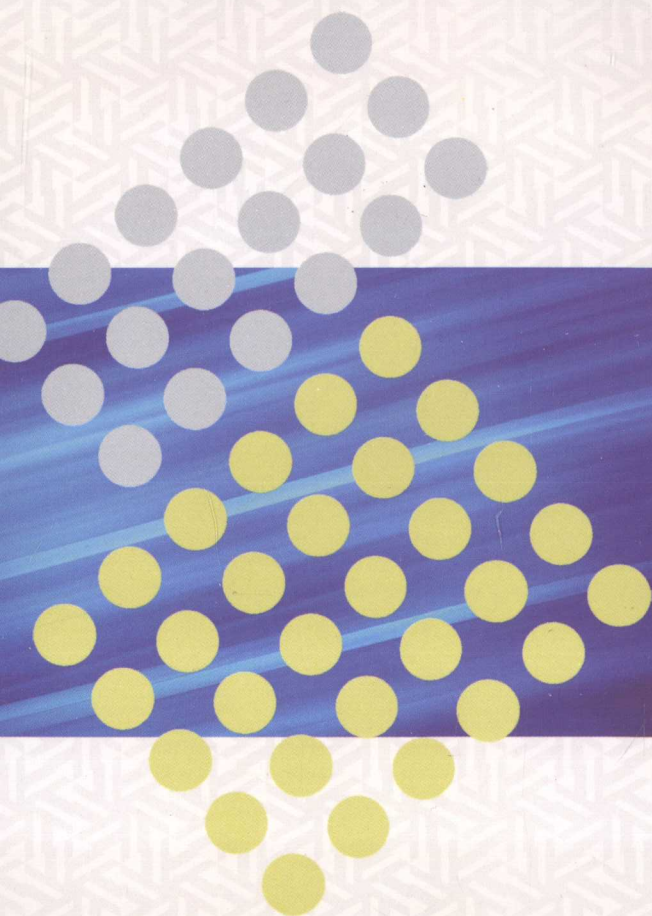


XUEXI DE GONGLI YANYI
YU JIAOXUE DE JUZHEN JIEGOU

学习的公理演绎 与教学的矩阵结构

徐宁 李冬艳 著



中国环境科学出版社

学习的公理演绎与教学的矩阵结构

徐 宁 李冬艳 著

中国环境科学出版社·北京

图书在版编目 (CIP) 数据

学习的公理演绎与教学的矩阵结构/徐宁, 李冬艳著.
—北京: 中国环境科学出版社, 2010.9
ISBN 978-7-5111-0356-7

I. ①学… II. ①徐… ②李… III. ①学习理论
IV. ①G442

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 173155 号

责任编辑 张于嫣
责任校对 尹 芳
封面设计 中通世奥

出版发行 中国环境科学出版社
(100062 北京东城区广渠门内大街 16 号)
网 址: <http://www.cesp.com.cn>
联系电话: 010-67112765 (总编室)
发行热线: 010-67125803
传 真: 010-67113405

印 刷 北京市联华印刷厂
经 销 各地新华书店
版 次 2010 年 9 月第 1 版
印 次 2010 年 9 月第 1 次印刷
开 本 880×1230 1/32
印 张 2.875
字 数 80 千字
定 价 10.00 元

【版权所有。未经许可请勿翻印、转载, 侵权必究】

如有缺页、破损、倒装等印装质量问题, 请寄回本社更换

前 言

理解和记忆，历来都是教师和学生必须面对的两个中心课题。虽然在浩瀚的教育心理学论著中，我们看到了形形色色的对理解和记忆规律的研究结论，也看到、听到、尝试了一些针对具体课程的教学方法，但是，实际的情况是，并没有什么系统的教学和学习方法在我们的课堂教学中流行起来，在每日传输的信息量巨大的大学尤其如此。究其原因，不是专家、学者和富有经验的教师们所研究和推行的方法不系统、不实用，也不是教师们不喜欢不情愿吸取和采用这些方法，因为能触动教师和学生理解和记忆神经的除了教师的直觉和魅力以外，最重要的就是知识推理的理性过程和课程体系形成的完美结构。

从知识自身的推演和组成结构去挖掘理解和记忆的有效途径不仅是教师们有意无意地采用的主要教育模式，更是历代哲学家、数学家、科学家和教育家们孜孜探究的重要内容。古希腊时期的哲人和数学家们不仅提出和严格论述了公理演绎方法，而且还为我们留下了用该方法解析几何推演结构的清晰又经典的范本——《几何原本》。16~18 世纪的科学家们伴随着近代自然科学体系的形成，为我们展示了多元丰富的知识解读方法。培根的归纳法、笛卡尔的演绎规则、伽利略的数学与实验结合法以及牛顿的分析综合法等，这些方法不仅继承和发展了古希腊的公理法，而且，在通过实验和归纳探索公理、原理和各知识领域的重要结论方面，在构造各个不同领域科学知识的微观推理和宏观框架方面进行了创新和实践，是我们从结构

和推演过程角度理解和记忆科学知识的最宝贵的工具与方法。20 世纪以来,对知识结构及其认知的探讨似乎已成为科学哲学和教育心理学专门研究的领域,其结论和方法也朝着两个完全不同的方向发展。一是从纯理性的科学基础与细部的严格推演入手追求绝对完备的严密性和逻辑性,如由哥德尔不完备定理引发的相对真理理念和波普的证伪主义方法;二是依照统计规律和实验结论去发现大脑与知识的形成和结构间的匹配特征,如联结主义学习理论、认知结构方法和结构间的建构主义等。

虽然从古至今,解析知识结构的方法名目繁多,但是,如果按照历史的轨迹细细揣摩,不难分析出贯穿于各种方法始终的主线,那就是最经典和最有效的公理演绎法和人类与生俱来的分类能力。无论是古希腊的公理法原型,还是近代科学方法中的实验法和归纳法,无不都以寻找普世认同的公理和物质世界自然规律的前提为出发点。当前提或假设正确时,演绎法就会显示出唯一有效的推理作用。而现代的科学方法对知识结构的解析则一方面是基于严格的演绎推理;另一方面可以理解为基于统计和实验的公理演绎法。

分类技术因其具有简单、直观等特点而成为我们常常无意识地会使用的方法,也正是因为这样,对分类技术的研究很难受到重视。20 世纪以来,出于对鉴定区别的需要,分类技术在生物领域的研究中得到发展,特别是自教育心理学家布鲁纳将不同水平的分类能力纳入认知结构范畴以来,分类技术得到较为广泛的应用,并在网络信息检索速度的提高和知识结构的快速解析方面发挥了重要作用。分类不再只是以鉴定为目的,在基于效率的信息排序和知识结构的演绎推理方面,分类技术日益得到学者和专家们的认可。

围绕公理演绎方法和分类技术两条主线,本书第一章简要叙述了科学方法发展的历史概况和各个时代的特点。第二章至

第四章在展示公理演绎方法发展历程的基础上，重点论述了公理方法普遍化的特点、规则和主要步骤，提出并分析了以公理演绎普遍化为基础的线性和矩阵教学结构的概念和思路，以及运用这一思想解析知识结构的具体过程，并以线性代数课程为例进行了具体的应用示范。第五章至第七章则以分类和分类技术为主题，阐述了分类的目的、特点、应用前景和分类的基本过程，并以行列式计算为例具体解读了基于效率的分类技术的主要步骤。

近几年，学生们对教学水平和教学效率的要求在不断提高，我们在教学过程和许多学生进行了多次的交流和座谈，发现学生们对于教学和学习中反映出的热点难点主要集中在理解和记忆效率问题上。带着这些问题，我们开始注意流行的教学方法、科学史、科学哲学以及教育心理学的相关重要结论及其影响程度。学习科学史、科学方法论和教育心理学专著开阔了我们的视野，研究的主线也逐渐清晰，本书就是我们的学习体会和感受。

本书是一本关于科学方法论和知识结构解析过程的读物，它的对象是教师、学生以及继续教育过程中的各类工程技术人员，但愿本书对于对科学方法论以及理解与记忆效率感兴趣的读者有所收益和启发。鉴于作者本人的专业不是哲学和教育心理学，所以，在书中个人观点难免有偏颇和失当之处，真诚地希望能得到专业人士和读者的不吝赐教与批评指正。

作 者

2010年4月于济南

目 录

第一章 导 言	1
参考文献	6
第二章 《几何原本》及其公理演绎方法	7
2.1 亚里士多德及其逻辑学	8
2.2 欧几里得及其《几何原本》	9
2.3 笛卡尔及其演绎规则	10
2.4 《几何原本》的贡献与评价	13
2.5 公理演绎方法	14
2.6 欧几里得的公理演绎方法	17
2.7 公理演绎方法的典型实例	18
2.8 教学与学习理论的公理与定律	19
参考文献	22
第三章 基于公理演绎方法的矩阵教学结构	24
3.1 教学结构的概念	25
3.2 教学结构的设计原则	26
3.3 线性结构与矩阵结构	28
3.4 线性与矩阵教学结构的心理学启示	29
3.5 线性与矩阵的教学结构设计应用实例	31
参考文献	35

第四章 线性代数课程内容的演绎结构分析	36
4.1 行列式	36
4.2 矩阵及其运算	38
4.3 向量	44
4.4 线性方程组	46
4.5 特征值、特征向量与相似性	48
4.6 二次型	50
第五章 分类与分类技术	52
5.1 分类与分类学概念	52
5.2 分类的目的和意义	54
5.3 分类的特点	56
5.4 分类技术	58
参考文献	61
第六章 分类学习与教学	62
6.1 分类对学习的影响	62
6.2 分类的原则	63
6.3 分类的基本过程	64
第七章 基于分类的行列式计算	68
7.1 行列式计算分类的目标和依据	68
7.2 确定分类结构	69
7.3 寻找并归纳分类特征	70
7.4 确定类目名称	81
7.5 类目排列	82

第一章

导 言

教学与学习的效率一直是教师和学生们共同议论的中心话题，尤其是在新课程不断涌现、知识量日益膨胀的今天，这一问题更是备受关注。为提高教学和学习的效率，我们正在尽一切可能寻找正确的方法，而挖掘历史探索普遍意义上的科学方法则是指导我们提高效率的捷径之一，因为在探索认知知识的方法方面，历代哲人和科学家给我们留下了极为宝贵的财富。

在诸多的科学史书籍中，我们看到，各知识领域的形成特征不只表现在人类所获得的科学成果上，还体现在为获得这些成果所使用的方法上。正因为如此，在历代的哲学家、科学家中，有许多人都把一般方法论的探索和总结作为他们研究的重要内容。在名目繁多、类属林立又充满智慧和奇迹的各种思维方法中，有些方法备受历代学者推崇，久经推演并成为经典。尤其是那些能够成为经典并且现在仍然在我们的知识组成的框架中占有主流地位的思维方法，如公理演绎方法和归纳法，对于启发我们正确理解知识，提高记忆效率至关重要。

获取知识的思维方式自然地应与它的推理演绎方式相匹配，而科学知识推理的思维方式在不同的历史时期具有不同的特点。古希腊的思想家们坚信可以通过逻辑论证的方式获取知识，因而在苏格拉底、柏拉图那里我们就发现了有关推理方式的某些概念，其中包括公理演绎的思想。公理演绎方法是由亚里士多德首先提出的，他把希腊人追求的从不证自明的公理出发，推理演绎出一个完整的知

识体系的梦想严格地逻辑化了。但是,真正实现这一梦想的是欧几里得及其《几何原本》。《几何原本》是公理演绎方法的典范,它将这一方法展现得如此清晰,以至于历代哲人和科学家们都将公理演绎法作为解读知识体系的最有效的方法之一。

如果说雅典的文化繁荣为古希腊时期的数学及其科学成就提供了精神和智慧营养的话,那么意大利文艺复兴的思想文化运动同样也为近代自然科学和科学方法论的诞生创造了非常有利的文化氛围。16~18世纪不仅产生了自然科学,而且也产生了近代自然科学的方法论。笛卡尔是发展公理演绎方法并将之普遍化的代表人物。他推崇理性,反对繁琐和僵化的教条主义,提出并倡导唯理论的演绎方法,强调他的演绎法的简单性、清晰性和明了特点,他所推行的思维准则至今在我们的学习、教育和科学研究活动中发挥着重要作用。英国政治家、哲学家培根以其名言“知识就是力量”为我们熟知。他热情地支持科学观察和实验,倡导把学者的风格和工匠传统融为一体以推进经验与理性的结合。他创立了归纳法,提出只要大量搜集事实,提出假设,进行检验,归纳概括,就可以在事实的基础上建立起科学理论的金字塔。培根的归纳两原则对我们循序渐进地学习科学知识尤为重要,一是需要放弃所有先入为主的偏见重新从头开始;二是暂时不要企图上升到一般结论或接近它们。培根的归纳法强调了经验与理论紧密结合,突出了逐步归纳概括的重要性。归纳法作为探索科学事实、寻找公理和真理的有效方法在培根这里得到了明确又系统的确立和推广。

伽利略是观察实验和数学论证相结合的方法论的创立者。他既重视实验事实,又十分强调运用推理把自然过程加以纯化和简化,并将寻找事物本质的数学关系作为科学研究的重要目标。伽利略对科学方法的最重要的贡献是他提出的科学研究的经典方法:即在观察实验的基础上,经过推理和计算对现象提出假设性的说明和定量描写,并用数学公式表示出来,然后再用实验方法去检验推理的结果是否正确。这种方法既包含了从具体到一般的归纳过程,又有从结论到前提的演绎推理,可以认为它是公理法和归纳法两种思维方

式的巧妙组合。我们在牛顿对科学方法的论述中同样看到了两种思维过程高度融合的智慧。牛顿发展了从经验事实概括为自然原理的方法，提出在研究困难的事物时，总是应当先用分析的方法，然后才用综合的方法。分析的方法包括通过实验观察，用归纳法概括出普遍结论；而综合的方法则是假定结论已经具备，并将它们立为原理或者公理，再用这些原理去解释由它们发生的现象，并证明这些解释的正确性。一般认为，牛顿的力学定律是归纳法的杰作，而他的《自然哲学的数学原理》则是公理演绎方法的范本。

20 世纪是现代科学技术空前发展的一段时间。其间人类经历了两次世界大战的痛苦，同时也体验了科技进步带来的观念的改变和生活质量的提高。“相对论”、“量子力学”构成了现代科学技术的两大理论支柱，以控制论、信息论、系统论和非线性科学、自组织理论、混沌理论为代表的科学思想不仅使人们对自然界和人类本身的观念发生了根本的转变，而且也将科学的方法论的研究带入了一个崭新的境界。

量子理论认为，系统和单个粒子都服从统计规律，微观粒子具有自由意志，因此，在对微观世界的描述中，“机遇是基本概念，统计规律是基本规律”。当用微观结论解释宏观现象在许多领域获得成功之后，概率思维和统计规律似乎已成为科学理论的基础和重要的思维模式之一。至此，基于统计的公理演绎和归纳就具备了更为普遍的意义，它们的适用范围也日益扩大，归纳的结论不再要求绝无反例，而演绎推理依然需要严格的逻辑过程。无论如何，公理演绎法和归纳法作为获取知识的基本方法已在自然科学和社会科学的各个领域得到广泛应用。

20 世纪以来，随着专业的进一步细分和教育心理学逐渐成为一门系统完整的科学体系，当代科学方法的研究似乎逐渐成为科学哲学家们独立研究的领域，而传统的科学方法也逐渐成为了教学论和学习理论进行研究和开发的主要方法。在自然科学方法的论述中，最有影响力的当属波普的“证伪主义理论”和库恩的“范式理论”。波普认为，科学假设只是一种推测，它可能经历过很多严格和精密

的论证,但是只要有一个反例就可以拒绝它;因为自然科学定律不允许存在例外,而不能被“证伪”的科学假设应该被排除在科学之外。证伪主义理论对于我们认识知识的过程来说,其重要性在于它的假设的演绎过程。波普认为,在获取关于世界知识的过程中,我们并不从特殊事例中作出概括,而是运用我们的想象力推测结论,然后再看我们的猜测是否会经受住经验的检验,科学知识的获取就是一个从假设到演绎的过程。

库恩(T.Kuhn)为解释科学思想的转变提出了科学发展动态模式的“范式理论”。他的范式概念可概括为“哲学范式”、“社会学范式”和“构造范式”三种类型。库恩的“构造范式”实际上指知识体系的“图景”和“模型”,这种思想把具体性和直观性看做是科学方法的基本特性。虽然范式理论强调它不同于归纳法和演绎理论,更不同于假设演绎主义和证伪主义理论,但是,从构造范式的图景的基本内容我们可以看出,获取范式的基本过程实际上既包括了得到公理和假设的归纳方法,又涵盖了由推理得出结论的演绎方法。也就是说,库恩实际上并不拒绝归纳和公理演绎,只是更加强调了信念和统一意志的作用。

教育心理学自诞生以来,就一直将教学和学习理论的研究作为自己的中心内容。毫无疑问,多数教学和学习理论的代表人物都深受传统的科学方法论的影响。在各阶段的教学论和学习理论的探讨中,我们看到了形形色色的从归纳得出的公理。桑代克是以行为主义为基础的联结主义学习论的倡导者,他的公设是:“人是一个生物的存在”。杜威的学习理论以实用主义为基础,他奉行的信条是“从做中学”。认知结构学习理论的代表人物布鲁纳认为学习是一个学习者主动的过程,而人类具有归类的能力则是不言自明的公理。建构主义教学理论成果丰硕,派别林立,但是他们都强调一个共同遵守的重要信念,即“为理解而教”。值得注意的是,无论是行为主义、实用主义,还是认知主义或建构主义,有一个方法一再得到使用和推崇,这就是分类方法。虽然分类能力作为人类与生俱来的本能不容易受到学者们的重视,但是教育心理学家们多数都在有意

无意地对教学和学习规律进行分类。行为主义教学观认为强化是学习的关键,斯金纳在桑代克理论的基础上精细地研究了强化的机制和原则,并将强化程序性地分为连续强化、定时强化、定比强化、变时强化和变比强化 5 个类别,这种分类随即成为行为主义程序教学的主要方法依据。倡导并主张信息加工模式的加涅是认知主义教学论的代表人物之一,他的最有影响的学习理论是其基于学习结果的分类。他将学习分为言语信息、智慧技能、认知策略、态度和运动技能 5 个类别,更具体的研究则导致了他依照学习水平的不同阶段提出的 6 个类别,即连锁学习、辨别学习、具体概念学习、定义概念学习、规则学习和解决问题学习。奥苏贝尔则从认知结构的角度出发,依据学习的性质和形式对学习进行了两个维度的分类,一个维度是按照学习进行的方式分为接受学习和发现学习;另一个维度则是依据学习内容与学习者原有知识的关系将学习分为机械学习和有意义学习 2 个类别。建构主义学习论者重视知识结构对学习者的影响,他们将知识分为结构良好领域的知识、结构不良领域的知识和复杂结构的知识 3 个类属,依照知识的类属特性,他们进一步将学习分为初级知识的获取、高级知识的获得和专门知识的学习 3 个不同层次的分类。就重视的程度而言,对分类能力最情有独钟的当属布鲁纳。布鲁纳不仅认为人类具有归类能力是不证自明的公理,而且他还强调认知的过程实际上就是将吸取的知识进行归类,并根据类属特征和与其他相关类别的关系进行推理的过程,而“归类—推理—再分类”这一过程正是对布鲁纳认知结构形成思想的绝好解读。

纵观科学方法论的发展过程,有一条从绝对理性到相对理性,再到非理性,从追求确定性到不确定性再到确定与不确定相互融合共存的逻辑发展线索。古典的和传统的思维方式把科学理论和科学方法均视为理性的内容,认为科学知识体系的形成所依据的是公理假设和归纳方法,理论的证明和检验所依据的是演绎和观察实验。现代科学哲学的研究则修正了这种观念,认为知识的发现和学习过程既具有理性成分,又有非理性的联想、灵感和直觉;科学知识的

传授和获取不只是认知的过程，更是以一种信念和意志为基础。现代方法论已发展到不承认有普遍意义的规范性方法和规则的阶段，但同时，它又为我们提供了一个理解和记忆知识的逻辑分析工具，这种工具要求我们对传授和学习的知识内容进行直观上的分类和界定，在此基础上进行建构，即把不同类别的内容进行归纳假设和演绎推理，再把不同的类属知识组合起来，从而使各类属内容明晰化和系统化。其过程可概括为：直观—分类—公理演绎和归纳假设—系统化，其中的基于公理演绎方法的教学与学习结构和基于效率的分类技术就是本书所要论述的重点内容。

参考文献

- [1] J. M. 鲍亨斯基. 当代思维方法[M]. 童世骏, 等, 译. 上海: 上海人民出版社, 1987.
- [2] 胡显商, 曾国屏. 科学技术概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [3] 王玉仓. 科学技术史[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1993.
- [4] 陈洪. 科学的沉思和沉思的科学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2008.
- [5] 杜德宏. 科学思想史[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1985.
- [6] 苗力田. 亚里士多德全集(一)[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.
- [7] 玛格丽特·马斯特曼. 范式的本质[M]. 周寄忠, 译. 北京: 华夏出版社, 1981.
- [8] 陈琦, 刘儒德. 当代教育心理学[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2007.
- [9] 王荣江. 未来科学知识论[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2005.

第二章

《几何原本》及其公理演绎方法

“公理”一词源于希腊文 $\alpha\lambda\epsilon\tau\omega$ ，它表示一种肯定性评价，在具体的应用领域，它是对有效性认可的前提。公理的提出和运用与古希腊几何学发展紧密相关，古希腊从柏拉图时代起，数学上就要求根据一些公认的原理作出演绎证明，随后，它便成为数学研究中的一个基本准则。演绎证明是以其正确性已经是众所周知的理论陈述，或者以在一个既定的理论体系中被视为正确的公理为出发点，并以它们为根据，借助于逻辑的最终规则，构成一系列陈述，而这些陈述的最后是可以被论证的命题。且每一个相继产生的陈述必须按照最终规则从前一个陈述中产生。据说，公理法首先是由亚里士多德提出，并将它作为一切演绎科学公设的基础方法。在亚里士多德的理论中，公理是作为原则的陈述提出的，在原则的基础上推导出其他的命题或者陈述。因此，公理方法可以解释为：某一领域的知识或者说基础内容可以被分成两类：一类为公理；另一类为导出命题，它是通过公理演绎产生出来的。公理演绎方法虽由亚里士多德提出，并试图作为一切科学知识陈述的基本方法，但是，实际上，长期以来它一直应用在数学领域，其中的典范是欧几里得及其《几何原本》。直到 17 世纪，哲学家、数学家笛卡尔提出了演绎规则，将其应用到哲学层面，为公理演绎法的普遍化和进一步发扬光大铺平了道路。

2.1 亚里士多德及其逻辑学

亚里士多德生于古希腊思想创造的末叶，大约 18 岁时他来到雅典做了柏拉图的学生，在学园里他一直居留了近 20 年，直到公元前 348—347 年柏拉图逝世为止。公元前 342 年，亚里士多德被阿克塔斯二世之子——国王飞利浦二世召去教 13 岁的亚历山大读书，因此，他在马其顿居住了 7 年之久。公元前 336 年，亚历山大三世登位，亚里士多德随后回到雅典，并建立了“吕克昂学园”，创立了以他为首的“逍遥学派”，依靠他与亚历山大大帝的师徒关系获得了大量资助，他手下有数千人遍布亚洲和希腊各地为他的研究收集资料。公元前 323 年，亚历山大大帝去世，曾为亚历山大教师的亚里士多德也随之遭到反对派的攻击，他只身逃回家乡，也失去了苦心收集的各种标本、书籍和研究书稿，由于极度失望，于次年饮毒而死。

亚里士多德对科学文化等许多方面都有所研究，撰写过逻辑学、物理学、天文学、动物学、心理学、伦理学、政治学、诗学等著作达 170 部，被认为是当时学识最渊博的人。在科学史上记载着他的许多贡献，例如，他和他的学生将生物按等级分成植物、动物和人，对约五百种动物有比较详细的记录，对其中几十种动物做了解剖，并且进行了初步的分类，这是动物学方面的首创性工作。他还根据月食时地球在月球上的投影形状论证了地球是球形的等理论。

亚里士多德在历史上最为著名、影响最大的是他的逻辑学成果。在古希腊末期，亚里士多德已经在逻辑学方面是公认的权威了，即使到了文艺复兴时期，他在逻辑学上仍然保持着至高无上的地位。德国思想家康德把亚里士多德的逻辑学定名为“形式逻辑”。亚里士多德逻辑学源自古希腊盛行的辩论术，但是最主要最直接思想源泉还是来自古代科学中最为发达的学科——数学。在其著作《分析篇》中，亚里士多德显然吸收了古代数学的思维方法。亚里士多德是熟悉几何学的，他关于科学证明的一些论述正是从几何学的证

明中抽象出来的。而后来著名的数学家欧几里得总结人们已积累起来的大量几何学知识，于公元前三世纪撰写《几何原本》一书时，又明显地运用了亚里士多德的逻辑方法，把几何学整理成一个相当严密和完整的逻辑演绎体系。亚里士多德在逻辑学上最重要的贡献就是“三段论”，但其运用的最重要的方法就是公理演绎法。他认为公理演绎法是知识的主要来源，而数学则完全是演绎的，一切演绎的推论如果加以严格地叙述便都是三段式的。在亚里士多德看来，“三段论”就是演绎推理，而除了演绎推理之外，只有通过归纳推理才能得到知识。他在《分析篇》中指出：“我们无论如何都是通过证明获得知识的，我所谓的证明是指产生科学知识的‘三段论’。所谓科学知识，是指只要我们把握了它，就能据此知道事物的东西。”他在《论题篇》中指出：“推理是一种论证，其中有一些被假设为前提，另外的判断则必须由它们发生。当推理由此出发的前提是真实的和原初的时……这种推理就是证明的。”亚里士多德明确提出证明三要素：一是有待于证明的结论；二是公理（公理是证明的基础）；三是载体性的种及其规定及依据自身的属性由证明揭示。亚里士多德不仅系统地建立了第一个逻辑理论，而且发展了推理证明方法论的诸多观念，包括公理系统的观念。由亚里士多德提出的公理方法被用于许多领域，其中最成功的、影响最长久的是欧几里得及其《几何原本》。

2.2 欧几里得及其《几何原本》

古希腊后期，学术中心转移到古埃及的亚历山大城，古希腊数学的最后成果是在这里总结和完成的。亚历山大时期大数学家之一是欧几里得（前 323—前 235 年）。据说他早年曾在雅典受过教育，深知柏拉图的几何学。公元前 300 年左右，在托勒密王的邀请下来到亚历山大城，从事教学和研究工作。他是一位温良敦厚的教育家。关于他的生平，人们知之甚少，但关于他的两个故事却很有启发意义。一个故事说，国王托勒密曾向欧几里得询问学习几何学的捷径，