高职高专"十一五"规划教材

公共基础课系列

高等数学

工科类

刘建勇 主 编

宋 美 谢 朋 刘全辉 副主编

王际科 主 审

国防科技大学出版社

高职高专“十一五”规划教材·公共基础课系列

高等数学

（工科类）

刘建勇　主　编

宋　美　谢　朋　刘全辉　副主编

王际科　主　审

国防科技大学出版社

【内容简介】 本书是专为高职高专工科类各专业编写的高等数学课程教材。书中全面、系统地介绍了高职高专工科类所需的高等数学基础知识，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分、无穷级数、微分方程、线性代数、数学建模、概率论、拉普拉斯变换、Mathematica 软件等。

本教材的特色在于知识讲解透彻易懂，例题选用经典实用，小结归纳方法技巧，数学基础内容全面。同时注重理论知识与实际应用相结合，强调运用数学知识解决实际问题，体现了职业教育的特色。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：工科类/ 刘建勇主编. —长沙：国防科技大学出版社，2008. 6
（高职高专“十一五”规划教材 · 公共基础课系列）
ISBN 978-7-81099-502-3
Ⅰ. 高…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 高等数学--高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 062462 号

出版发行：国防科技大学出版社
电　　话：(0731)4572640
网　　址：http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：黄　煌　　**特约编辑**：李南木
印 刷 者：北京昌平百善印刷厂
开　　本：720mm×960mm　1/16
印　　张：19.00
字　　数：403 千字
版　　次：2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：29.00 元

出版说明

高职高专教育作为我国高等教育的重要组成部分，承担着培养高素质技术、技能型人才的重任。近年来，在国家和社会的支持下，我国的高职高专教育取得了不小的成就，但随着我国经济的腾飞，高技能人才的缺乏越来越成为影响我国经济进一步快速健康发展的瓶颈。这一现状对于我国高职高专教育的改革和发展而言，既是挑战，更是机遇。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐，就必须对课程体系和教学模式等问题进行探索。在这个过程中，教材的建设与改革无疑起着至关重要的基础性作用，高质量的教材是培养高素质人才的保证。高职高专教材作为体现高职高专教育特色的知识载体和教学的基本工具，直接关系到高职高专教育能否为社会培养并输送符合要求的高技能人才。

为促进高职高专教育的发展，加强教材建设，教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中，提出了“重点建设好 3 000 种左右国家规划教材”的建议和要求，并对高职高专教材的修订提出了一定的标准。为了顺应当前我国高职高专教育的发展潮流，推动高职高专教材的建设，我们精心组织了一批具有丰富教学和科研经验的人员成立了高职高专“十一五”规划教材编审委员会。

编审委员会依据教育部高教司制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，调研了百余所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构，同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本套教材的编写遵循以下原则：

(1) 成立教材编审委员会，由编审委员会进行教材的规划与评审。

(2) 按照人才培养方案以及教学大纲的需要，严格遵循高职高专院校各学科的专业规范，同时最大程度地体现高职高专教育的特点及时代发展的要求。因此，本套教材非常注重培养学生的实践技能，力避传统教材“全而深”的教学模式，将“教、学、做”有机地融为一体，在教给学生知识的同时，强化了对学生实际操作能力的培养。

(3) 教材的定位更加强调“以就业为导向”，因此也更为科学。教育部对我国的高职

高专教育提出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。根据这一原则，本套教材在编写过程中，力求从实际应用的需要出发，尽量减少枯燥、实用性不强的理论灌输，充分体现出“以行业为向导，以能力为本，以学生为中心”的风格，从而使本套教材更具实用性和前瞻性，与就业市场结合也更为紧密。

(4) 采用“以案例导入教学”的编写模式。本套教材力图突破陈旧的教育理念，在讲解的过程中，援引大量鲜明实用的案例进行分析，紧密结合实际，以达到编写实训教材的目标。这些精心设计的案例不但可以方便教师授课，同时又可以启发学生思考，加快对学生实践能力的培养，改革人才的培养模式。

本套教材涵盖了公共基础课系列、计算机系列和机电系列的主要课程。目前已经规划的教材系列名称如下：

公共基础课系列

- 公共基础课

机电系列

- 机械类
- 数控类
- 电子信息类

计算机系列

- 计算机公共基础课
- 计算机专业基础课
- 计算机网络技术专业
- 计算机软件技术专业
- 计算机应用技术专业

对于教材出版及使用过程中遇到的各种问题，欢迎您通过电子邮件及时与我们取得联系(联系方式详见“教师服务登记表”)。同时，我们希望有更多经验丰富的教师加入到我们的行列当中，编写出更多符合高职高专教学需要的高质量教材，为我国的高职高专教育做出积极的贡献。

高职高专“十一五”规划教材编审委员会

前 言

本书是根据教育部制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，认真研究总结全国高职高专数学教改的经验，结合高等工程专科教育中专业教学的特点，并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的。

在多年的教学实践与研究中，我们认识到高职高专院校的数学基础教育应该着力培养学生以下几个方面的能力：一是运用数学的思想、概念和方法去消化吸收工程实践中的概念和原理的能力；二是将工程实践问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力。在本书的编写过程中，从典型的工程问题和自然科学的实际例子出发，深入浅出，引出基本的概念，然后运用一些系统化的方法和结论解决更多的工程问题。在教材体系结构及讲解方法上，我们适当淡化运算上的一些技巧，在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高。书中将数学素质的培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍，突出数学方法的应用。本书拓展了工程应用实例的范围，让学生更多地接触应用数学知识、数学方法解决工程实际问题的实例，增强学生的应用意识和能力。

本教材以培养工程应用技术型人才为目标，将数学基本知识和工程技术上的综合应用有机地融合在一起，主要具有以下几个特点：

1. 体现高职特色。根据各专业对数学的要求，贯彻“理解概念、强化应用和适用”的教学原则，强化工程数学的基础知识、基本思想，突出应用的本质。

2. 精选内容，构架新的课程体系。教学目标是使学生学会运用数学方法与工具去分析问题、解决问题，因此所选内容既要符合高职高专的特点，又要考虑到在工程实践中必须够用，因而赋予工程数学的系统性和严密性要以新的理解和认识。本书对数学结论的严密性借助图表将抽象的数学知识生动直观地表现出来就是一种较好的处理方法。

3. 强调数学知识的应用，理论与实践相结合，使学生了解工程实践中数学的应用背景，知道应用的方法，学会运用数学知识解决实际问题。因此本书的大量篇幅是数学的应用，而不是公式的推导或定理的证明。本书全部内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微积分学，无穷级数，微分方程与数学建模，线性代数，概率论简介，拉普拉斯变换，Mathematica 软件的应用及章节小结和习题解答。

参加本书编写的有鲁东大学的刘建勇(第三、四、六章及拉普拉斯变换)、刘全辉(概率论简介)、谢朋(第七章)、宋美(第一、二、四章)、王际科(Mathematica 软件),全书由刘建勇统稿、定稿。

衷心地希望广大读者对书中的不足之处给予批评与指正。

编　者

目　录

第一章　函数 极限 连续

函数是高等数学的主要研究对象，它从数量方面反映了一切客观事物之间的相互联系、相互影响. 极限理论是微积分的理论基础，微积分的重要概念几乎都是通过极限定义的，它构成了微分学和积分学的基础. 连续函数是高等数学主要讨论的函数类型. 本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函　数

一、函数的定义与性质

1. 集合

1）集合的定义

具有某种特定性质的事物的总体叫做**集合**. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 集合通常用大写的英文字母 A,B,C,D 等表示，元素通常用小写的英文字母 a,b,c,d 等表示. 用记号 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素，读作 a 属于 A；如果 a 不属于 A，记作 $a \notin A$.

一个集合，若它只含有有限个元素，则称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

例如，2007 年中国出生的人口构成一个集合，就是有限集；全体自然数构成一个集合，就是无限集.

2）集合之间的关系

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作 A 包含于 B 或者 B 包含 A.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称 A 与 B **相等**，记作 $A = B$. 例如 $A = \{-6,1\}$，$B = \{x \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$，则 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**.

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**，记为 S. 全集是相对的，一个集合在某一条件下是全集，而在另一条件下可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于有理数，则全体有理数的集合为全集；当讨论的问题包括有理数和无理数时，全体有理数的集合就不是全集.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$，空集是任何集合的子集.

常见的数集有:自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,正整数集 $\mathbf{N}^+$.

3) 集合的运算

集合有以下几种基本运算:

设 A 和 B 是两个集合,则有:

由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的**并集**,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 和 B 的**交集**,记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的**差集**,记为 $A \backslash B$,即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

全集 S 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的**余集**或**补集**,记为 A^C,即

$$A^C = S \backslash A.$$

设 A,B,C 是任意的三个集合,则集合的并、交、余运算满足下列法则:

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 对偶律　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**,记为 $U(a,\delta)$,其中,点 a 叫做该邻域的**中心**,δ 叫做该邻域的**半径**.

称集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 集合 $\{x \mid a-\delta < x < a\}$ 为点 a 的**左 δ 邻域**;同理,集合 $\{x \mid a < x < a+\delta\}$ 为点 a 的**右 δ 邻域**.

3. 常量与变量

我们在观察某一现象的过程时,常常会遇到各种不同的量,把在某个过程中变化着的量称为变量,保持不变状态的量称为常量. 如对每个具体人来说,在年龄的增长过程中,身高、体重都是变量,但器官个数是常量;再如在圆的半径增加过程中,圆的周长、面积都是变量,而其周长与直径之比却是常量(即圆周率).

常用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示变量,用字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示常量. 也就是用字母表中排在前面的表示常量,排在后面的表示变量.

4. 函数的定义

人们在考察某个自然现象或工程技术问题时,常常会遇到许多变量,这些变量之间往往

存在着某种依赖关系，这种变量之间确定的依赖关系，就是**函数关系**.

例 1　某运输公司规定货物的吨千米运价为：在 a 千米以内，每千米 k 元，超过部分为每千米 $\frac{3}{5}k$ 元. 那么运价 m 和里程 s 之间的关系可用下式表示：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\leqslant a,\\ ka+\frac{3}{5}k(s-a), & a<s. \end{cases}$$

当 s 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由此关系式可确定出 m 的相应数值.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个给定的数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 数集 D 叫做这个函数的**定义域**，也记作 D_f. 数集 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

由函数的定义可以看出，定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素，也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

若自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值仅有一个，称此函数为单值函数，否则为**多值函数**. 今后，若无特别说明，函数均指单值函数.

函数关系可用**公式法**（**解析法**）、**列表法**（**表格法**）和**图像法**来表示，其中公式法由于表达简单，易于运算和讨论，最为常用.

例 2　求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域.

解　由 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$，得

$$-2\leqslant x\leqslant 2,\text{且 } x<-1 \text{ 或 } x>1.$$

所以定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,2]$.

设函数的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标，就在 xOy 平面上确定一点 (x,y)，当 x 取遍 D 上的每一个数值时，就得到 (x,y) 的一个集合 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形. 一般说来，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形是一条或几条曲线.

5. 函数的特性

有些函数具有某些特殊性质，掌握这些性质对研究函数很有帮助.

1）有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对一切 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**有界函数**；否则，称 $f(x)$ 在 I 上是**无界函数**.

每一个具有上述性质的 M，都是该函数的界. 也就是说有界函数的界不是唯一的.

2）单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$，都有

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上为**单调增加**(或**单调减少**)**的函数**.

例如，函数 $y = x^2$ 在区间$(-\infty, 0)$内是单调减少的；在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的；函数 $y = x, y = x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内都是单调增加的.

3）奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = f(x)(\text{或 } f(-x) = -f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**).

偶函数的图形是关于 y 轴对称的；奇函数的图形是关于原点对称的.

例如，$f(x) = x^2$、$g(x) = x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数；$F(x) = x$、$G(x) = x\cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

4）周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，对任意 $x \in D$ 均有 $f(x + T) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. 并把 T 称为 $f(x)$ 的周期.

如果把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍，则它将与周期函数的其它部分图形重合.

应当指出的是，通常讲的周期函数的周期是指最小正周期.

对三角函数而言，$y = \sin x, y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而函数 $y = \tan x$，$y = \cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，而不是每一个函数都一定具备的.

二、初等函数

1. 反函数

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 W_f. 对于任意的 $y \in W_f$，在 D_f 上有唯一一个 x 与之对应，且满足 $y = f(x)$. 如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，就在 W_f 上定义了一个新的函数 $x = f^{-1}(y), y \in W_f$. 我们称这个新的函数 $x = f^{-1}(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，而把函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**.

从反函数的定义可以看到，直接函数的定义域恰好是其反函数的值域，值域恰好是其反函数的定义域. 按照对应法则 f，D_f 与 W_f 之间必须是一一对应的，所以为使函数 $y = f(x)$ 的反函数存在，只要函数 $y = f(x)$ 在 D_f 上是单调的.

直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 1　求函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数.

解　由 $y=-\sqrt{x-1}$,得

$$x=y^2+1(y\leqslant 0),$$

从而函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数为 $x=y^2+1(y\leqslant 0)$.

2. 复合函数

自由落体运动的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$,而速度 v 又是时间 t 的函数 $v=gt$,物体的动能 E 与 t 的关系 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$ 就是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与函数 $v=gt$ 复合而成的.

定义 2　设函数 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$ 在 D 上有定义,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则 y 通过变量 u 的联系而成为 x 的函数,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D,$$

称为由函数 $u=\varphi(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**,它的定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$,即 $(f\circ g)=f[g(x)]$.

注意　不是任意两个函数都可以复合成复合函数.例如 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin x-2$ 就不能复合.g 与 f 构成的复合函数 $f\circ g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域内,即 $g(D)\subset D_f$;否则,不能构成复合函数.

例如,$y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看作是 $y=\arctan u$,$u=2^v$,$v=\sqrt{x}$ 复合成的复合函数.

3. 初等函数

1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常量函数这六类函数叫做**基本初等函数**.这些函数在中学的数学课程里已经学过,简单介绍如下:

(1) 幂函数　$y=x^a$　$(a\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同,但是无论 a 取何值,幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义.当 $a\in\mathbf{N}$ 或 $a=\frac{1}{2n-1}$,$n\in\mathbf{N}$ 时,定义域为 $\mathbf{R}$.常见的幂函数的图形如图 1-1 所示.

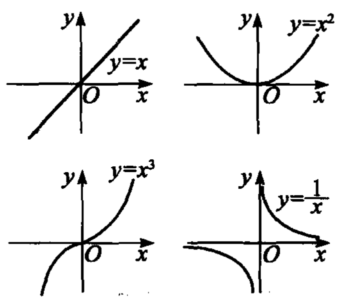

图 1-1

(2) 指数函数　$y=a^x$　$(a>0,a\neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$.指数函数的图形如图 1-2 所示.