GAODENG SHUXUE
TONGBU FUDAO

高等数学
同步辅导（下）

配同济•第六版

主编 张天德 窦 慧
主审 吴 臻

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

GAODENG SHUXUE TONGBU FUDAO

高等数学

同步辅导（下）

配同济•第六版

主　编　张天德　窦　慧

主　审　吴　臻

副主编　左进明　叶　蕊

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步辅导. 下 / 张天德，窦慧主编. —济南：山东科学技术出版社，2010
ISBN 978-7-5331-5591-9

I. 高… II. ①张…②窦… III. 高等数学－高等学校－教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第026414号

高等数学同步辅导
（下）

主编 张天德 窦 慧

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：（0531）82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：（0531）82098071
印刷者：山东信诚印务有限责任公司
地址：济南市华山工业园
邮编：250011 电话：（0531）86984599

开本：720mm×1020mm 1/16
印张：24.5
版次：2010 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978－7－5331－5591－9
定价：33.00 元

前 言 QIANYAN

高等数学
同步辅导

高等数学是理工类专业的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为帮助读者学好高等数学，我们编写了《高等数学同步辅导》，该书与同济大学数学系主编的《高等数学》（第六版）配套，它汇集了编者几十年的丰富经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，本书将会成为读者学习《高等数学》的良师益友。

该书章节的划分和内容设置与同济大学的《高等数学》（第六版）完全一致。每节内容由三部分组成：一、主要内容归纳；二、经典例题解析及解题方法总结；三、教材习题解答。每章最后还有两部分内容：总习题解答及自测题与参考答案。

主要内容归纳：该部分对每节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，并对较易出错的地方作了适当的解析。

经典例题解析及解题方法总结：列举每节不同难度、不同类型的重点题目，给出详细解答，以帮助读者理清解（证）题思路，掌握基本解（证）题方法和技巧；解题前的分析和解题后的方法总结，可以使读者收到举一反三，融会贯通之功效。

习题解答：每节与每章后都给出了与教材内容同步的习题解答，利用它读者可自行检查学习效果。

自测题是编者从多年教学及考研辅导中精心挑选的典型题目。目的是在读者对各章内容有了全面了解之后，给读者一个检测、巩固所学知识的机会，从而使读者对各种题型有更深刻的理解，并进一步掌握所学知识点，做到能灵活运用。

本书由张天德、窦慧主编，左进明、叶蕊副主编，山东大学吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。山东大学数学学院部分教师、清华大学张锋、中国科学技术大学刘志刚也作了一定的校正工作，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不足之处敬请读者批评指正，以便不断完善。

编　者

2009.12

目录 MULU

高等数学 同步辅导

第八章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何与平面解析几何的思想方法类似，都是用代数方法研究几何问题，其重要工具就是向量代数. 众所周知，平面解析几何的基础对于一元微积分是至关重要. 同样，空间解析几何的知识对于多元微积分的学习也是必不可缺的. 本章首先引进向量的概念和一些运算，然后讨论空间曲面和曲线的一般方程以及二次曲面的特性，再利用向量的运算建立空间的平面和直线方程.

第一节 向量及其线性运算

一、主要内容归纳

1. 向量

(1)定义 既有大小又有方向的量叫做向量.

(2)向量的表示 用有向线段来表示向量，记为$\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$表示以 A 为起点，以 B 为终点的向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段所指的方向表示向量的方向. 当向量定义为有向线段时，它只具有长度和方向两要素，与起点无关. 向量可用 $\boldsymbol{a}$ 表示.

(3)向量相等 大小相等方向相同的向量称为相等向量.

(4)向量的模 向量的大小称为向量的模，记为$|\boldsymbol{a}|$.

(5)单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量.

零向量 模等于 0 的向量称为零向量，其方向是任意的.

负向量 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$.

(6)平行向量 若两个非零向量方向相同或相反，就称这两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(7)向量的坐标 将 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合，则 $\boldsymbol{a}$ 的终点的坐标(x,y,z)称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为(x,y,z)，并且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，则向量$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

(8)方向角与方向余弦 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox,Oy,Oz 坐标轴的三个夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

故 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，且$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\boldsymbol{e}_a$，$\boldsymbol{e}_a$为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

(9)向量在轴上的投影 设 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角为 φ，则$|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，记

为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a})_u$.

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi,\quad \mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2,\quad \mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}.$$

在空间直角坐标系中，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 (x,y,z) 是 $\boldsymbol{a}$ 向各坐标轴的投影. 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成分量形式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

2. 向量的线性运算

(1)加减法运算

向量加法运算服从平行四边形法则或三角形法则. 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$.

(2)数乘运算

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

若 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；若 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意.

(3)运算律

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $\lambda(u\boldsymbol{a})=u(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda u)\boldsymbol{a}$,

$(\lambda+u)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,（其中 λ,u 为任意实数）

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 求点 (x_1,y_1,z_1) 关于(1) xOy 面；(2) z 轴；(3)坐标原点；(4)点 (a,b,c) 对称的点的坐标.

解 设所求对称点的坐标为 (x_2,y_2,z_2)，则

(1) $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, $z_1+z_2=0$，即所求点的坐标为 $(x_1,y_1,-z_1)$.

(2) $x_1+x_2=0$, $y_1+y_2=0$, $z_1=z_2$，即所求点的坐标为 $(-x_1,-y_1,z_1)$.

(3) $x_1+x_2=0$, $y_1+y_2=0$, $z_1+z_2=0$，即所求点的坐标为 $(-x_1,-y_1,-z_1)$.

(4) $\dfrac{x_1+x_2}{2}=a$, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=b$, $\dfrac{z_1+z_2}{2}=c$，即所求点的坐标为 $(2a-x_1,2b-y_1,2c-z_1)$.

【例 2】 已知三角形 ABC 的两个顶点为 $A(-4,-1,-2)$, $B(3,5,-16)$，并知道 AC 的中点在 y 轴上，BC 的中点在 xOz 平面上，求第三个顶点 C 的坐标.

解 设 $C(x,y,z)$，由 AC 的中点在 y 轴上，有

$$\frac{x-4}{2}=0,\qquad \frac{z-2}{2}=0.$$

由 BC 的中点在 xOz 平面上，有 $\dfrac{y+5}{2}=0$.

解得 $x=4$, $y=-5$, $z=2$，故 $C(4,-5,2)$ 即为所求.

【例 3】 设 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$ 是空间两点，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦与方向角并求出与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$.

方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\qquad \cos\beta=\frac{1}{2},\qquad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

方向角为

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\qquad \beta=\frac{\pi}{3},\qquad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【例 4】 设 $\boldsymbol{a}=(4,5,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,6)$，求 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 及 $\boldsymbol{b}^\circ$ 的方向余弦.

解 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，因此

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{(4,5,-3)}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}=\left(\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}},\frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

同理可得 $$\boldsymbol{b}^\circ=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{(2,3,6)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).$$

从而，$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$，$\cos\beta=\frac{3}{7}$，$\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

【例 5】 用向量的方法证明：三角形的中位线平行于底边，且它的长度等于底边的一半.

证明 设$\triangle ABC$ 中，D,E 分别为 AB,AC 的中点，如图 8－1.

$\because\ \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，

$\therefore\ \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，

即$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

故$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，结论得证.

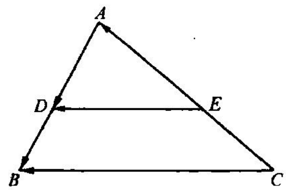

图 8－1

三、习题 8－1 解答

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解：$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证：设四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$相交于 M，且$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$.

$\because\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$. $\therefore$ $ABCD$ 是平行四边形.

3. 把$\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量$\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

解：$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_1}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{c}-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_2}=-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{c}-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_3}=-\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{c}-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_4}=-\overrightarrow{AB}-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{c}-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解: $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,-2)$, $-2\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解: $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$

$\therefore\ \boldsymbol{e}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\right).$

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$A(1,-2,3)$; $B(2,3,-4)$; $C(2,-3,-4)$; $D(-2,-3,1)$.

解: A:Ⅳ B:Ⅴ C:Ⅷ D:Ⅲ

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$A(3,4,0)$; $B(0,4,3)$; $C(3,0,0)$; $D(0,-1,0)$.

解: 在 yOz 面上,点的横坐标 $x=0$;

在 zOx 面上,点的纵坐标 $y=0$;

在 xOy 面上,点的竖坐标 $z=0$.

在 x 轴上,点的纵、竖坐标均为 0,即 $y=z=0$;

在 y 轴上,点的横、竖坐标均为 0,即 $z=x=0$;

在 z 轴上,点的横、纵坐标均为 0,即 $x=y=0$.

A 在 xOy 面上,B 在 yOz 面上,C 在 x 轴上,D 在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

解: (1)关于 xOy、yOz、zOx 面的对称点的坐标分别为 $(a,b,-c)$,$(-a,b,c)$,$(a,-b,c)$;

(2)关于 x、y、z 轴的对称点的坐标分别为 $(a,-b,-c)$,$(-a,b,-c)$,$(-a,-b,c)$;

(3)关于坐标原点的对称点的坐标为 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解: xOy 面: $(x_0,y_0,0)$, yOz 面: $(0,y_0,z_0)$,

zOx 面: $(x_0,0,z_0)$.

x 轴: $(x_0,0,0)$, y 轴: $(0,y_0,0)$, z 轴: $(0,0,z_0)$.

如图 8-2 所示.

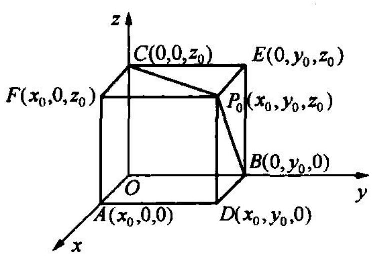

图 8-2

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解: 过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0;

过 P_0 且平行于 xOy 平面上的点具有相同的竖坐标 z_0.

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

解:如图 8—3 所示,各顶点的坐标分别为:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$, $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$,

$\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$,

$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$, $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

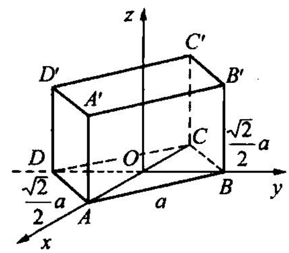

图 8—3

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解:点 M 到 x 轴的距离:$r_x=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$,

点 M 到 y 轴的距离:$r_y=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$,

点 M 到 z 轴的距离:$r_z=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解:在 yOz 面上,设点 $P(0,y,z)$ 与 A、B、C 三点等距离,即 $|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$

故 $\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases}$

解方程组,得 $y=1$, $z=-2$.

故所求点为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证:$\because |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

从而,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1,M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解:$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=2$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-\sqrt{2},1)=2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore \cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{3}{4}\pi$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1)$\cos\alpha=0$;(2)$\cos\beta=1$;(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解:(1)当 $\cos\alpha=0$ 时,向量与 x 轴垂直,平行于 yOz 面;

(2)当 $\cos\beta=1$ 时,$\beta=0$,则向量与 y 轴正向一致,垂直于 zOx 面;

(3)当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时,则 $\cos^2\gamma=1$. 故 $\gamma=0$ 或 π,此时向量平行于 z 轴,垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解：$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\theta=4\cdot\cos60°=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解：设起点 A 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$.

由题意，得 $2-x=4$，$-1-y=-4$，$7-z=7$，$\therefore x=-2$，$y=3$，$z=0$.

故起点 A 为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解：$\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$.

则 $a_x=13$ 且 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

第二节　数量积　向量积　*混合积

一、主要内容归纳

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$.（$x_i,y_i,z_i$ 不全为 0，$i\neq1,2,3$）

1. a 与 b 的数量积

(1)定义　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2)坐标表示　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

(3)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影　$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{\circ}$.

(4)$\boldsymbol{a}$ 的模　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(5)　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

(6)运算律　交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为实数）.

2. a 与 b 的向量积

(1)定义　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可构成右手系.

(2)坐标表示　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$.

(3)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\lambda$ 为实数）.

(4)运算律　负交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为实数）.

3. $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积

(1)定义 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

(2)坐标表示 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

(3)交换法则 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]$

(4)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ________.

解 利用数量积的运算规律和单位向量的概念求解

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\&=3+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$.

故应填 $-\dfrac{3}{2}$.

【例 2】 已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{10}$ 及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ $=$ ________.

解 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\{3,1,-2\}$ 知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=14$，另一方面

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\&=28+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}(14-28)=-7$.

故应填 -7.

【例 3】 已知向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+a_x\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，则当 $a_x=$ ________ 时，$\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow 4a_x+3a_x-28=0$.

所以 $a_x=4$.

故应填 4.

【例 4】 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 平行，且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=7$，则向量 $\boldsymbol{x}=$ ________.

解 设 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$，由 $\boldsymbol{x}/\!/\boldsymbol{a}$ 得 $\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{x_2}{-1}=\dfrac{x_3}{3}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=7$，得 $2x_1-x_2+3x_3=7$，解得

$$x_1=1,\quad x_2=-\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{3}{2}.$$

所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{i}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{j}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{k}$.

故应填 $i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$.

【例 5】 设 $a=i+j, b=j+k$，且三向量 a、b 和 c 长度相等，两两的夹角相等，求 c.

分析 向量 c 的模容易计算，但其方向却难以确定；因此，我们改用计算坐标的办法来确定向量 c.

解 设 $c=\{x,y,z\}$，由题意有

$$x^2+y^2+z^2=2, \qquad ①$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{2}, \qquad ②$$

$$\frac{y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{2}. \qquad ③$$

将①式代入②、③式得 $\begin{cases}x+y=1\\y+z=1\end{cases}$，再与①式联立解得

$$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{4}{3}\\z=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

于是 $c=\{1,0,1\}$ 或 $\left\{-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right\}$.

【例 6】 设 $(a\times b)\cdot c=2$，则 $[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$________.（考研题）

解 原式 $=[a\times b+a\times c+b\times c]\cdot(c+a)$

$$=(a\times b)\cdot c+(a\times c)\cdot c+(b\times c)\cdot c+(a\times b)\cdot a+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot a$$

$$=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a=2(a\times b)\cdot c=4.$$

故应填 4.

方法总结：

本题综合考查向量的数量积、向量积及混合积的定义，直接利用其运算性质可得结果. 有关混合积的性质为

$$(a\times b)\cdot c=(c\times a)\cdot b=(b\times c)\cdot a$$

其中混合积中的三个向量若有两个向量是重合或平行时，则其混合积为零.

【例 7】 已知 $a=i, b=j-2k, c=2i-2j+k$，求一单位向量 m，使 $m\perp c$，且 m 与 a、b 共面.

解 设所求向量 $m=(x,y,z)$，依题意，有

$$|m|=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1,\quad m\perp c\Rightarrow m\cdot c=0\Rightarrow 2x-2y+z=0,$$

m 与 a、b 共面 $\Rightarrow [m,a,b]=0$，即 $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=2y+z=0.$

以上三式联立，解得 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}, z=-\frac{2}{3}$，或 $x=-\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=\frac{2}{3}$.

所以 $\boldsymbol{m}=\pm\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

【例 8】 设 a 是非零向量,计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{x\cdot2|\boldsymbol{a}|}=2\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

【例 9】 以向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$ 为边的三角形的面积为________,其中 $|\boldsymbol{m}|=5$, $|\boldsymbol{n}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{6}$.

解 设三角形面积为 A,则 $A=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$,而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})\times(\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-6\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\\&=0+3\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-0=5\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m},\end{aligned}$$

因此 $A=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{5}{2}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}|=\frac{5}{2}|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|\sin(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}})=\frac{75}{4}$.

故应填 $\frac{75}{4}$.

三、习题 8—2 解答

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$; (3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解:(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$, $\boldsymbol{a}\times(2\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解:$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$.

而 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\xlongequal{\text{交换律}}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$

$=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot(-\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c})^2=-|\boldsymbol{c}|^2=-1$.

同理 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-1$, $\therefore 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=-3$.

故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解:记与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量为 $\pm\boldsymbol{e}^\circ$.

$\because\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1)$, $\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$,

$$\therefore\ \boldsymbol{e}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

$$\therefore\ \pm\boldsymbol{e}^{\circ}=\pm\frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}=\pm\frac{(6,-4,-4)}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2).$$

4. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

解:重力 $\boldsymbol{F}=(0,0,-9.8\times100)=(0,0,-980)$， $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,-6)$，

$\therefore\ W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=980\times6=5880\ (J)$.

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着；在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着(图 8－4). 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|F_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

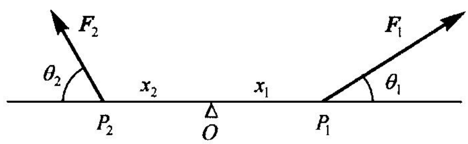

图 8－4

解:有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和等于零. 两力矩分别为

$x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1$ 与 $x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2$，要使杠杆平衡，必须满足如下条件：

$x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1=x_2|\boldsymbol{F}_2|\ \sin\theta_2$.

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解:$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4\times2+(-3)\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2$.

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

解:$\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{b}=(3\lambda+2u,5\lambda+u,-2\lambda+4u)$.

在 z 轴上取单位向量 $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$，要使它与 $\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{b}$ 垂直，只须 $\boldsymbol{e}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{b})=0$，

即 $(3\lambda+2u)\times0+(5\lambda+u)\times0+(-2\lambda+4u)\times1=0$.

$\therefore\ \lambda=2u$.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

解:设 AB 为直径，圆心为 O. 在圆上任取一点 C，连接 AC、BC 与 OC. 要证 $\angle ACB=90°$，只须证 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$$\because\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})$$

$$=(\overrightarrow{OC})^2-(\overrightarrow{AO})^2=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2=0.$$

$\therefore\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$. 即 AB 所对的圆周角是直角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：