全国高等农业院校教学参考书

农学类各专业用

多元统计分析及其应用

裴鑫德　编著

北京农业大学出版社

全国高等农业院校教学参考书

多元统计分析及其应用

裴鑫德　编著

农学类各专业用

北京农业大学出版社

（京）第 164 号

多元统计分析及其应用
裴鑫德　编著
责任编辑　孟　梅
*
北京农业大学出版社出版
（北京市海淀区圆明园西路二号）
北京外文印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
*
850×1168 毫米　32 开本　18.25 印张　448 千字
1991年 10 月第 1 版　1991年 10 月第 1 次印刷
印数：1—2500
ISBN 7-81002-235-0/O·236
定价：5.65元

编　著　裴鑫德（北京农业大学）

主　审　唐守正（中国林业科学院）

内 容 简 介

本书是根据农业部“七五”教材规划要求为全国高等农业院校农学、遗传育种、土化、植保、园艺、畜牧、农经、气象等各专业的大学生和研究生学习《多元统计分析及其应用》课程而编写的教材或教学参考书。主要内容有：多元正态分布理论，聚类分析及其应用，主成分分析及其应用，因子分析，典型相关，均值与协差阵的检验，判别分析，回归分析及对应分析等。本书特点是在系统介绍多元统计分析的基本原理、方法的基础上重点联系了近代农业科学和生物科学应用实际，书中给出了大量近代农业科学研究中的应用实例，易使读者学以致用，因此本书具有很大的实用性。为了实现多元数据统计计算，书中还给出了各主要内容的计算机语言程序，供读者计算使用。本书亦可做为广大农业科学工作者和其它各领域的从事多元数据计算分析的研究工作者学习和应用多元统计分析的参考书。

序 言

多元统计分析（Multivariate Statistical Analysis）是在数理统计基础上发展起来的一门新的数学分支．随着电子计算机的发展和应用，多元统计分析方法已广泛应用于自然科学和社会科学的许多领域．我国近年来，在工业、农业、经济、地质、医学、气象以及社会科学等许多方面，多元统计分析的理论和方法都得到了应用，并取得了可喜的成果．

多元统计分析研究的内容范围十分广泛，因此无论是数学与统计等理论工作者还是各实际领域的研究工作者都对这门学科给予很大的重视，并且正在引人入胜，但是它的内容在许多方面还在发展，正在吸引许多理论工作者和实际工作者进行探索和研究．

多元统计分析从它发展的早期就被应用到农业科学和生物科学的试验研究中，并且反过来也推动了这一学科理论的发展．多元统计分析在农业科学和生物科学中的数值分类、数学模型、预测预报、判别、数量遗传和数量生态等方面都得到了广泛的应用．英国著名统计学家 R.A.Fisher 早在 30 年代就在这方面做出了许多杰出的贡献．我国著名数学家许宝騄先生对多元统计分析理论研究的许多成果，起到了奠基性的作用，他的论文至今还常为各国数学家所引用，他为我国多元统计分析学科的发展和人才的培养做出了重要贡献．

多元统计分析作为一门学科最早的比较系统完整的著作就是 1958 年出版的 T.W.Anderson 所写的《Introduction to Multivariate Statistical Analysis»这是一部很成功的著作，至今仍被认为是这一学科的"经典著作"。从 50 年代以后，多元统计分析又有了很大的发展，世界各国先后又出版了一批不同风格的比较有水平的著作，并发表了大量文章，进一步促进了这一学科的发展.

当然，对农业科学和生物科学工作者来说，不可能过多的深入到它的理论中去，而主要应在掌握它的必要的理论基础上，用更多的精力于这些理论和方法在农业和生物科学的应用研究和发展的探索上. 本书正是根据这一目的在重点介绍多元正态分布的若干基础理论基础上，着重介绍了多元统计分析在农业科学和生物科学中比较实用的有关原理和方法，特别是给出了大量近代农业科学研究应用实例，希望通过这些内容的介绍，有助于多元统计分析在我国农业科学和生物科学领域的研究工作中进一步应用和发展，因此本书也具有很大的实用性.

本书主要是为高等农业院校和农业科研单位的研究生和高年级大学生学习这门课程而写的，当然对广大农业科学工作者和高等农业院校教师以及其它各学科应用多元分析的实际研究工作者也都有参考价值. 学习本书要求读者具有初步的高等数学、矩阵代数和概率统计基础知识.

多元统计分析方法在农业科学研究中的应用常常和电子计算机的使用联系在一起，因为大量试验数据的处理和统计计算离开电子计算机是很困难的，为了便于读者掌握多元统计分析计算方法和应用电子计算机实现计算，本书给出了一些主要计算内容的 BASIC 语言程序和若干计算实例. 本书第一章矩阵理论主要是为学习本书时复习参考用，讲授时可以不讲 有些内容有一定难度或证明较复杂的地方本书注了星号，这些地方也可以不讲.

在编写本书过程中曾参考了许多国内外有关著作和文献，在此表示深切的谢意.

本书初稿曾作为北京农业大学农学、作物遗传育种、动物遗传和生物物理等专业高年级大学生选修课的教材和北京农业大学研究生院各专业研究生选修课和学位课的教材于 1985 年和 1987 年两次油印过，并曾在北京农业大学和中国农业科学院研究生院讲授过多次．这次出版是在这一基础上经过修改和增删而成的．

本书初稿蒙唐守正教授详细审阅，并提出许多宝贵意见，特向他表示衷心的感谢．在初稿讲授过程中张嘉林、张录达、关晓东、肖红等同志以及北京农业大学数学教研室许多同志曾给过不少帮助在此一并向他们表示深切的谢意，许多兄弟农业院校的同志曾对本书的出版给过热情的鼓励，特向他们致以谢意．

由于作者水平所限，书中难免有缺点或错误之处，望读者批评指正．

裴鑫德

于北京农业大学

1990 年 10 月

目　　录

第一章　矩阵代数

本章主要介绍在多元统计分析及其应用中经常要用到的一些矩阵代数理论的基本内容，其中大部分读者可能已比较熟悉，因为一般线性代数书中都包含这些内容，所以本章内容主要是为复习用的，除少部分内容外，基本上都没作证明. 对矩阵代数不太熟悉的读者，则本章应作为必须预习的内容.

§ 1.1　矩阵定义

定义 1.1　一个 $m\times n$ 矩阵 A 是一个由实数或者复数组成的 m 行 n 列的矩形阵列，常记作：

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是矩阵 A 的第 i 行和第 j 列相交位置的元素，简称第 i—j 元素. 在本章中除特别说明外，都是研究元素为实数的矩阵.

如果矩阵 A 的行数和列数相等，即 $m=n$，则矩阵 A 称为 n **阶方阵**，或简称 n **阶矩阵**. 如果矩阵 A 中元素只有一列，即 $n=1$，则称矩阵 A 为**列向量**. 如果 $m=1$，即矩阵 A 中元素只有一行，则称 A 为**行向量**. 因此向量可以看成是矩阵的特殊情

形，矩阵也可以看成是向量的推广．如果 $a_{ij}=0$，$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n，即矩阵 A 的元素全是 0 时，则 A 称为**零矩阵**，常记作：$A=0$.

定义 1.2 如果矩阵 A 为 $m\times m$ 方阵，且主对角线上的元素皆为 1，其余的元素均为 0 时，则称矩阵 A 为 m **阶单位阵**，记作 I 或 I_m（有时也记作 E 或 E_m），即

$$I_m=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})_{m\times m}, \qquad (1.2)$$

其中 δ_{ij} 称为克罗内克（Kronecker）δ，且规定

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

定义 1.3 如果矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，且两矩阵的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n).$$

则称矩阵 A 与矩阵 B **相等**，且记作：

$$A=B.$$

定义 1.4 如果将 $m\times n$ 矩阵 A 的行列互换，则所得新的矩阵称为矩阵 A **的转置矩阵**，记作 A' 或 A^T，于是有

$$(A')'=A, \qquad (1.3)$$

或

$$(A^T)^T=A.$$

定义 1.5 如果对于 m 阶方阵 A，有 $A=A'$，则称矩阵 A 为**对称阵**．显然这时 A 的元素有

$$a_{ij}=a_{ji} \qquad (i,\ j=1, 2, \cdots, m),$$

即对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

定义 1.6 如果 m 阶方阵主对角线以外的元素全为 0 时，

则称此方阵为**对角方阵**，或简称**对角形矩阵**．如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

并记作：$A=\text{diag}\ (a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{mm})$．

定义 1.7 如果矩阵 A 为 m 阶方阵，且有以下形式：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

即 A 中主对角线以下的元素都是 0，则称矩阵 A 为**上三角矩阵**．如果方阵 A 在主对角线以上的元素都是 0 时，则称此方阵 A 为**下三角矩阵**．如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

显然，如果矩阵 A 为上（下）三角矩阵，则 A' 即为下(上)三角矩阵．

§ 1.2 矩阵运算及其性质

定义 2.1 如果矩阵 A 与 B 均为 $m\times n$ 矩阵，则

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \tag{2.1}$$

（其中 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$；$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）称为矩阵 A 与矩阵 B 的和．

需要指出，只有当两个矩阵的行数与列数相等时才能相加.

显然，

$$(A+B)'=A'+B'. \tag{2.2}$$

定义 2.2 如果 λ 为实数，矩阵 $A=(a_{ij})$，则 λ 与矩阵 A 的乘积规定为

$$\lambda A=A\lambda=(\lambda a_{ij}). \tag{2.3}$$

矩阵加法具有以下性质：

$$A+B=B+A, \tag{2.4}$$

$$A+B+C=A+(B+C), \tag{2.5}$$

$$A+(-1)A=0, \tag{2.6}$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A, \tag{2.7}$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B, \tag{2.8}$$

$$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A. \tag{2.9}$$

以上 A，B，C 均假定满足矩阵加法定义条件，且 λ 与 μ 为常数.

定义 2.3 如果矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times p}$，矩阵 $B=(b_{kj})_{p\times n}$，即矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等，则矩阵 A 与矩阵 B 的乘积为

$$AB=(a_{ik})(b_{kj})=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right),$$

$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

这就是说矩阵 AB 是 $m\times n$ 的，且其第 $i—j$ 元素为

$$\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

特殊情形，如果 A 为 $1\times s$ 矩阵，B 为 $s\times 1$ 矩阵，且

$A=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})$，$i$ 为一正整数，

$B=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{sj})'$，$j$ 为一正整数，

则

$$AB=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$$

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

即此时矩阵 AB 为一方阵，且只有一个元素．

需要注意，只有第一个矩阵（左边的）的列数等于第二个矩阵（右边的）的行数时，两个矩阵才能相乘，且在一般情况下，$AB\neq BA$，即矩阵乘法不满足交换律．

矩阵乘法有以下性质：

$$(AB)C=A(BC)=ABC,$$

$$A(B+C)=AB+AC,$$

$$(A+B)C=AC+BC,$$

$$AI=IA=A,$$

$$(AB)'=B'A',$$

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B).$$

定义 2.4 如果 A 为 n 阶方阵，则方阵 A 的**幂** A^k（k 为正整数）为

$$A^k=AA\cdots A(\text{即 } k \text{ 个 } A \text{ 相乘}),$$

显然方阵的幂有以下性质：

$$A^mA^n=A^{m+n},$$

$$(A^n)^m=A^{nm},$$

其中 m,n 均为正整数．

定义 2.5 如果 A 为 $m\times m$ 矩阵，且有 $A^2=A$，则称矩阵 A 是**幂等的**．

§ 1.3 矩阵的行列式

定义 3.1 如果矩阵 A 为 n 阶方阵，则 A 的行列式(determinant)记作 det A 或 $|A|$，且

$$\det A = |A| = \sum_{\pi} \lambda_{\pi} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \tag{3.1}$$

其中 $\sum\limits_{\pi}$ 为对 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有 $n!$ 个排列 $\pi=(i_1,\cdots,i_n)$ 求和，且

$$\lambda_{\pi}=\begin{cases} 1, & \text{当 } \pi \text{ 为偶排列,} \\ -1, & \text{当 } \pi \text{ 为奇排列.} \end{cases}$$

因此，以后凡提到矩阵的行列式时，则该矩阵都指的是方阵.

如果将方阵 A 中的第 i 行和第 j 列的元素都去掉，则余下的子矩阵的行列式称为矩阵 A 中元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 将 a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$，即 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 例如，如果

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

n 阶矩阵 A 的行列式有以下主要性质：