高等师范专科学校教学参考用书

初等数学研究与教学法

（初等代数）

山东省师专教育学院《初等数学研究与教学法》协编组

高等师范专科学校教学参考用书

初等数学研究与教学法

（初等代数）

山东省师专 教育学院《初等数学研究与教学法》

协 编 组

一 九 八 四 年 六 月

说　明

本套书于1983年春根据全国高等师范专科学校《初等数学研究与教学法大纲》编写的。在经过一年来的教学使用和广泛征求意见的基础上，这次又进行了修订再版，本套书分为初等代数、初等几何、初中数学教学法三册。

参加初等代数编写的有：烟台师院李铭心、济南师专韩思正。临沂师专綦敦玉、济宁师专张传纲、昌潍师专王寿眉、聊城师专田开璞；负责该书审编的是綦敦玉和李铭心。

参加初等几何编写的有：潍坊教育学院张运太、聊城师专陈恩荣、泰安师专周诚询、胜利油田教育学院续建民、枣庄师专褚庆义；负责该书审编的是周诚询和陈恩荣。

参加初中数学教学法编写的有：淄博师专齐敦仁、青岛师专刘伯元、山东煤矿教育学院张润庠、菏泽师专司梦林；负责该书审编的是张润庠。

本套书的插图由陈恩荣绘制。

在编写修订这套书的过程中，得到了山东省教育厅的热情关怀与支持，高教处刘星南同志、山东省师专数学校际协作教学组负责人烟台师院魏远同志做了许多组织工作。山东省高师院校中学数学教材教法研究会理事长巩宪文教授予以指导和帮助，在这里谨向以上同志表示衷心感谢。

本套书适用于二、三制师专数学专业，也可作为高师函授教材和初中数学教师进修或教学参考之用。

限于编者水平，时间仓促，肯定存在谬误之处，敬请读者提出批评指正。

协　编　组

1 9 8 4年6月

目　　录

绪　言

《初等数学研究与教学法》是高等师范专科学校数学专业的一门重要专业课。它包括“初等数学研究”和“初中数学教学法”两部分，前一部分又包括初等代数和初等几何，后一部分则包括教法通论和分科（代数、几何）教学法。

作为《初等数学研究与教学法》的第一部分，初等代数的研究内容又是什么呢？为了较清楚地说明这个问题，我们先从代数发展简史谈起。

大家都知道“代数”这个词，从字面上看似乎是用字母代表数。实际上，“代数”这个词第一次出现在九世纪前半叶，起源于一个中亚学者穆罕默德所著一书的书名，原意是“对消”，它表示了代数作为一门关于形式运算的学科的主要精神。

在以后的发展中，不同时期代数学的内容是不相同的。大体可分为三个时期。在很长的历史时期内，代数被认为是字母计算学，也就是把代数看成是关于字母计算、公式变换以及关于代数方程等等的科学。

到十九世纪的前半期，代数学中的代数方程的解法问题（主要是一元n次方程的解法）渐渐地被人们认为是中心问题，因而在这个时期内，代数被定义为代数方程理论，这里面包含行列式、矩阵、线性变换。

到十九世纪的后半期，代数这门科学开始在力学、物理

学以及数学本身找到了越来越多的研究对象（向量、矩阵、张量、超复数等等），对于这些对象很自然地要考虑到它们的运算，然而这些运算满足一些不同于数的其它规律，与此相对，代数学就起了质的变化，人们把代数理解为是研究各种代数结构的科学，（如果对于某种对象的集合，给出了一些运算及这些运算所满足的规律，那末就说给出了某一个代数结构），这也就是所谓公理化的代数或抽象代数。

作为中学数学科目的代数与作为科学的近代代数，就其性质和内容来说，有着显著的区别。在数学课程现代化运动中，虽然有人企图以结构化、公理化的思想来改革中学数学，但目前我们使用的代数教材的内容仍是很庞杂的，涉及到数学的好几个分支，大体上可以归纳为：数的概念及其运算；解析式的恒等变形；方程和方程组；函数以及不等式、数列、排列组合和二项式定理、概率初步、逻辑代数初步等。

从以上列举的这些项目，可以看出中学代数这门课程的内容既不同于近世代数，也不完全是古典代数。

根据高等师范专科学校数学专业的培养目标，结合中学代数课程内容，初等代数的研究内容主要是数、式、初等函数、方程和方程组、不等式等。企图立足于中学代数（主要是初中代数）教材，以一个初中数学教师所需要的代数知识为准，在内容上予以适当延伸、充实；在方法上予以系统总结、续新；在观点上要恰当地给予提高，使之更加深入化和系统化。

第一章　数

在数学上，数是最基本的必不可少的工具，也是实际中最广泛应用的工具，在中小学数学课程中，数的概念的扩展也是主要内容之一，因此，对于数的理论，必需进行深入的研究。

严格建立数的理论，超出本教材的范围。在这一章里只是应用初等数学知识，对数的理论作简要的阐述。

§1.1　数的概念的扩展

一　数的发展简史

首先被人们所认识的和运用的是自然数（正整数）。自然数现在是小学生都已熟悉的知识，但自然数的~~产生和发展~~是经历了漫长的岁月。

在原始社会，人们并没有数的概念，即使他们能够用自己的方式判断出在实践中遇到物体集合的大小，但还没能明显地把数分离出来，在更高的发展阶段上，数被人们指明为物体集合的性质，人们还没有把它当成“抽象的数”，例如在某些民族给予数的名称里，数“5”是用手来表达的，数“20”是用“整个人”来表达的。这里5不是抽象地被理解，而是简单理地解为“就是象手上的指头那样多”，20理解为“就象一个人所有的手指和脚趾那样多”，等等，这种

把两个集合的物体逐一比较来判定它们数量相等的方法，持续了很长时间，中国古代“结绳记事”就反映了这一点。人们逐渐发现，每一个单个的数，是物体集合的一种性质，这种性质对于所有那些可以将其物体逐一对比的集合来说是共同的。对于那些不能将其物体逐一对比的集合来说是不同的，人们世世代代，千百万次地在许多物体集合之间进行比较，终于在实践中发现了数与数之间的关系，从而才脱离具体物体的集合而产生抽象的自然的概念。

自然数概念的进一步扩充，最重要的是“0”的记号的出现。“0”的记号似乎是起始于巴比伦，到公元六世纪，印度数学家才开始运用它，我国古代筹算中是利用空位的办法来表示“0”的。

古代数学家不但运用了自然数和零，约在公元前1700年，在许多计算中出现了分数，如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$等等。这些分数的出现也是从实践中来的。在天文测量的时候发现，有时所用的单位不能使所测量的星体置放在整数位上，这时必须把单位加以分划，以便用单位的一部分来更准确地表示星体的位置，这样便出现了分数，中国最古老的数学典籍《周髀算经》中有很多分数乘除的例子。

负数概念在西方数学中是很迟才出现的。他们把负数解释为负债的意思。而负数的概念直到十七世纪，才在数学中占有确定的地位，至于正负数用有向线段来表示，则是笛卡儿的功劳。但是在中国，负数概念很早就出现了。中国古代数学家在《九章算术》（公元一世纪）中就指出了正负数的不同表示法和正负数的加减法则，这是数学史上的一个光辉

的成就，后来刘洪（公元158—183）在公元174年的乾象历中将正负术应用在历法上。

关于无理数的产生也是很早的事情，毕达哥拉斯（古希腊，公元前六世纪）为了得到不可公度线段的比的精确数值，便导致了无现数概念的产生，但是从它的名称上可以看出当时对无理数是不认识的。只是用几何的形象来说明无理数的存在。在十七世纪，和十八世纪随着数学分析的发展，实数成为主要的研究内容，然而这时还是以直观概念为基础的，即用直线上的点表示数，到十九世纪七十年代才由三位大数学家戴德金、康托、维尔斯托拉斯建立了严格的实数理论。

数的概念更进一步的扩展——虚数的引进，则与前几次数的概念的扩展，性质上有所不同，它不是首先由于量的度量的需要，而是为了解决数学本身所提出的问题。在古代解二次方程就遇到有虚根的情况，当时认为这类方程是不能解的。为了使方程$x^2+a=0$（a为实数）都有解，就必须引进新数，使负数开平方的运算能够进行。当时人们把这种新数（负数的平方根）叫做虚数。1572年意大利数学家邦别利第一次在代数里给复数的运算以正式的论据，对这些数才有了进一步的认识，在此后约二百年，复数的几何表示（复数表示平面上的点）出现了，虚数得到了具体的解释，同时在解决实际问题方面得到了广泛的应用。这样，这种新数才被人们承认并且巩固下来。

从上面简短的叙述中，我们可以看到，数的概念的产生与扩展是交错着进行的。例如在人们还没有完全认识负数之前，早已有了无理数的概念；在实数理论还没有建立以前，

已经产生了虚数的概念。但是从大体上来看，数的概念的历史发展过程是按照以下的逻辑顺序：

$$\text{自然数}\xrightarrow{(\text{正分数})}\text{正有理数}\xrightarrow{(\text{负数与零})}$$

$$\text{有理数}\xrightarrow{(\text{无理数})}\text{实数}\xrightarrow{(\text{虚数})}\text{复数}$$

在中小学数学课程中，关于数的概念的扩展，基本上就是按照上面的顺序（只是数零较早地被引进）。

二、数的扩展原则

1　数集扩展的必要性

数集的每一次扩展，总是由于旧有的数集与解决具体问题的矛盾而引起的，这些问题有的是首先从实际中提出的，例如数集从自然数的集合扩展到实数的集合这一过程中，都是与量的计量问题联系着的；有些则是从数学本身首先提出的，例如虚数的引进，但即使如此，最后还必须取得了实际的解释，才被承认。

单从数学本身运算的需要看，引入新数也是十分必要的：

在正整数范围内$2x=3$无解，引入正分数后有解：$x=\frac{3}{2}$；

在正有理数范围内，$2x+3=0$无解，引入负有理数后便有解：$x=-\frac{3}{2}$；

在有理数范围内，$x^2=2$无解，引入无理数后有解：$x=\pm\sqrt{2}$；

在实数范围内$x^2=-1$无解，引入虚数后有解：$x=\pm i$

2　数的扩展原则

中学数学里数的概念是在小学里非负有理数的基础上作了三次扩展：

第一次：引入负数，构成有理数集；

第二次：引入无理数构成实数集；

第三次：引入虚数构成复数集。

在数的概念每次扩展后所得的数集，包括前面的数集；并且经过扩展后所得的数集具有前面数集的主要性质，也解决了前面数集不能（或不一定能）施行的某种运算。一般地，数集扩展遵循下面的几条原则：

（1）增添了新的元素。

（2）新旧元素在一起构成新的数集，在新的数集里，定义一些基本关系和运算，使原有的一些性质（运算定律、顺序律）仍旧能够适用。

（3）旧元素作为新的数集里的元素，原有的运算关系仍旧保持。

（4）新的数集解决了旧的数集所不能解决的矛盾。

（5）新的数集应是满足以上四条原则的数集中最小的。

例如，我们扩展有理数集到实数集，而不是立刻扩展到复数集。

在数的概念的扩展中，还有一点值得注意，这就是：

数集的每一次扩展，解决了一定的矛盾，从而扩大了应用范围。但是，每一次扩展也失掉了若干性质，例如，在自然数集中，每一个数有它唯一的后继数，而在有理数集中这

个性质没有了；在实数集中有顺序性，在复数集中就失去了这种顺序性。

3　科学的数系和教学的数系

作为科学的数的理论，有较高度的抽象性和理论体系严谨性的特点。以建立自然数的理论来说，所谓严谨地建立自然数的理论，也就是要解决这样的问题：为了确立自然数的概念和它的性质。究竟要引进哪些最原始的概念（基本概念），要选择哪些性质作为最原始的命题（公理），然后借助于它们逻辑地引进其它的概念（定义）和命题（定理）；另外，由于近代的代数已成为对新的结构理论（如群、环、体）的研究，因此，许多人认为，数的概念的研究也应该统一用结构的观点来研究，把每个数系作为和一定的代数结构有关的系统来建立。科学的数系的扩展一般采用两种形式，一种是把新的元素加到已建立的数系中而扩展；另一种是从理论上建立一个集合，然后指出新数系的一个部分集合和以前数系是同构的。

作为科学的数系建立过程一般采用如下的扩展过程：

$$\underset{\text{(自然数)}}{N} \longrightarrow \underset{\text{(整数)}}{J} \longrightarrow \underset{\text{(有理数)}}{Q} \longrightarrow \underset{\text{(实数)}}{R} \longrightarrow \underset{\text{(复数)}}{C}$$

作为中小学课程的数的概念的扩展内容应如何处理呢？显然，科学的扩展数系的方法是不适用于中小学数学教学的，因此，我国现行的通用教材，依据我国具体的实际情况，采用渗透近代数学观点，添加元素，强调运算的方法而不用抽象的公理化体系来扩展数的概念。

目前我国中小学课程关于数的扩展内容大致采用如下过程：

$$\text{自然数集}\xrightarrow{\text{（添零）}}\text{扩大自然数集}\xrightarrow{\text{（添分数）}}\text{算术数集}$$

$$\xrightarrow{\text{（添负数）}}\text{有理数集}\xrightarrow{\text{（添无理数）}}\text{实数集}\xrightarrow{\text{（添虚数）}}\text{复数集}$$

作为中学数学教师，熟悉用代数结构的观点和用严格公理系统来处理数的概念的扩展，对分析、处理中学教材进行教学是有好处的，例如，对中学教材可以明确地分清哪些是基本概念，哪些是定义，哪些是公理，哪些是需要证明的性质，哪些是定义合理性的说明等等。

§1.2 自然数集及其性质

在前面，我们曾指出人类最早认识的数是自然数，在理论上研究数的概念，首先也需要建立关于自然数的理论。

下面我们顺次地来介绍自然数的两种不同的理论：基数理论和序数理论。

一　自然数的基数理论

人类要了解东西的多少，总是用一个集合作标准来与要了解多少的集合作比较，就得到“象（标准集合）那样多”的“数”，这个能够作为标准集合的象征，实际就是我们现在说的一个自然数。自然数概念，事实上就是从这一实际基础上抽象出来的。

基数理论以不定义的概念“集合”为基础，把一切等价（或等势、或等浓度）集合的共同象征叫做基数（或势），而每一个有限集合的基数就是一个自然数。例如，人的两只手、两只眼睛、两条腿……等都是等价集合，这类集合的基数

就用符号"2"来表示，

了解了自然数的意义后，就不难用集合的知识来定义自然数集合中元素间的大小关系和加法运算与乘法运算。

定义　设有限集合A和B的基数分别是自然数a和b，当

（1）A和B等价时，则说自然数a等于b，记作$a=b$；

（2）A和B的一个真子集等价时，则说自然数a小于b，记作$a<b$；

（3）A的一个真子集与B等价时，则说自然数a大于b，记作$a>b$。

人类开始进行加法运算时，总是把被加的两个事物的集合放在一起来计算总数的多少，这就引出自然数基本运算的概念。用集合的观点来定义就是：

定义　设两个不具有公共元素的有限集合A和B的基数分别是a和b，如果$C=A\cup B$，就称集合C的基数c为a与b的和，记作$a+b=c$，a叫做被加数，b叫做加数，求两数的和的运算叫做加法。

在这个基础上，可以给出自然数乘法的定义。

定义　设b个等价集合A_1，A_2，…，A_b（两两间不具有公共元素）的基数都是a，由这b个集合构成并集

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_b=C$$

就称集合C的基数c为a与b的积，记作$a\times b=c$（或记作$a\cdot b=c$），a叫做被乘数，b叫做乘数，求两数乘积的运算叫做乘法。

类似地我们还可以用集合的知识，按照自然数的减法是加法的逆运算，除法是乘法逆运算来规定自然数的减法和除法的定义，并且还可以用上面的定义和集合论的知识，论证

在自然数集里，两个自然数的和、差、积与商都是唯一存在的，进一步还可以论证自然数的加法、乘法的基本运算律和自然数的次序之间的顺序律成立：

加法的交换律：$a+b=b+a$；

加法的结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法的交换律：$a\cdot b=b\cdot a$

乘法的结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

乘法对加法的分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$；

次序的全序性：对于两个自然数a和b，下面三种关系必有一种且仅有一种成立：

$$a=b,\ a>b,\ a<b;$$

次序的自反性：$a=a$；

次序的对逆性：如果$a>b$，那么$b<a$；

次序的传递性：如果$a=b$，且$b=c$，那么$a=c$；如果$a>b$，且$b>c$，那么$a>c$；

加法的单调性：如果$a<b$，且$c\leqslant d$，那么$a+c<b+d$；

乘法的单调性：如果$a<b$且$c\leqslant d$，那么$a\cdot c<b\cdot d$；

阿基米德公理：对于任意两个自然数a和b必有一自然数n使

$$na>b$$

上述建立自然数的理论叫做基数理论，它的优点在于把理论较直接地建立在经验的基础上，从而易于理解。但这一理论也有其缺点。我们知道，自然数具有双重的意义，一方面表示数量的意义，即回答“多少个”的问题，而另一方面是表示次序上的意义，即回答“第几个”的问题，基数理论仅仅反映了“多少个”的问题，对于“第几个”的问题就揭