=b_1d_1a_2c_2,$$

其代数和即为 D_4 的值,整理后得

$$D_4=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1).$$

例 9　设在五阶行列式中 $a_{12}=0$,问展开式中为零的项至少有多少个?

解　因在五阶行列式 $D_5=|a_{ij}|_{5\times5}$ 的展开式中含 a_{12} 的项为

$$a_{12}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3}\ a_{4j_4}\ a_{5j_5},$$

其中 $j_2j_3j_4j_5$ 是 1,3,4,5 的一个排列,共有 $4!=24$ 个,故至少有 24 项为零.

例 10　用定义计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}$.

解　为求 D 的值,只需求出 D 中所有非零项.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$,因而 j_1 只能取 1985,即 $j_1=1985$. 同理 $j_2=1984,j_3=1983,\cdots,j_{1985}=1,j_{1986}=1986$,于是 $j_1,j_2,\cdots,j_{1985},j_{1986}$ 在可能取的数码中,$j_1j_2\cdots j_{1985}j_{1986}$ 只能组成一个 1986 元排列:

$$1985\quad 1984\ \cdots\ 2\quad 1\quad 1986.$$

故 D 中非零项只有一项,即

$$D=(-1)^{\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)}a_{1,1985}a_{2,1984}\cdots a_{1985,1}a_{1986,1986}.$$

因 $\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)=1984+1983+\cdots+2+1=1985\times992$ 为偶数,故

$$D=(-1)^{1985\times992}1\times2\times3\times\cdots\times1985\times1986=1986!.$$

例 11　用定义计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$,其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解　由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到

$$j_1=2,3;\qquad j_2=1,2,3,4,5;\qquad j_3=1,2,3,4,5;$$
$$j_5=2,3;\qquad j_4=2,3.$$

因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 在上述可能取的数码中,一个 5 元排列也不能组成,故 $D_5=0$.

注意 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \cdots, a_{i_sj_s}$ $(2\leqslant s\leqslant n)$，其列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 所能取的不同数码个数小于行数 s，则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_s, j_{s+1}, \cdots, j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成，即 D 中没有 n 个非零元素相乘的项，从而 $D=0$. 例如，在五阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

中，第 1，4，5 行的非零元素的列下标取值为

$$j_1=1,3;\quad j_4=1,3;\quad j_5=1,3.$$

因它们所取的不同数码只有两个(1 与 3)，其个数小于行数($s=3$)，故 $D_5=0$.

上述 $D=0$ 的结论如从 D 中所含零元素个数来看，则可说成：若 n 阶行列式 D 中位于某 s 行 k 列交叉处元素全为 0，且 $s+k>n$，则此行列式 $D=0$.

4. 行列式中含特定元素的所有项的求法

一般用行列式的定义求出.

例 12[1.3] 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 设四阶行列式为 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，D_4 中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的所有项数为四元排列 $13j_3j_4$ 的个数，而 $13j_3j_4$ 能组成的 4 元排列共两个，即 1 3 2 4 与 1 3 4 2. 其相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},$$

$$(-1)^{\tau(1\,3\,4\,2)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

因而，四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只有上述两项.

例 13 试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数，已知 $f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $f(x)$ 中含 x 因子的元素有

$$a_{11}=-x,\quad a_{21}=x,\quad a_{23}=2x,\quad a_{32}=x,$$

$$a_{35}=3x,\quad a_{44}=x,\quad a_{52}=-7x.$$

因而，含有 x 因子的元素 a_{ij_n} 的列下标只能取

$$j_1=1;\quad j_2=1,3;\quad j_3=2,5;\quad j_4=4;\quad j_5=2.$$

于是,含 x^4 的项中元素 a_{ij_n} 的列下标只能取 $j_1=1,j_2=3,j_3=2,j_4=4$ 与 $j_2=1,j_3=5,j_4=4,j_5=2$;相应的 5 元排列只有 1 3 2 4 5,3 1 5 4 2,含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,\quad (-1)^{\tau(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4.$$

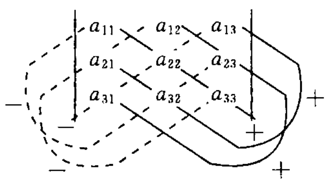
故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

5. 计算三阶行列式

用行列式的定义式(1.1.1)不难求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}. \qquad (1.1.2)$$

式(1.1.2)常称为对角线法则.该法则可用下列图示的对角线法记忆.



其中各实线连接的三个元素在主对角线上或在与主对角线平行的实线上,其乘积都是式(1.1.1)右端中带正号的项,各虚线连接的三个元素在次对角线上或在与次对角线平行的虚线上,其乘积都是式(1.1.1)右端中带负号的项.

计算含零元素的三阶行列式可用式(1.1.2)简化计算.因这时式(1.1.2)的右端至少有两项等于零.

例 14[1.1(1),(2)] 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

解 利用计算三阶行列式的对角线法则,由式(1.1.2)得到

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}=2\times(-4)\times3+1\times1\times8+0\times(-1)\times(-1)$$
$$-1\times(-4)\times(-1)-2\times(-1)\times8-3\times1\times0$$
$$=-24+8-4+16=-4.$$