




全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

G A O D E N G S H U X U E

■ 骆秋琴 韩国涛 主编

 中国农业出版社

全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

骆秋琴 韩国涛 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 骆秋琴, 韩国涛主编. —北京: 中国农业出版社, 2010.7

全国高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-14649-5

I. ①高… II. ①骆…②韩… III. ①高等数学-高等学校: 技术学校-教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 119058 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 李 燕

文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 13.75

字数: 308 千字

定价: 27.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

前 言

目前,随着我国高等教育的快速发展和高职人才培养模式的不断创新,对高职教材建设不断提出了新的要求。本教材依据教育部《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》的精神,同时汲取同类数学教材的宝贵经验编写而成。

本教材从高职高专人才培养目标出发,遵循“掌握概念、强化应用、培养技能”的教育理念,注重学生应用能力培养;充分考虑高职高专学生的数学基础和实际水平,并兼顾高职高专各专业课程对数学知识的要求;引入计算机 Matlab 软件的使用,激发学生的学习兴趣。

本教材编写中力求突出以下特点:

(1) 强调基础理论学习“以应用为目的,以必需够用为度”的教育理念,淡化理论体系和理论推证,注重学生应用能力培养。

(2) 注重运用直观化来表达一些数学概念及结论,同时不过分追求复杂计算和变换,增强学生学习数学的信心。

(3) 引入计算机 Matlab 软件的使用,增加了数学实验、数学建模的内容,体现数学改革的方向。

本系列教材包括《高等数学》、《应用数学》两册,《高等数学》共含 7 章内容,包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、Matlab 软件介绍及数学试验;《应用数学》共含 7 章内容,包括行列式、矩阵、线性方程组、概率的概念及计算、随机变量、数理统计和数学试验。各小节均配有习题、每章均配有本章小结及本章复习题,书末附有习题解答。

《高等数学》由温州科技职业学院骆秋琴、辽宁农业职业技术学院韩国涛担任主编,温州科技职业学院闫长远、青海畜牧兽医职业技术学院贺文恕担任副主编。参加《高等数学》编写工作的有:辽宁农业职业技术学院韩国涛(编写第 1 章),温州科技职业学院骆秋琴(编写第 2 章)、周海娜(编写第 5 章)、闫长远(编写第 7 章),青海畜牧兽医职业技术学院李爱芳(编写第 3 章)、贺文恕(编写第 6 章),山西林业职业技术学院丁琴芳(编写第 4 章)。《高等数学》由骆秋

琴、闫长远负责统稿工作，大连水产学院职业技术学院刘连福为本书审稿，并提出了许多宝贵意见。

《应用数学》由温州科技职业学院骆秋琴、辽宁农业职业技术学院韩国涛担任主编，青海畜牧兽医职业技术学院贺文恕、温州科技职业学院闫长远担任副主编。参加《应用数学》编写工作的有：温州科技职业学院骆秋琴（编写第1章）、陈瑜（编写第4章）、诸慧、管海娃（编写第5章）、闫长远（编写第7章），青海畜牧兽医职业技术学院李爱芳（编写第2章）、贺文恕（编写第3章），辽宁农业职业技术学院韩国涛（编写第6章）。《应用数学》由骆秋琴、韩国涛、贺文恕负责统稿工作，黑龙江农业职业技术学院卓春英为本书审稿，并提出了许多宝贵意见。

本教材在编写过程中，得到了所有参编老师所在院校的大力支持和帮助，同时参考了大量相关教材，借鉴了许多好的内容，在此，对上述院校和参考书籍的作者一并表示感谢。

尽管在教材编写过程中我们做了许多努力，但书中难免有不妥之处，恳请各教材使用单位和读者批评指正，以便不断改进和完善教材。

编者

2010年5月

目 录

前言

第 1 章 函数的极限与连续	1
1.1 初等函数	1
习题 1.1	4
1.2 函数模型举例	5
习题 1.2	7
1.3 极限的概念	8
习题 1.3	10
1.4 无穷小量与无穷大量	10
习题 1.4	11
1.5 函数极限运算法则	11
习题 1.5	14
1.6 两个重要极限	14
习题 1.6	16
1.7 无穷小的比较	16
习题 1.7	18
1.8 函数的连续性	18
1.8.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的连续性	18
1.8.2 函数的间断点	20
1.8.3 利用函数的连续性求极限	21
1.8.4 闭区间上连续函数的性质	22
习题 1.8	22
本章小结	23
复习题 1	24
第 2 章 导数与微分	26
2.1 导数的概念	26
2.1.1 引例	26
2.1.2 导数的概念	27
2.1.3 导数的几何意义	29
2.1.4 函数可导与连续的关系	29
习题 2.1	30
2.2 基本导数公式和导数运算法则	30

2.2.1 导数的基本公式	31
2.2.2 导数的四则运算法则	31
习题 2.2	33
2.3 复合函数的求导法则	34
习题 2.3	35
2.4 隐函数的导数	36
习题 2.4	37
2.5 高阶导数	37
习题 2.5	38
2.6 微分	38
2.6.1 微分的概念	39
2.6.2 微分的基本公式与微分的运算法则	40
2.6.3 微分在近似计算中的应用举例	42
习题 2.6	43
本章小结	43
复习题 2	44
第 3 章 导数的应用	46
3.1 微分中值定理	46
3.1.1 罗尔 (Rolle) 中值定理	46
3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	46
3.1.3 柯西 (Cauchy) 中值定理	47
习题 3.1	48
3.2 洛必达 (L'Hospital) 法则	48
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型	48
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	50
3.2.3 其他待定型	50
习题 3.2	51
3.3 函数的单调性和极值	52
3.3.1 利用一阶导数判断函数的单调区间	52
3.3.2 利用一阶导数求函数的极值	52
3.3.3 利用一阶导数求函数的最值	54
习题 3.3	55
3.4 曲线的凹凸与拐点	55
3.4.1 曲线凹凸的定义	55
3.4.2 利用二阶导数判断函数的凹凸区间与极值	56
3.4.3 利用二阶导数求函数的拐点	57
习题 3.4	58

3.5 函数图像的描绘	58
3.5.1 渐近线	58
3.5.2 函数图像的描绘	58
习题 3.5	60
3.6 导数在实际问题中应用举例	60
3.6.1 经济学中的应用	60
3.6.2 最优化问题	62
习题 3.6	64
本章小结	64
复习题 3	65
第 4 章 不定积分	67
4.1 不定积分的概念	67
4.1.1 原函数	67
4.1.2 不定积分	67
4.1.3 不定积分的性质	68
4.1.4 不定积分的几何意义	68
习题 4.1	69
4.2 积分的基本公式和运算法则	69
4.2.1 积分的基本公式	69
4.2.2 积分的运算法则	70
4.2.3 直接积分法	71
习题 4.2	72
4.3 第一类换元积分法	72
习题 4.3	75
4.4 第二类换元积分法	76
4.4.1 根式代换	76
4.4.2 三角代换	77
习题 4.4	78
4.5 分部积分法	79
习题 4.5	80
4.6 积分表的使用	81
习题 4.6	82
本章小结	82
复习题 4	83
第 5 章 定积分及其应用	85
5.1 定积分的概念	85
5.1.1 引例	85

5.1.2 定积分的定义	86
5.1.3 定积分的几何意义	87
5.1.4 定积分的性质	88
习题 5.1	90
5.2 微积分基本定理	90
5.2.1 变上限定积分及其导数	90
5.2.2 牛顿—莱布尼兹 (Newton - Leibniz) 公式	92
习题 5.2	93
5.3 定积分的换元积分法	93
习题 5.3	96
5.4 定积分的分部积分法	96
习题 5.4	97
5.5 广义积分	97
5.5.1 无穷区间上的广义积分	98
5.5.2 无界函数的广义积分	99
习题 5.5	100
5.6 定积分的应用	101
5.6.1 微元法	101
5.6.2 定积分的几何应用	102
5.6.3 定积分在经济中的应用	105
5.6.4 定积分在物理中的应用	106
习题 5.6	107
本章小结	108
复习题 5	110
第 6 章 多元函数微积分	112
6.1 多元函数的概念	112
6.1.1 多元函数的概念	112
6.1.2 多元函数的极限和连续	114
习题 6.1	116
6.2 偏导数和全微分	117
6.2.1 偏导数	117
6.2.2 高阶偏导数	119
6.2.3 全微分	121
习题 6.2	124
6.3 多元复合函数的求导法则	124
6.3.1 多元复合函数的求导法则	124
6.3.2 全微分形式不变性	127
6.3.3 隐函数的求导法则	128

习题 6.3	129
6.4 多元函数的极值	129
6.4.1 多元函数的极值和最值	129
6.4.2 条件极值、拉格朗日乘数法	132
习题 6.4	135
6.5 二重积分的概念	135
6.5.1 二重积分的概念	135
6.5.2 二重积分的存在定理	137
6.5.3 二重积分的性质	137
习题 6.5	139
6.6 二重积分的计算	139
6.6.1 在直角坐标系下二重积分的计算	139
6.6.2 在极坐标系下二重积分的计算	142
习题 6.6	144
本章小结	144
复习题 6	146
第 7 章 Matlab 数学实验	148
7.1 Matlab 基本用法介绍	148
7.1.1 运行 Matlab 软件	148
7.1.2 Matlab 环境	148
7.1.3 命令行编辑	149
7.1.4 Matlab 语句和变量	150
7.1.5 系统预定义变量	150
7.1.6 Matlab 的函数	152
7.1.7 输出格式	154
7.1.8 Help 求助命令和联机帮助	156
7.1.9 退出和存入工作空间	156
7.2 Matlab 算术运算和作图实验	156
7.2.1 算术运算符号	156
7.2.2 复数与矩阵	157
7.2.3 函数运算	158
7.2.4 Matlab 作图	160
学生实训练习 7.2	165
7.3 Matlab 中求极限与导数的实验	166
7.3.1 实验目的	166
7.3.2 实验内容	166
7.3.3 实验命令格式	166
7.3.4 求极限的实验	166

7.3.5 求导数的实验	167
7.3.6 求极值的实验	168
学生实训练习 7.3	169
7.4 Matlab 数学实验	169
7.4.1 实验目的	169
7.4.2 实验内容	169
7.4.3 实验命令格式	169
学生实训练习 7.4	171
附录	172
附录 I 希腊字母表	172
附录 II 初等数学基本公式	172
附录 III 简易积分表	182
附录 IV 习题答案	190
主要参考文献	207

第 1 章 函数的极限与连续

函数是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，是初等数学重要内容之一。它又是高等数学中最重要基本概念和研究对象。本章将在中学已学过的函数知识的基础上，对基本初等函数及相关知识做简要的回顾和总结。在此基础上，我们将引入有关函数极限和连续的知识。

1.1 初等函数

1. 基本初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。基本初等函数在初等数学中已经作了系统的研究，现简要回顾如下：

(1) 常函数： $y=C$ (C 为常数)。这是最简单的一类函数，无论 x 取什么值，函数 y 的值永远是常数 C 。

定义域： $D=R$ ；值域： $W=\{C\}$ ，如图 1-1 所示。

(2) 幂函数： $y=x^a$ (a 为任意实数)，如表 1-1 所示。

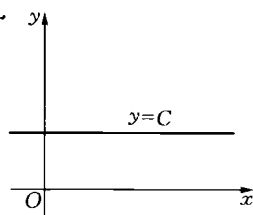


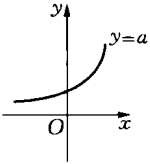
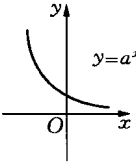
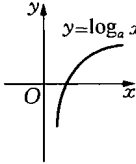
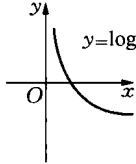
图 1-1

表 1-1 常见幂函数的性质

函 数	$a=1$	$a=2$	$a=1/2$	$a=-1$
图 像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值 域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty]$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	
单调性	单调增	$(-\infty, 0)$ 单调减 $[0, +\infty)$ 单调增	单调增	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内分别递减

(3) 指数函数： $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)，如表 1-2 所示。

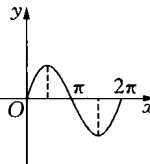
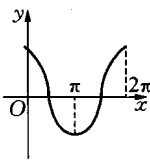
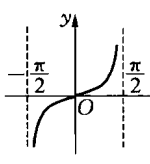
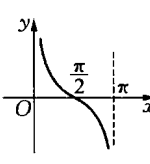
表 1-2 指数函数与对数函数的性质

函 数	$y=a^x (a>0, a\neq 1)$		$y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图 像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值 域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

(4) 对数函数: $y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$, 如表 1-2 所示.

(5) 三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$, 如表 1-3 所示.

表 1-3 三角函数的性质

函 数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图 像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}),$ $k \in \mathbf{Z}$	$(k\pi, (k+1)\pi),$ $k \in \mathbf{Z}$
值 域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
$(0, \frac{\pi}{2})$	单调增	单调减	单调增	单调减
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	单调减	单调减	单调增	单调减
$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	单调减	单调增	单调增	单调减
$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	单调增	单调增	单调增	单调减

(6) 反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot } x$, 如表 1-4 所示. 这些函数在中学数学中已作过较详细的介绍. 其图像和主要性质经常使用, 需要我们熟

练掌握,在此就不介绍了.

表 1-4 反三角函数的性质

函 数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
图 像				
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值 域	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
$f(-x)$	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=\pi-f(x)$	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=\pi-f(x)$

2. 复合函数

在进行函数研究时,常把一些较复杂的函数,看作是由几个简单函数复合而成的.先举一个例子,设 $y=\cos u$, 而 $u=1-x^2$, 以 $1-x^2$ 代替第一个函数的 u , 得 $y=\cos(1-x^2)$. 我们说, 函数 $y=\cos(1-x^2)$ 是由 $y=\cos u$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

这里, y 是 u 的函数, u 是 x 的函数. 于是, 通过“桥梁” u 得到 y 是 x 的函数. 于是我们有:

定义 1.1 设 y 是 u 的函数, $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数, $u=\varphi(x)$, 则 y 通过 u 也是 x 的函数, 称此函数是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$, x 为自变量, u 为中间变量.

这里 $u=\varphi(x)$ 称为内函数, $y=f(u)$ 称为外函数, 只有内函数的值域与外函数的定义域有公共部分才可以复合.

例 1 求函数 $y=2^{\sin x}$ 的复合过程.

解 $y=2^{\sin x}$ 是由 $y=2^u$, $u=\sin x (x \in \mathbf{R})$ 复合而成的复合函数.

例 2 求函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 的复合过程.

解 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数. 因为 $u=2+x^2$ 的值域 $(2, +\infty)$ 不含有于 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 中, 且二者无公共部分. 对于 $u=2+x^2$ 的定义域中的任何 x 值, $y=\arcsin(2+x^2)$ 均不存在.

例 3 求函数 $y=\sin^3 x$ 的复合过程.

解 函数 $y=\sin^3 x$ 是由 $y=u^3$, $u=\sin x$ 所组成的复合函数.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 如 $y=\sin^2 \frac{x}{2}$ 是由 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=\frac{x}{2}$ 复合而成, 其中 u, v 都是中间变量.

例 4 求由下列函数组成的复合函数:

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=1+\sin x$; (2) $y=\ln u$, $u=1+v^2$, $v=e^x$; (3) $y=\sqrt{u}$, $u=4x-3$.

解 (1) 由 $u \geq 0$, 有 $1 + \sin x \geq 0$, 得 $x \in \mathbf{R}$, 所以当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $y = \sqrt{u} = \sqrt{1 + \sin x}$, 即 $y = \sqrt{1 + \sin x}$.

(2) 由 $u > 0$, 有 $1 + v^2 > 0$, 得 $v \in \mathbf{R}$, $e \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, 所以当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $y = \ln u = \ln(1 + v^2) = \ln[1 + (e^x)^2] = \ln(1 + e^{2x})$, 即 $y = \ln(1 + e^{2x})$.

(3) 由 $u \geq 0$, 有 $4x - 3 \geq 0$, $x \geq \frac{3}{4}$, 所以当 $x \in [\frac{3}{4}, +\infty)$ 时, $y = \sqrt{u} = \sqrt{4x - 3}$, 即 $y = \sqrt{4x - 3}$.

例 5 分解下列复合函数:

(1) $y = \cos \sqrt{1 - x^2}$;

(2) $y = e^{\sqrt{x}}$;

(3) $y = \lg(1 + \sqrt{1 + x^2})$;

(4) $y = \ln \sqrt{1 + \tan t^2}$.

解 (1) $y = \cos u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - x^2$;

(2) $y = e^u$, $u = \sqrt{x}$;

(3) $y = \lg u$, $u = 1 + \sqrt{v}$, $v = 1 + x^2$;

(4) $y = \ln u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 + \tan w$, $w = t^2$.

例 6 设 $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1 = t$, 则 $x = t-1$, 代入 $f(x+1)$ 的表达式, 得 $f(t) = (t-1)^2 + 3(t-1) + 5 = t^2 + t + 3$, 所以 $f(x) = x^2 + x + 3$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合, 并用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

如 $y = 2x^2 + 3x + 8$, $y = \frac{3x-5}{8x^2+5x-1}$, $y = \cos \sqrt{1-x^2}$, $y = \lg(1 + \sqrt{1+x^2})$, $y = e^{\sqrt{x}} + x^2 + 1$ 等都是初等函数. 不是初等函数的函数叫做非初等函数.

例如: 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 取整函数 $y = [x]$ 等分段函数都是非初等函数.

数. 本课程中所研究的主要对象是初等函数.

习 题 1.1

1. 判断下列每组函数是否是同一函数, 简述理由.

(1) $y = \sin x$ 与 $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

(2) $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$;

(3) $y = \lg x^2$ 与 $y = 2 \lg x$;

(4) $y = \sqrt[3]{x^4 - 2x^3}$ 与 $y = x \sqrt[3]{x-2}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{4-x^2}$;

(2) $y = \lg(x-1) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

3. 某地出租车按下列标准收费, x 表示量程, y 表示收费金额, 当 $0 < x \leq 4$ 时, 收费 7 元; 当 $4 < x \leq 10$ 时, 每千米收费 0.5 元; 当 $x > 10$ 时, 每千米收费 1 元.

(1) 求收费金额与量程之间的函数关系式;

(2) 求 $f(5)$, $f(15)$, $f(2)$;

(3) 作出函数的图像.

4. 旅客乘坐汽车可免费携带不超过 10 kg 的物品, 超过 10 kg 而不超过 25 kg 的部分每千克收费 0.12 元, 超过 25 kg 而不超过 100 kg 的部分, 每千克收费 0.2 元.

(1) 列出携带物品收费的解析式;

(2) 求携带物品分别为 9 kg、25 kg、26 kg 时应交的费用.

5. 求下列函数组成的复合函数, 并求复合函数的定义域:

(1) $y = \arccos x$, $x = 1 - t^2$;

(2) $y = \sqrt{u}$, $u = 4 - x^2$;

(3) $y = \lg u$, $u = 1 + v$, $v = \frac{1}{x}$.

6. 判定下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的:

(1) $y = (6x - 1)^3$;

(2) $y = e^{\sin^5 x}$;

(3) $y = \ln \sqrt{2 + \cos x^2}$;

(4) $y = e^{\arctan \sqrt{x^2 + 1}}$;

(5) $y = \ln \sin \frac{x}{2}$;

(6) $y = \cos(2x + 1)$.

1.2 函数模型举例

现实生活中, 常常要用数学方法来分析变量间的关系, 即先建立变量间的函数关系, 然后用微积分等知识分析这些函数的特性, 这种利用函数来描述现实对象的数量关系, 称为**函数模型**. 在企业管理和经济学中常见的需求函数有:

线性需求函数: $Q = a - bP$, 其中 $b \geq 0$, $a \geq 0$ 均为常数.

二次曲线需求函数: $Q = a - bP - cP^2$, 其中 $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ 均为常数.

指数需求函数: $Q = ae^{-bP}$, 其中 $a \geq 0$, $b \geq 0$ 均为常数.

例 1 指数增长模型: 在稳定的理想状态下, 生物学中细菌的繁殖按指数函数增长:

$$Q(t) = ae^{kt} \quad (Q(t) \text{ 表示时间 } t \text{ min 内细菌数}),$$

假设在一定的培养条件下, 开始($t=0$)时有 2 000 个细菌, 且 20 min 后已增加到 6 000 个, 试问 1 h 后将有多少个细菌?

解 因为 $Q(0) = 2\,000$, 所以 $a = 2\,000$, $Q(t) = 2\,000e^{kt}$.

又 $t = 20$ 时, $Q = 6\,000$, 故有 $6\,000 = 2\,000e^{20k}$.

所以 $e^{20k} = 3$, 当 $t = 60$ 时, $Q(60) = 2\,000e^{60k} = 2\,000 \times 3^3 = 54\,000$. 因此 1 h 后细菌有 54 000 个.

例 2 某种型号的电冰箱, 当每台价格为 1 000 元时, 日需求量为 20 台, 如果每台电冰箱打九折促销, 即降价到 900 元时, 则日需求量为 30 台, 若需求量与价格之间是线性关系, 求电冰箱的日需求量 Q_d 与价格 P 的函数关系.

解 设日需求量 Q_d 与价格 P 的函数关系为

$$Q_d = -aP + b.$$

依题意, 得

$$\begin{cases} -1\,000a + b = 20, \\ -900a + b = 30. \end{cases}$$

解方程组, 得

$$a = \frac{1}{10}, b = 120.$$

故所求的需求量 Q_d 与价格 P 的函数关系为 $Q_d = -\frac{P}{10} + 120$.

例 3 保本分析: 某公司每天要支付一笔固定费用 300 元(用于房租与薪水等), 它所出售的食品的生产费用为 1 元/kg, 而销售价格 2 元/kg, 试问它们的保本点是多少? 即每天应当销售多少千克食品才能使公司的收支平衡?

解 依题意, 成本函数 $C(x) = 300 + 1 \cdot x$,

收益函数 $R(x) = 2 \cdot x$,

而利润函数 $L(x) = R(x) - C(x) = 2x - (300 + x)$.

令 $L(x) = 0$, 即 $2x = 300 + x$, 则 $x = 300$, 即每天必须销售 300 kg 食品才能保本.

当 $x > 300$ 时, 收益 R 超过成本 C , 可以盈利; 当 $x < 300$ 时, 成本 C 超过收益 R , 产生亏本.

例 4 单利模型: 单利是金融业务中的一种利息, 某人在银行存入现金 2 万元, 年利率为 10%, 问 3 年之后本利和是多少?

解 设初始本金为 P , 年利率为 r , 利息为 C , 单利为 I , 本利和为 A , 存款 t 年.

因为年利率 $r = \frac{\text{利息 } C}{\text{本金 } P}$, 即 $C = Pr$, 故

第一年单利 $I_1 = 1 \cdot C = Pr$,

第二年单利 $I_2 = 2 \cdot C = 2Pr$,

.....

第 t 年单利 $I_t = t \cdot C = tPr$,

所以, 第 t 年本利和

$$A_t = P + I_t,$$

即

$$A_t = P + tPr,$$

可得本利和与计息时间的函数关系, 即单利模型为

$$A_t = P(1 + tr).$$

把 $P = 2$ 万元, $r = 10\%$, $t = 3$ 年代入得

$$A_3 = 2(1 + 3 \times 0.1) = 2.6 \text{ (万元)},$$

即 3 年后本利和是 2.6 万元.

例 5 复利模型: 所谓复利计息, 就是将每期利息于每期之末加入该期本金, 并以此为新本金再计算下期利息. 某人在银行存现金 P 元, 年利率 r , 每年结算一次, 利息仍留在存款中, 问在 t 年之后, 本利和为多少.

解 设本利和为 A_t . 因为每年本金和利息仍留在存款中, 所以

1 年后的本利和 $A_1 = P(1 + r)$,

2 年后的本利和 $A_2 = A_1(1 + r) = P(1 + r)^2$,

.....

t 年后本利和 $A_t = P(1 + r)^t$,

由此得本利和复利计算模型为

$$A_t = P(1 + r)^t.$$