龙门新奥赛丛书

点击金牌

冲击奥赛数学金牌

主　编　王金战　李兴怀　徐文兵　李庆胜

龍門書局
www.Longmen.com.cn

龙门新奥赛丛书

冲击奥赛数学金牌

主　　编：王金战　李兴怀　徐文兵　李庆胜
副 主 编：王　林　孙公春
执行编委：韩安平　印　光

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

冲击奥赛数学金牌/王金战等主编.—北京:龙门书局,2004.6

(点击金牌)

ISBN 7-80191-343-4

Ⅰ.冲…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学课-高中-数学参考资料

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 034653 号

责任编辑:印　光　李致朋/封面设计:郭　建

龍門書局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.Longmen.com.cn

北京人卫印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2004 年 6 月第　一　版　　开本:787×1092　1/16

2004 年 6 月第一次印刷　　印张:16 1/4

印数:1—20 000　　字数:457 600

定　价:20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

每年的10月中旬，是全国高中数学联赛举行的日子，教育部的政策是：**获省市赛区一等奖者，可以保送重点大学，可以在高考中加20分。**笔者多年潜心于高考和竞赛的辅导及研究，深切感受到：**高考和竞赛日趋统一，要想在高考中获取高分，没有参加过竞赛难度的训练，几乎不可能。**

所以数学竞赛受到广大数学爱好者的重视也就不足为奇了。为此，我们在全国名校中组织了一批有着丰富教学经验的高考、竞赛双料辅导专家，把多年积累的精华整理加工、提炼升华，又通过广泛征求国家集训队选手的意见，经过他们的认真修改和补充，最终推出此套读物。此系列包括《冲击高考数学满分》和《冲击奥赛数学金牌》两册，《冲击高考数学满分》是高考大纲中主要内容的提高和升华，主要面向如下三类读者：**一类是有希望考上清华北大的学生；二类是高考数学有把握得120分并想继续向更高分冲击的数学成绩优秀者；三类是立志参加数学竞赛者。**《冲击奥赛数学金牌》覆盖了数学竞赛大纲的所有内容，**主要读者是参加全国高中数学联赛的学生。**也就是说，本系列书面向的读者群体是中学生中的优秀群体。

本系列书作者均为全国名校中的名师，他们是：

王金战　中国人民大学附属中学实验班教师、中学高级教师、全国优秀教师、北京市中青年骨干教师。有3篇论文获全国优秀论文一等奖，出版过6本教学专著。2002年所辅导的学生参加全国高中数学联赛12人获全国一等奖，占北京获一等奖人数的1/3，并有2人进入冬令营，1人进国家集训队。2003年所任班主任的班级13人保送清华大学、北京大学，6人被耶鲁大学、剑桥大学等世界名校录取，37人考入清华大学、北京大学。

李兴怀　华南师大附中特级教师、中国数学奥林匹克高级教练员、全国优秀教师、第44届国际数学奥林匹克竞赛观察员。辅导的学生在国际奥林匹克竞赛中获4金1银，连续3次获"陈省身杯"团体总分第一名。

杨冠夏　青岛二中特级教师、全国模范教师、享受国务院政府津贴的教育专家、青岛市奥校主教练。辅导的学生2人获国际奥林匹克竞赛金牌。

李庆胜　山东省实验中学实验班高级教师、中国数学奥林匹克首批高级教练员、山东省济南市拔尖人才、学科带头人、十佳优秀教育工作者。1996年作为国家队教练带队赴俄罗斯参赛，所辅导的学生在国际奥林匹克竞赛中获1枚金牌(满分)，1枚银牌。

徐文兵　清华大学附属实验中学全国理科试验班教师、理学博士、第43届中国数学奥林匹克教练组成员。辅导的学生获2枚国际奥林匹克竞赛金牌(满分)，近百人在各级别的数学竞赛中获奖，3人次入选数学冬令营。

伞德强　大庆实验中学实验班高级教师、中国数学奥林匹克高级教练员、全国"师德

先进个人”、黑龙江省高中数学兼职教研员、黑龙江省骨干教师。辅导的学生有 12 人获全国高中数学联赛一等奖。

张卫兵　黄冈中学实验班教师、黄冈中学奥赛主教练、全国骨干教师、湖北省优秀青年教师。辅导的学生 1 人进国家集训队，6 人获全国一等奖。

王忠钦　北京师范大学附属实验中学全国理科试验班教师。几年来所教的学生中有 60 多人次获得北京市数学竞赛一等奖，20 多人次获得全国数学联赛一等奖，曾任北京教育台第 3 课堂、中央电视台第 10 频道科学历程嘉宾主持。

赵维阅　北京市 12 中实验班高级教师、国家奥林匹克优秀教练员、市级教学能手。长期从事数学竞赛教学工作，教学经验丰富，辅导的学生多人次获得全国高中数学联赛决赛(CMO)金、银牌。

王林　青岛市奥校教练员、青岛市 25 中教师、国家奥林匹克优秀教练员。出版业务专著 12 部，辅导的学生 2 人获国际奥林匹克竞赛金牌。

孙公春　大连育明高中实验班高级教师、辽宁省全国高中数学联赛预赛命题组成员、全国高中数学联赛优秀教练员。辅导的学生 2 人进冬令营，多人获全国一等奖。

希望凝集众多专家心血的《冲击高考数学满分》和《冲击奥赛数学金牌》能成为众多学习优秀者在高考中获胜的最佳读物和参加数学竞赛斩金夺银的得力助手。

编　者

目录

第一讲　平面几何的重要定理及应用

知识网络

1. 梅涅劳斯定理

M,N,P 分别为$\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 所在直线上的点，则 M,N,P 三点共线的充要条件是

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

2. 塞瓦定理

M,N,P 分别为$\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 所在直线上的点，则 CM,AN,BP 三线共点的充要条件是

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

3. 西摩松定理

从一点到一个三角形的三边所在直线作垂线，当且仅当这点在这三角形的外接圆上时，垂足共线.（这直线称这点关于这个三角形的西摩松线）

4. 托勒密定理

四边形 $ABCD$ 内接于圆的充要条件是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$$

5. 线段比与面积比的转化

D 是$\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上的一点，E 是直线 AD 上的一点，则$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{S_{\triangle EBD}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}$

6. 张角定理

D 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAD}{AC}+\frac{\sin\angle CAD}{AB}=\frac{\sin\angle BAC}{AD}$$

7. 欧拉线定理

三角形的外心、重心、垂心共线，且垂心到重心的距离是重心到外心的距离的 2 倍

8. 欧拉定理

三角形的外心、内心分别记 O、I，外接圆半径分别记 R、r，$OI=d$，则有
$R(R-2r)=d^2$

9. 九点圆定理

以三角形的外心和重心的连接线段的中点为圆心、外接圆半径的一半为半径的圆经过九个特殊点：各高的垂足、各边的中点、顶点与重心的连接线段的中点.（这圆称三角形的九点圆或费尔巴哈图）

10. 三角形的重要元素的不等式

$\triangle ABC$ 中，记 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，以 A，B，C 为顶点的内角分别记A，B，C，面积记$\triangle$，外接圆半径记 R，内切圆半径记 r，则有：

(1)$|b-c|<a<b+c$

(2)$a \vee b \Leftrightarrow A \vee B \Leftrightarrow \sin A \vee \sin B$

(3)$R\geqslant 2r$，当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时，取等号

(4)$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$，当且仅当$\triangle ABC$ 为正三角形时，取等号(魏岑伯克不等式)

11. 费马点

(1)到三角形三个顶点的距离的和最小的点称费马点(又称费马—托里拆利点)

(2)当三角形的内角都小于 120°时，费马点是三角形的正等角中心(对各边张角都是 120°的点)

(3)当三角形有一个角大于或等于 120°时，费马点是这个角的顶点

12. 法尼阿诺—许瓦兹定理

以锐角三角形的三边上的各一个点为顶点的三角形的周长，当且仅当这个点恰为三高的垂足时最短(当三角形是直角三角形或钝角三角形时，这个三角形退化为最长边上的高的重复)

13. 托勒密不等式

四边形 $ABCP$，必有 $AB\cdot CP+BC\cdot AP\geqslant AC\cdot BP$，当且仅当四边形 $ABCP$ 存在外接圆时，等式成立

14. 等周定理

(1)在周长一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的面积最大

(2)在周长一定的简单闭曲线的集合中，圆的面积最大

(3)在面积一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的周长最小

(4)在面积一定的简单闭曲线的集合中，圆的周长最小

例题精讲

【例 1】 梅涅劳斯定理的证明

(1)如图 1-1 所示，直线与 ABC 的三边所在直线 AB，BC，CA 分别相交于M，N，P.

求证：$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$.

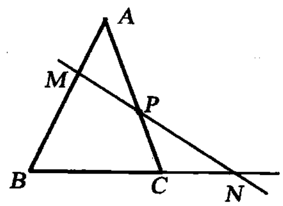

图 1-1

分析一：本题可采取多种方法证明，比较简单的方法是把式中的 6 条线段都看作直线 MN 的斜线段，过 A,B,C 分别作直线 MN 的 3 条垂线段，则式中的 6 条 MN 的斜线段的 3 个比转化为直线 MN 的 3 条垂线段的 3 个比，相约后得 1. 这种方法称为"化斜为垂".

证明一：作直线 MN 的垂线段 AA_1, BB_1, CC_1，如图 1-2 所示，则

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}$$

$$=\frac{AA_1}{B_1B}\cdot\frac{BB_1}{C_1C}\cdot\frac{CC_1}{A_1A}=1.$$

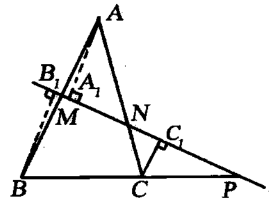

图 1-2

分析二：通过作平行线，将式中的线段的比转化为同一直线上或两平行线上的线段的比以相约得解.

证明二：作 $CC_1 /\!/ AB$ 交直线 MN 于 C_1，如图 1-3 所示，则

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}$$

$$=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BM}{C_1C}\cdot\frac{CC_1}{MA}$$

$$=1.$$

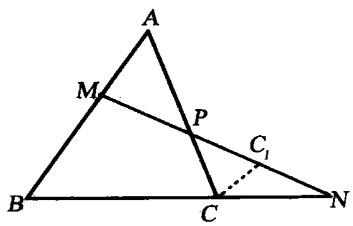

图 1-3

分析三：将线段的比转化为三角形面积的比，以相约得解.

将线段的比转化为三角形面积的比，常用的图形和根据为

①如图 1-4(a)、(b)所示

$$\frac{BP}{PC}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{S_{\triangle QBP}}{S_{\triangle QCP}}=\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}}$$

②$\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 满足：$\angle A_1=\angle A_2$ 或 $\angle A_1+\angle A_2=\pi$，则有：$\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}}=\dfrac{A_1B_1\cdot A_1C_1}{A_2B_2\cdot A_2C_2}$.

证明三：①以 $\triangle Ⅰ$，$\triangle Ⅱ$，…表示图 1-5 中相应三角形的面积，则

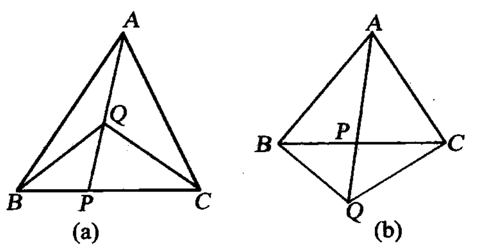

图 1-4

$$\frac{AM}{MB}=\frac{\triangle Ⅰ}{\triangle Ⅱ}=\frac{\triangle Ⅴ}{\triangle Ⅲ+\triangle Ⅳ}$$

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\triangle Ⅲ+\triangle Ⅳ}{\triangle Ⅳ}$$

$$=\frac{\triangle Ⅰ+\triangle Ⅱ+\triangle Ⅴ}{\triangle Ⅴ}$$

$$\frac{CP}{PA}=\frac{\triangle Ⅲ}{\triangle Ⅰ+\triangle Ⅱ}=\frac{\triangle Ⅳ}{\triangle Ⅴ}$$

于是 $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}$

$$=\frac{\triangle Ⅴ}{\triangle Ⅲ+\triangle Ⅳ}\cdot\frac{\triangle Ⅲ+\triangle Ⅳ}{\triangle Ⅳ}\cdot\frac{\triangle Ⅳ}{\triangle Ⅴ}$$

$$=1.$$

②如图 1-5 所示，$\dfrac{S_{\triangle AMP}}{S_{\triangle BMN}}=\dfrac{AM\cdot MP}{BM\cdot MN}$，$\dfrac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle CPN}}=\dfrac{MN\cdot BN}{NP\cdot CN}$，

$\dfrac{S_{\triangle CPN}}{S_{\triangle AMP}}=\dfrac{CP\cdot NP}{PA\cdot PM}$，三式相乘得

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

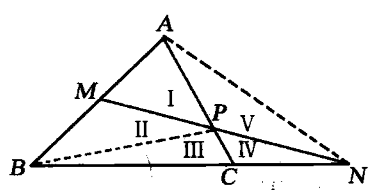

图 1-5

（据说，这种方法因其对称性被爱因斯坦认为是最美的方法）

分析四：利用正弦定理化边为角. 3 个比的前项和后项可组成 3 个三角形 $\triangle AMP$，$\triangle MBN$，$\triangle NCP$

的两条边,故可用正弦定理转化为3对角的正弦的比,相约得解.

证明四:如图1-6所示,

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}$$
$$=\frac{AM}{PA}\cdot\frac{BN}{MB}\cdot\frac{CP}{PA}$$
$$=\frac{\sin\angle APM}{\sin\angle AMP}\cdot\frac{\sin\angle BMN}{\sin\angle N}\cdot\frac{\sin\angle N}{\sin\angle NPC}$$
$$=\frac{\sin\angle APM}{\sin\angle NPC}\cdot\frac{\sin\angle BMN}{\sin\angle AMP}\cdot\frac{\sin\angle N}{\sin\angle N}$$
$$=1.$$

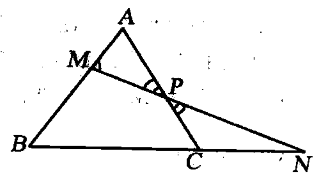

图1-6

分析五:解析法或向量法.给出 A,B,C 的坐标,设出 $\overrightarrow{AM}=\lambda_1\overrightarrow{MB},\overrightarrow{BN}=\lambda_2\overrightarrow{NC},\overrightarrow{CP}=\lambda_3\overrightarrow{PA}$,则可得 M,N,P 的坐标,再根据 M,N,P 共线,则可得 $|\lambda_1\lambda_2\lambda_3|=1$.

证明五:以 B 为原点,射线 BC 的方向为 x 轴的正方向建立直角坐标系,如图1-7所示,设 $C(c,0)$.

$A(a,h)(a\neq0,h\neq0)$,则 $M\left(\frac{a}{1+\lambda_1},\frac{h}{1+\lambda_1}\right),N\left(\frac{\lambda_2c}{1+\lambda_2},0\right),P\left(\frac{c+\lambda_3a}{1+\lambda_3},\frac{\lambda_3h}{1+\lambda_3}\right)$

由 M,N,P 三点共线,知:

$$\frac{\lambda_2c}{1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_3h}{1+\lambda_3}+\frac{c+\lambda_3a}{1+\lambda_3}\cdot\frac{h}{1+\lambda_1}$$
$$=\frac{h}{1+\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2c}{1+\lambda_2}+\frac{\lambda_3h}{1+\lambda_3}\cdot\frac{a}{1+\lambda_1}$$

即 $(1+\lambda_1)\lambda_2\lambda_3ch+(1+\lambda_2)(c+\lambda_3a)h$

$=(1+\lambda_3)\lambda_2ch+(1+\lambda_2)\lambda_3ah$

即 $(1+\lambda_1)\lambda_2\lambda_3+(1+\lambda_2)=(1+\lambda_3)\lambda_2$

即 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$

故 $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$.

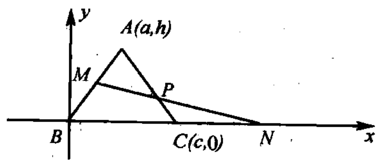

图1-7

(2) M,N,P 分别为 $\triangle ABC$ 三边 AB,BC,CA 所在直线上的点,且 $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$,求证: M,N,P 共线.

证明:(用同一法)

设直线 MN 交 CA 于 P',如图1-8所示

由证明五可知

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP'}{P'A}=1$$

对比已知,得

$$\frac{CP'}{P'A}=\frac{CP}{PA}$$

故 P' 与 P 为同一点

故 M,N,P 共线.

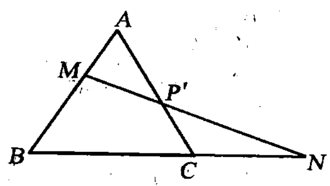

图1-8

[方法提炼]

1. 定理的证明采用了比例线段法,面积法,解三角形法,解析法,同一法等,这些方法都是解决平面几何问题的常用方法.

2. 梅涅劳斯定理给出了一个基本图形:四线形(如图1-9).图中的4条线两两相交且无三线共点,

其中每一条直线都与另三条直线所围成的三角形的三边所在直线交于一点，这3个交点中在边上的点的个数为0或2(在边的延长线上的点的个数相应为3或1).问题图形中出现了四线形,则可考虑应用梅涅劳斯定理.由定理可以得出:四线形中的每一条直线上都有3条线段,其中任意两条线段的比共6个,且知其一则全可得;而知道了其中两条直线上某两条线段的比,则4条直线上任意两条线段的比皆可求得.

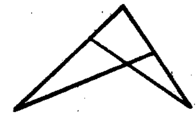

图 1-9

【例 2】 塞瓦定理的证明

(1) M,N,P 分别为$\triangle ABC$的三边AB,BC,CA上的点,AN,BP,CM共点于O,如图1-10所示,求证:

$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{AP}=1$.

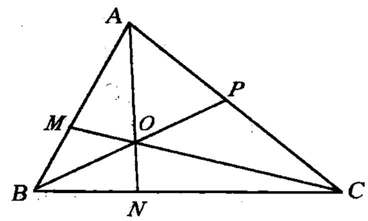

图 1-10

分析:用面积法十分简单,可将3个比分别化为$\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COA$中的2个三角形的面积比,相约得解.

证明:$\frac{AM}{MB}=\frac{S_{\triangle COA}}{S_{\triangle BOC}},\frac{BN}{NC}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COA}},\frac{CP}{PA}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}$

于是$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$.

(2) M,N,P分别为$\triangle ABC$的三边AB,BC,CA上的点,同图1-10,且$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$.

求证:AN,BP,CM共点.

分析:用同一法证明.

证明:设AN、BP相交于O,直线CO交AB于M',

则有$\frac{AM'}{M'B}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$

由已知$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$

故$\frac{AM'}{M'B}=\frac{AM}{MB}$

于是M'与M为同一点.

故AN,BP,CM共点O.

【例 3】 笛沙格定理的证明

(1) $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$满足:对应顶点的边线即A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2共点于O(称$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$有透视中心O),如图1-11所示,求证:对应边所在直线的交点即A_1B_1与A_2B_2的交点D_1,B_1C_1与B_2C_2的交点D_2,C_1A_1与C_2A_2的交点D_3在一条直线上(称这直线为$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的透视轴).

分析:用梅涅劳斯定理证明.

证明:直线$C_2A_2D_3$截$\triangle OC_1A_1$,有

$$\frac{OC_2}{C_2C_1}\cdot\frac{C_1D_3}{D_3A_1}\cdot\frac{A_1A_2}{A_2O}=1 \quad ①$$

直线$A_2B_2D_1$截$\triangle OA_1B_1$有

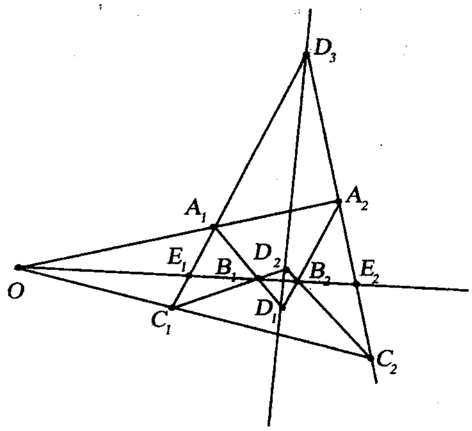

图 1-11

$\frac{OA_2}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1$ ②

直线 $B_2C_2D_2$ 截$\triangle OB_1C_1$ 有

$\frac{OB_2}{B_2C_1}\cdot\frac{B_1D_2}{D_2C_1}\cdot\frac{C_1C_2}{C_2O}=1$ ③

以上三式相乘得

$\frac{C_1D_3}{D_3A_1}\cdot\frac{A_1D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1D_2}{D_2C_1}=1$

D_1,D_2,D_3 为$\triangle A_1B_1C_1$ 三边所在直线上的三点，故 D_1,D_2,D_3 共线，即$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle A_2B_2C_2$ 有透视轴.

(2)$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle A_2B_2C_2$ 满足：A_1B_1 与 A_2B_2 的交点 D_1、B_1C_1 与 B_2C_2 的交点 D_2、C_1A_1 与 C_2A_2 的交点 D_3 在一条直线上，即$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle A_2B_2C_2$ 有透视轴，如图 1-11 所示.

求证：A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 共点，即$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle A_2B_2C_2$ 有透视中心.

分析：假设 A_1A_2、C_1C_2 交于 O，证明 O,B_1,B_2 共线.

证明：对$\triangle A_1A_2D_1$ 和$\triangle C_1C_2D_2$ 直接应用(1)的结论：由 A_1C_1、A_2C_2、D_1D_2 共点 D_3（即$\triangle A_1A_2D_1$ 和$\triangle C_1C_2D_2$ 有透视中心 D_3）得 A_1A_2 和 C_1C_2 的交点 O，A_2D_1 和 C_2D_2 的交点 B_2，D_1A_1 和 D_2C_1 的交点 B_1 共线.

[方法提炼] 梅涅劳斯定理是证明线共点，点共线的重要依据. 本题(1)(2)合称笛沙格定理，简述为：两个三角形有透视中心（对应顶点连线共点）与有透视轴（对应边交点共线）是等价的，并且可以称这两个三角形是互为透视的. 特殊地，如果两个三角形的对应边平行，透视轴视为无穷远直线，透视中心视为位似中心. 由(2)的解法知，笛沙格定理也是证明线共点，点共线的重要依据.

【例 4】 (IMO 试题)

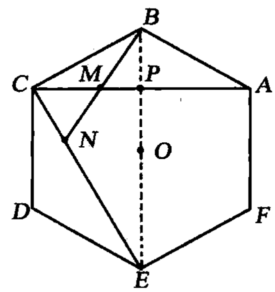

图 1-12

正六边形 $ABCDEF$，B,M,N 共线，M 在 AC 上，N 在 CE 上，且有 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$，如图 1-12 所示，求 r.

分析一：构造梅涅劳斯定理图形，应用梅涅劳斯定理直接解得.

解法一：连接 BE 交 CA 于 P，如图 1-12 所示，易知 P 是 AC 的中点，BE 过中心 O，且 $BP=\frac{1}{4}BE$. 设 $AC=CE=1$，

直线 BMN 分别交$\triangle CEP$ 的三边 CE,EP,PC 所在直线于 N,B,M，由梅涅劳斯定理

$\frac{CN}{NE}\cdot\frac{EB}{BP}\cdot\frac{PM}{MC}=1$

即$\frac{r}{1-r}\cdot 4\cdot\frac{r-\frac{1}{2}}{1-r}=1$

$(1-r)^2=4r(r-\frac{1}{2})$

解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

分析二：面积法.

解法二：将线段比转化为面积比. 设 $S_{\triangle ABC}=1$，如图 1-13 所示，则

$\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CM}{AC}=\frac{AC-AM}{AC}=1-r$

故 $S_{\triangle BCM}=1-r$

$\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CE}=(1-r)r$

设 BE 交 AC 于 P，则 $BP=\frac{1}{4}BE$，$BP=\frac{1}{3}PE$

故 $S_{\triangle ACE}=3S_{\triangle ABC}=3$

于是 $S_{\triangle CMN}=3(1-r)r$

又 $\frac{S_{\triangle BCN}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{CN}{CE}=r$

而 $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}ABCE}=\frac{1}{2}\times 4=2$

故 $S_{\triangle BCN}=2r$

由 $S_{\triangle BCM}+S_{\triangle CMN}=S_{\triangle BCN}$ 知

$1-r+3(1-r)r=2r$

整理，得 $3r^2=1$

故 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

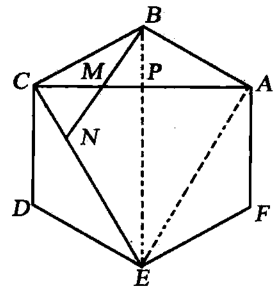

图 1-13

【例 5】（1999·联赛试题）

如图 1-14，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G，求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

分析一：用角平分线为轴作反射构造，轴对称图形，再用同一法证明 AE 与 AG 的对称线重合.

再利用条件：AC,BE,DG 三线共点，连接 BD 以利用塞瓦定理.

证明一：以 AC 为轴，对 $\triangle ABC$ 作轴对称. 设 B、G 的对称点分别为 B'、G'，则 A,D,B' 共线，B',G',C 共线. 求证：E 在 AG' 上即 A,E,G' 共线.

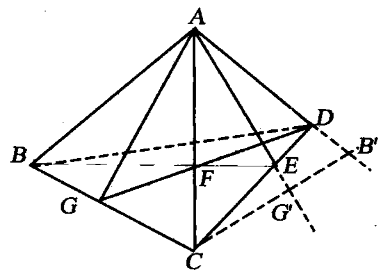

图 1-14

对 $\triangle B'CD$ 考虑运用梅涅劳斯定理，求证：

$$\frac{B'G}{G'C}\cdot\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB'}=1 \quad ①$$

连接 BD 交 AC 于 H. 由 BE,CH,DG 共点 F，对 $\triangle BCD$ 运用塞瓦定理，得

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DH}{HB}=1 \quad ②$$

而 $BG=B'G'$，$GC=G'C$

又由三角形内角平分线定理，知 $\frac{DH}{HB}=\frac{DA}{AB}=\frac{DA}{AB'}$

将上三式代入②，得①

故 A,E,G' 共线，即 E 在 AG' 上，故 $\angle GAC=\angle EAC$.

分析二：为利用条件：AC,BE,DG 三线共点，连接 BD 以利用塞瓦定理. 结合运用三角形内角平分线定理，得新的线段比等式，再利用位似变换造出相似形，得比例式，进而得出相等线段，造成全等形，得解. 用这种方法需有较高的平面几何功底.

证明二：连接 BD 交 BC 于 H，过 C 作 AB 的平行线交 AG 的延长线于 I，过 C 作 AD 的平行线交 AE 的延长线于 J，如图 1-15 所示.

由塞瓦定理，知

$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$

由三角形内角平分线定理,知:

$\frac{BH}{HD}=\frac{BA}{AD}$

故$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$

由$\triangle ABG\backsim\triangle ICG$,$\triangle ADE\backsim\triangle JCE$ 知

$\frac{CG}{GB}=\frac{CI}{AB},\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{CJ}$

故$\frac{CI}{AB}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{AD}{CJ}=1$

于是 $CI=CJ$

又由$\angle BAC=\angle DAC$,$CI\parallel AB$,$CJ\parallel AD$,知:

$\angle ACI=180^\circ-\angle BAC=180^\circ-\angle DAC=\angle ACJ$

$AC=AC$

故$\triangle ACI\cong\triangle ACJ$

于是$\angle IAC=JAC$

即$\angle GAC=\angle EAC$.

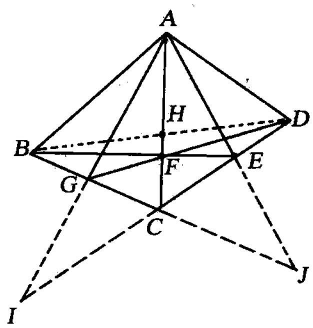

图 1-15

分析三:由条件$\angle BAC=\angle DAC$,可考虑建立直角坐标系,用解析法计算证明.

证明三:以 A 为坐标原点,AF 为 y 轴建立直角坐标系,如图 1-16,由已知,可设

$C(0,c)$,$F(0,f)$

$D(d,-kd)$,$B(b,kb)$

则 DC:$y=\frac{c+kd}{-d}x+c$

即$\frac{x}{\frac{cd}{c+kd}}+\frac{y}{c}=1$ ①

BC:$y=\frac{kb-c}{b}x+c$

即$\frac{x}{\frac{bc}{c-kb}}+\frac{y}{c}=1$ ②

BF:$y=\frac{kb-f}{b}x+f$

即$\frac{x}{\frac{bf}{f-kb}}+\frac{y}{f}=1$ ③

DF:$y=\frac{f+kd}{-d}x+f$

即$\frac{x}{\frac{df}{f+kd}}+\frac{y}{f}=1$ ④

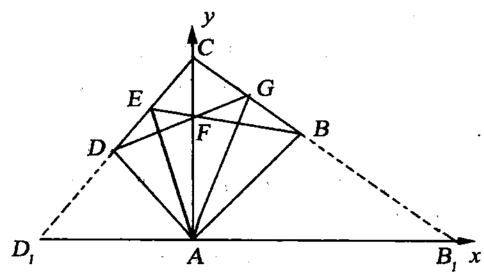

图 1-16

由 G 为DF、BC 的交点,故由②、④得:

$$k_{AG}=\frac{y_G}{x_G}=\frac{\frac{f+kd}{df}-\frac{c-kb}{bc}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{f}}=\frac{\frac{1}{b}-\frac{k}{f}-\frac{1}{d}-\frac{k}{c}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{f}}$$

同样,由①、③可得 k_{AE}

故 $k_{AG}+k_{AE}=0$

即$\angle GAC=\angle EAC$

[方法提炼] 在难以找到直观演绎证法时，解析法不失为一种现实的方法，此时要设法尽量减少计算量．将有关直线方程都写成截距式，便于求出交点的纵横坐标之比，而不必求出交点的坐标．

分析四：面积法、三角法、用梅涅劳斯定理将线段比转化为面积比，再将面积比转化为三角函数比．

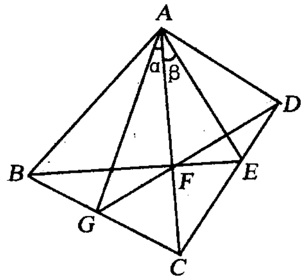

图 1-17

证明四：如图 1-17 所示，记$\angle BAC=\angle DAC=\theta$，

$\angle GAC=\alpha,\angle EAC=\beta$，

往证：$\alpha=\beta$．

直线 GFD 分别交$\triangle BCE$ 的三边 BC,CE,EB 所在直线于 G,D,E．由梅涅劳斯定理，知

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=1$$

又$\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{S_{\triangle BAG}}{S_{\triangle GAC}}=\dfrac{AB\sin(\theta-\alpha)}{AC\sin\alpha}$

$$\frac{CD}{DE}=\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle DAE}}=\frac{AC\sin\theta}{AE\sin(\theta-\beta)}$$

$$\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle FAB}}=\frac{AE\sin\beta}{AB\sin\theta}$$

故$\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}=1$

即$(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)\sin\beta=(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\sin\alpha$

即 $\sin\theta\sin(\beta-\alpha)=0$

由 $\sin\theta\neq0$，故 $\sin(\beta-\alpha)=0$

即 $\beta-\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

由已知，得 $\beta=\alpha$．

[方法提炼] 这里将直观、演绎方法与面积方法，三角方法巧妙结合得解，甚妙！

分析五：思路同分析一，用计算方法证 A,E,G 共线．

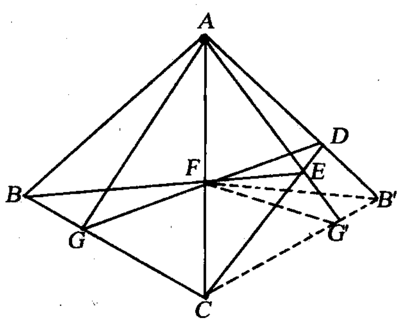

图 1-18

证明五：如图 1-18 所示，以 AC 为轴，对图形作轴对称，设 B、G 的对称点分别为 B'，G'，则 B' 在 AD 上，G' 在 $B'C$ 上，往证：A,E,G' 三点共线．

设$\angle EFB'=\alpha,\angle DFE=\angle BFG=\angle B'FG'=\beta$，

$\angle AFD=\angle GFC=\angle G'FC=\gamma$

对$\triangle DB'C$ 和 A,E,G'，考虑梅涅劳斯定理的逆定理：

$$\frac{DA}{AB'}=\frac{S_{\triangle DFA}}{S_{\triangle AFB'}}=\frac{FD\sin\gamma}{FB'\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\frac{B'G'}{G'C}=\frac{S_{\triangle B'FG'}}{S_{\triangle G'FC}}=\frac{FB'\sin\beta}{FC\sin\gamma}$$

$$\frac{CE}{ED}=\frac{S_{\triangle CFE}}{S_{\triangle EFD}}=\frac{FC\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{FD\cdot\sin\beta}$$

于是$\dfrac{DA}{AB'}\cdot\dfrac{B'G'}{G'C}\cdot\dfrac{CE}{ED}=1$

故 A,G',E 共线

故$\angle EAC=\angle G'AC=\angle GAC$．

[方法提炼] 利用反射变换完善图形后，自然转化为证明三点共线问题，相对证明三容易想到．

分析六：作出 AE 关于AC 的对称直线，证明该直线与 AG 为同一直线，再转化为证三点共线并用张角定理证明．

证明六:如图 1-19 所示,作 AE 关于 AC 的对称直线交 BC 于 G',可证 G' 与 G 为同一点,求证 D,F,G' 共线,可对 A 点用张角定理,即证:

$$\frac{\sin\angle FAD}{AG'}+\frac{\sin\angle FAG'}{AD}=\frac{\sin\angle G'AD}{AF}$$

设 $\angle BAC=\angle DAC=\theta,\angle G'AC=\angle EAC=\alpha$

即证 $\dfrac{\sin\theta}{AG'}+\dfrac{\sin\alpha}{AD}=\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}$

由 A 点对 B,F,E 和 B,G',C 和 C,E,D 分别应用张角定理,得:

$$\frac{\sin\theta}{AE}+\frac{\sin\alpha}{AB}=\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF} \qquad ①$$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC}+\frac{\sin\alpha}{AB}=\frac{\sin\theta}{AG'} \qquad ②$$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC}+\frac{\sin\alpha}{AD}=\frac{\sin\theta}{AE} \qquad ③$$

①-②+③得

$$\frac{\sin\theta}{AG'}+\frac{\sin\alpha}{AD}=\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}$$

于是 G',D,F 共线.

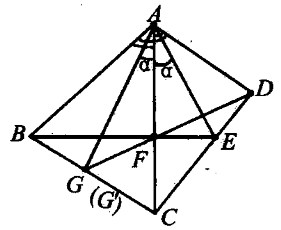

图 1-19

[**方法提炼**] 作反射变换后,利用同一法转化为证三点共线.利用张角定理既可利用三点共线的条件,又可推出三点共线的结论.

【例 6】 西摩松定理

由一点 P 向一个三角形的三边所在直线作垂线,所得三个垂足为顶点的三角形叫做原三角形关于 P 的垂足三角形.

当 P 是三角形的垂心时,垂足三角形即高足三角形;当 P 是三角形的外心时,垂足三角形即中位线三角形.

设 R 是△ABC 的外接圆半径,记 $PA=x,PB=y,PC=z,AB=c,BC=a,CA=b$,则由正弦定理可得:垂足三角形的边长分别为 $\dfrac{ax}{2R},\dfrac{by}{2R},\dfrac{cz}{2R}$.

当且仅当 P 在三角形的外接圆上时,三个垂足共线,该直线称西摩松线(有人认为由华列士发现)西摩松线看作垂足三角形的退化情况.

【例 7】

(1)在"筝形"$ABCD$ 中,如图 1-20 所示,$AB=AD,BC=CD$,过 AC、BD 的交点 O 任作直线,分别交 AD 于 E,交 BC 于 F,交 AB 于 G,交 CD 于 H. GF,EH 分别交 BD 于 I、J,求证:$IO=OJ$.

证明:不妨设 $\angle BOF\geqslant\angle BOG$,以 AC 为对称轴,作 OF 的对称线段 OF',则 H 在线段 DF' 上,连接 $F'J$ 并延长交 AD 于 G',连接 $G'O$,在四边形 $EOF'D$ 中,有 $\angle EOD=\angle DOF'$,由'99 联赛二试第 1 题结论知:$\angle G'OD=\angle HOD=\angle GOB$,由对称性可知:△$GOF\cong$△$G'OF'$,故 $IO=OJ$.

(2)如图 1-21 所示,已知 P 为△ABC 外接圆上任意一点,过 P 作 BC,AC,AB 的垂线,垂足分别为 D,E,F.

求证:D,E,F 共线.

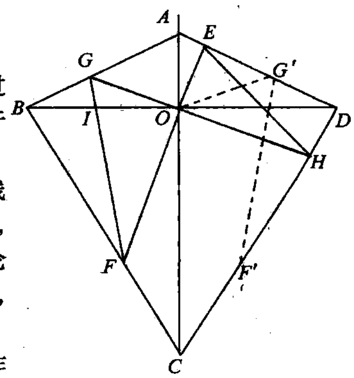

图 1-20

证明:连接 PB,PC,PE,DF,DE,由 A,B,P,C 共圆,

P,B,F,D 共圆,P,D,C,E 共圆知

$\angle PDF+\angle PBF=180°$

$\angle PBF=\angle PCE=\angle PDE$

故$\angle PDF+\angle PDE=180°$

于是 D,E,F 三点共线

又证:连接 FD,FE,PA,PB

由 P,B,F,D 共圆,A,B,P,C 共圆,P,E,A,F 共圆,知

$\angle PFD=\angle PBD=\angle PAC=\angle PFE$

故 D,E,F 三点共线.

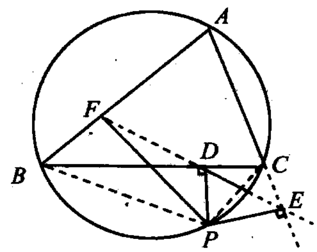

图 1-21

(3)已知:如图 1-22 所示,过 P 作$\triangle ABC$ 的三边所在直线 BC,CA,AB 的垂线,垂足分别为 D,E,F,且 D,E,F 三点共线.求证:A,B,C,P 共圆.

证明:由已知,知:

P,B,F,D 共圆,P,F,A,E 共圆

又 F,D,E 三点共线

故$\angle PBD=\angle PFD=\angle PFE=\angle PAE=\angle PAC$

故 A,B,C,P 共圆.

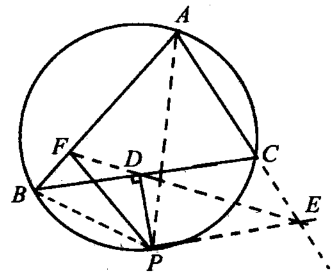

图 1-22

【例 8】　托勒密定理、托勒密不等式的证明

(1)圆的内接四边形的两条对角线的乘积等于两组对边乘积的和.

(2)四边形的两对角线的乘积等于两组对边乘积的和时,四边形内接于一圆.

(3)四边形 $ABCD$,恒有:

$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$

当且仅当 A,B,C,D 共圆时用等号.

以下给出(3)的证明:

分析一:造相似形,得比例线段.

证明一:作$\triangle ABE$,使$\triangle ABE$ 与$\triangle ACD$ 相似且回转方向相同,

连接 BE、ED,如图 1-23 所示

于是 $BE\cdot AC=AB\cdot CD$　　①

又$\angle BAC=\angle EAD$,$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AD}$

故$\triangle ABC\backsim\triangle AED$

于是 $DE\cdot AC=BC\cdot AD$　　②

①+②得

$AC(BE+ED)=AB\cdot CD+BC\cdot AD$

而 $BE+ED\geqslant BD$

故 $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$

当且仅当$\angle ABE=\angle ABD=\angle ACD$ 时,E 在 BD 上,上式用等号,

即当且仅当 A,B,C,D 共圆时,上式用等号.

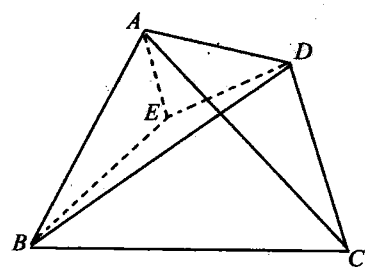

图 1-23

分析二:面积法.

证明二:不妨设$\angle BAD+\angle BCD\geqslant\pi$(否则$\angle ABC+\angle CDA\geqslant\pi$)