全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

骆秋琴　韩国涛　主编

中国农业出版社

全国高等职业教育“十二五”规划教材

高 等 数 学

骆秋琴 韩国涛 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 骆秋琴，韩国涛主编．—北京：中国农业出版社，2010.7

全国高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-14649-5

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①骆…②韩…　Ⅲ．①高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 119058 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　李　燕

文字编辑　魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2010 年 8 月第 1 版　　2010 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：13.75

字数：308 千字

定价：27.00 元

（凡本版图书出现印刷、装订错误，请向出版社发行部调换）

前　　言

目前，随着我国高等教育的快速发展和高职人才培养模式的不断创新，对高职教材建设不断提出了新的要求。本教材依据教育部《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》的精神，同时汲取同类数学教材的宝贵经验编写而成。

本教材从高职高专人才培养目标出发，遵循“掌握概念、强化应用、培养技能”的教育理念，注重学生应用能力培养；充分考虑高职高专学生的数学基础和实际水平，并兼顾高职高专各专业课程对数学知识的要求；引入计算机 Matlab 软件的使用，激发学生的学习兴趣。

本教材编写中力求突出以下特点：

(1) 强调基础理论学习“以应用为目的，以必需够用为度”的教育理念，淡化理论体系和理论推证，注重学生应用能力培养。

(2) 注重运用直观化来表达一些数学概念及结论，同时不过分追求复杂计算和变换，增强学生学习数学的信心。

(3) 引入计算机 Matlab 软件的使用，增加了数学实验、数学建模的内容，体现数学改革的方向。

本系列教材包括《高等数学》、《应用数学》两册，《高等数学》共含 7 章内容，包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、Matlab 软件介绍及数学试验；《应用数学》共含 7 章内容，包括行列式、矩阵、线性方程组、概率的概念及计算、随机变量、数理统计和数学试验。各小节均配有习题、每章均配有本章小结及本章复习题，书末附有习题解答。

《高等数学》由温州科技职业学院骆秋琴、辽宁农业职业技术学院韩国涛担任主编，温州科技职业学院闫长远、青海畜牧兽医职业技术学院贺文恕担任副主编。参加《高等数学》编写工作的有：辽宁农业职业技术学院韩国涛（编写第 1 章），温州科技职业学院骆秋琴（编写第 2 章）、周海娜（编写第 5 章）、闫长远（编写第 7 章），青海畜牧兽医职业技术学院李爱芳（编写第 3 章）、贺文恕（编写第 6 章），山西林业职业技术学院丁琴芳（编写第 4 章）。《高等数学》由骆秋

琴、闫长远负责统稿工作，大连水产学院职业技术学院刘连福为本书审稿，并提出了许多宝贵意见。

《应用数学》由温州科技职业学院骆秋琴、辽宁农业职业技术学院韩国涛担任主编，青海畜牧兽医职业技术学院贺文恕、温州科技职业学院闫长远担任副主编。参加《应用数学》编写工作的有：温州科技职业学院骆秋琴（编写第 1 章）、陈瑜（编写第 4 章）、诸慧、管海娃（编写第 5 章）、闫长远（编写第 7 章），青海畜牧兽医职业技术学院李爱芳（编写第 2 章）、贺文恕（编写第 3 章），辽宁农业职业技术学院韩国涛（编写第 6 章）。《应用数学》由骆秋琴、韩国涛、贺文恕负责统稿工作，黑龙江农业职业技术学院卓春英为本书审稿，并提出了许多宝贵意见。

本教材在编写过程中，得到了所有参编老师所在院校的大力支持和帮助，同时参考了大量相关教材，借鉴了许多好的内容，在此，对上述院校和参考书籍的作者一并表示感谢。

尽管在教材编写过程中我们做了许多努力，但书中难免有不妥之处，恳请各教材使用单位和读者批评指正，以便不断改进和完善教材。

编 者

2010 年 5 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　函数的极限与连续

函数是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，是初等数学重要内容之一．它又是高等数学中最重要的基本概念和研究对象．本章将在中学已学过的函数知识的基础上，对基本初等函数及相关知识做简要的回顾和总结．在此基础上，我们将引入有关函数极限和连续的知识．

1.1　初等函数

1. 基本初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．基本初等函数在初等数学中已经作了系统的研究，现简要回顾如下：

（1）常函数：$y=C$（C 为常数）．这是最简单的一类函数，无论 x 取什么值，函数 y 的值永远是常数 C.

定义域：$D=R$；值域：$W=\{C\}$，如图 1－1 所示.

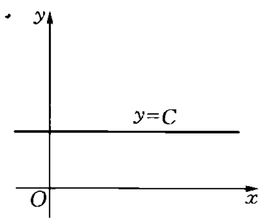
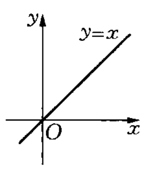
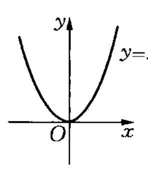
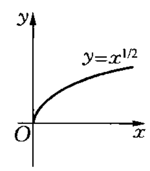
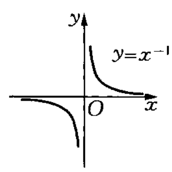


图 1－1

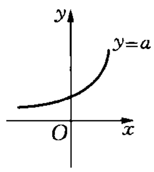
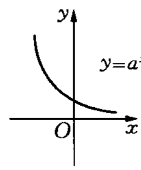
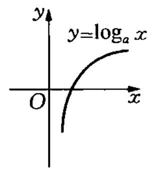
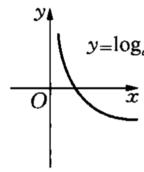
（2）幂函数：$y=x^a$（a 为任意实数），如表 1－1 所示．

表 1－1　常见幂函数的性质

函　数	$a=1$	$a=2$	$a=1/2$	$a=-1$
图　像				
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$[0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$
值　域	$(-\infty,\ +\infty)$	$[0,\ +\infty]$	$[0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	
单调性	单调增	$(-\infty,\ 0)$单调减 $[0,\ +\infty)$单调增	单调增	$(-\infty,\ 0)$和$(0,\ +\infty)$内分别递减

（3）指数函数：$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$），如表 1－2 所示．

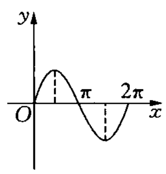
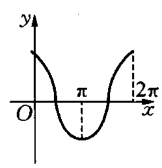
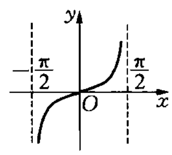
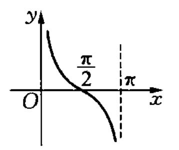
表 1 - 2　指数函数与对数函数的性质

函　数	$y=a^x(a>0,\ a\neq1)$		$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图　像				
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$
值　域	$(0,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

（4）对数函数：$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$，如表 1 - 2 所示．

（5）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，如表 1 - 3 所示．

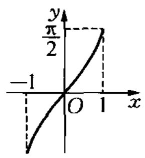
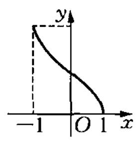
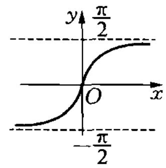
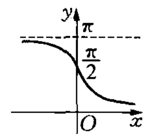
表 1 - 3　三角函数的性质

函　数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图　像				
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$	$(k\pi,\ (k+1)\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$
值　域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$	单调增	单调减	单调增	单调减
$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$	单调减	单调减	单调增	单调减
$\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$	单调减	单调增	单调增	单调减
$\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$	单调增	单调增	单调增	单调减

（6）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$，如表 1 - 4 所示．这些函数在中学数学中已作过较详细的介绍．其图像和主要性质经常使用，需要我们熟

练掌握，在此就不介绍了 .

表 1－4　反三角函数的性质

函　数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\text{arccot}\, x$
图　像				
定义域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
值　域	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\ \pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
$f(-x)$	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=\pi-f(x)$	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=\pi-f(x)$

2. 复合函数

在进行函数研究时，常把一些较复杂的函数，看作是由几个简单函数复合而成的 . 先举一个例子，设 $y=\cos u$，而 $u=1-x^2$，以 $1-x^2$ 代替第一个函数的 u，得 $y=\cos(1-x^2)$. 我们说，函数 $y=\cos(1-x^2)$是由 $y=\cos u$ 及 $u=1-x^2$复合而成的复合函数 .

这里，y 是 u 的函数，u 是 x 的函数 . 于是，通过“桥梁” u 得到 y 是 x 的函数 . 于是我们有：

定义 1.1　设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，则 y 通过 u 也是 x 的函数，称此函数是由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，x 为自变量，u 为中间变量 .

这里 $u=\varphi(x)$称为内函数，$y=f(u)$称为外函数，只有内函数的值域与外函数的定义域有公共部分才可以复合 .

例 1　求函数 $y=2^{\sin x}$的复合过程 .

解　$y=2^{\sin x}$是由 $y=2^u$，$u=\sin x(x\in \mathbf{R})$复合而成的复合函数 .

例 2　求函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 的复合过程 .

解　$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数 . 因为 $u=2+x^2$ 的值域$(2,\ +\infty)$不包含于 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,\ 1]$中，且二者无公共部分 . 对于 $u=2+x^2$ 的定义域中的任何 x 值，$y=\arcsin(2+x^2)$均不存在 .

例 3　求函数 $y=\sin^3 x$ 的复合过程 .

解　函数 $y=\sin^3 x$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin x$ 所组成的复合函数 .

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成 . 如 $y=\sin^2 \frac{x}{2}$是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\frac{x}{2}$复合而成，其中 u，v 都是中间变量 .

例 4　求由下列函数组成的复合函数：

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=1+\sin x$；(2) $y=\ln u$，$u=1+v^2$，$v=e^x$；(3) $y=\sqrt{u}$，$u=4x-3$.

解 (1) 由 $u\geqslant 0$，有 $1+\sin x\geqslant 0$，得 $x\in\mathbf{R}$，所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y=\sqrt{u}=\sqrt{1+\sin x}$，即 $y=\sqrt{1+\sin x}$.

(2) 由 $u>0$，有 $1+v^2>0$，得 $v\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{R}$，所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时，
$y=\ln u=\ln(1+v^2)=\ln[1+(\mathrm{e}^x)^2]=\ln(1+\mathrm{e}^{2x})$，即 $y=\ln(1+\mathrm{e}^{2x})$.

(3) 由 $u\geqslant 0$，有 $4x-3\geqslant 0$，$x\geqslant\frac{3}{4}$，所以当 $x\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$时，$y=\sqrt{u}=\sqrt{4x-3}$，即 $y=\sqrt{4x-3}$.

例 5 分解下列复合函数：

(1) $y=\cos\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$；

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$； (4) $y=\ln\sqrt{1+\tan t^2}$.

解 (1) $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$；

(2) $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{x}$；

(3) $y=\lg u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+x^2$；

(4) $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+\tan w$，$w=t^2$.

例 6 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，代入 $f(x+1)$的表达式，得
$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$，所以 $f(x)=x^2+x+3$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合，并用一个解析式表示的函数，称为初等函数．

如 $y=2x^2+3x+8$，$y=\frac{3x-5}{8x^2+5x-1}$，$y=\cos\sqrt{1-x^2}$，$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+x^2+1$ 等都是初等函数．不是初等函数的函数叫做非初等函数．

例如：符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 取整函数 $y=[x]$等分段函数都是非初等函数. 本课程中所研究的主要对象是初等函数．

习 题 1.1

1. 判断下列每组函数是否是同一函数，简述理由．

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$； (2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$； (4) $y=\sqrt[3]{x^4-2x^3}$ 与 $y=x\sqrt[3]{x-2}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{4-x^2}$； (2) $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

3. 某地出租车按下列标准收费，x 表示量程，y 表示收费金额，当 $0<x\leqslant 4$ 时，收费 7 元；当 $4<x\leqslant 10$ 时，每千米收费 0.5 元；当 $x>10$ 时，每千米收费 1 元．

(1) 求收费金额与量程之间的函数关系式；

(2) 求 $f(5)$，$f(15)$，$f(2)$；

(3) 作出函数的图像．

4. 旅客乘坐汽车可免费携带不超过 10 kg 的物品，超过 10 kg 而不超过25 kg的部分每千克收费 0.12 元，超过 25 kg 而不超过 100 kg 的部分，每千克收费 0.2 元．

(1) 列出携带物品收费的解析式；

(2) 求携带物品分别为 9 kg、25 kg、26 kg 时应交的费用．

5. 求下列函数组成的复合函数，并求复合函数的定义域：

(1) $y=\arccos x$，$x=1-t^2$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=4-x^2$；

(3) $y=\lg u$，$u=1+v$，$v=\dfrac{1}{x}$.

6. 判定下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的：

(1) $y=(6x-1)^3$；　(2) $y=\mathrm{e}^{\sin 5x}$；　(3) $y=\ln\sqrt{2+\cos x^2}$；

(4) $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x^2+1}}$；　(5) $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$；　(6) $y=\cos(2x+1)$.

1.2　函数模型举例

现实生活中，常常要用数学方法来分析变量间的关系，即先建立变量间的函数关系，然后用微积分等知识分析这些函数的特性，这种利用函数来描述现实对象的数量关系，称为**函数模型**．在企业管理和经济学中常见的需求函数有：

线性需求函数：$Q=a-bP$，其中 $b\geqslant 0$，$a\geqslant 0$ 均为常数．

二次曲线需求函数：$Q=a-bP-cP^2$，其中 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$ 均为常数．

指数需求函数：$Q=a\mathrm{e}^{-bP}$，其中 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 均为常数．

例 1　指数增长模型：在稳定的理想状态下，生物学中细菌的繁殖按指数函数增长：

$$Q(t)=a\mathrm{e}^{kt}(Q(t)\text{表示时间 } t \text{ min 内细菌数}),$$

假设在一定的培养条件下，开始($t=0$)时有 2 000 个细菌，且 20 min 后已增加到 6 000 个，试问 1 h 后将有多少个细菌?

解　因为 $Q(0)=2\,000$，所以 $a=2\,000$，$Q(t)=2\,000\mathrm{e}^{kt}$.
又 $t=20$ 时，$Q=6\,000$，故有 $6\,000=2\,000\mathrm{e}^{20k}$.
所以 $\mathrm{e}^{20k}=3$，当 $t=60$ 时，$Q(60)=2\,000\mathrm{e}^{60k}=2\,000\times 3^3=54\,000$. 因此 1 h 后细菌有 54 000 个．

例 2　某种型号的电冰箱，当每台价格为 1 000 元时，日需求量为 20 台，如果每台电冰箱打九折促销，即降价到 900 元时，则日需求量为 30 台，若需求量与价格之间是线性关系，求电冰箱的日需求量 Q_d 与价格 P 的函数关系．

解　设日需求量 Q_d 与价格 P 的函数关系为

$$Q_d=-aP+b.$$

依题意，得

$$\begin{cases}-1\,000a+b=20,\\-900a+b=30.\end{cases}$$

解方程组，得 $$a=\frac{1}{10},\ b=120.$$

故所求的需求量 Q_d 与价格 P 的函数关系为 $Q_d=-\frac{P}{10}+120$.

例 3 保本分析：某公司每天要支付一笔固定费用 300 元(用于房租与薪水等)，它所出售的食品的生产费用为 1 元/kg，而销售价格 2 元/kg，试问它们的保本点是多少？即每天应当销售多少千克食品才能使公司的收支平衡？

解 依题意，成本函数 $$C(x)=300+1\cdot x,$$

收益函数 $$R(x)=2\cdot x,$$

而利润函数 $$L(x)=R(x)-C(x)=2x-(300+x).$$

令 $L(x)=0$，即 $2x=300+x$，则 $x=300$，即每天必须销售 300 kg 食品才能保本 .

当 $x>300$ 时，收益 R 超过成本 C，可以盈利；当 $x<300$ 时，成本 C 超过收益 R，产生亏本 .

例 4 单利模型：单利是金融业务中的一种利息，某人在银行存入现金 2 万元，年利率为 10%，问 3 年之后本利和是多少？

解 设初始本金为 P，年利率为 r，利息为 C，单利为 I，本利和为 A，存款 t 年 .

因为年利率 $r=\frac{\text{利息 } C}{\text{本金 } P}$，即 $C=Pr$，故

第一年单利 $I_1=1\cdot C=Pr$,

第二年单利 $I_2=2\cdot C=2Pr$,

…………

第 t 年单利 $I_t=t\cdot C=tPr$,

所以，第 t 年本利和

$$A_t=P+I_t,$$

即 $$A_t=P+tPr,$$

可得本利和与计息时间的函数关系，即单利模型为

$$A_t=P(1+tr).$$

把 $P=2$ 万元，$r=10\%$，$t=3$ 年代入得

$$A_3=2(1+3\times0.1)=2.6(\text{万元}),$$

即 3 年后本利和是 2.6 万元 .

例 5 复利模型：所谓复利计息，就是将每期利息于每期之末加入该期本金，并以此为新本金再计算下期利息 . 某人在银行存现金 P 元，年利率 r，每年结算一次，利息仍留在存款中，问在 t 年之后，本利和为多少 .

解 设本利和为 A_t. 因为每年本金和利息仍留在存款中，所以

1 年后的本利和 $A_1=P(1+r)$,

2 年后的本利和 $A_2=A_1(1+r)=P(1+r)^2$,

………………

t 年后本利和 $A_t=P(1+r)^t$,

由此得本利和复利计算模型为

$$A_t=P(1+r)^t.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com