高职高专通用系列规划教材

GAOZHI GAOZHUAN TONGYONG XILIE GUIHUA JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 何 彬

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

Harbin Engineering University Press

高职高专通用系列规划教材
GAOZHI GAOZHUAN TONGYONG XILIE GUIHUA JIAOCAI

高等数学

主　编　何　彬
副主编　曹忠华　薛亚宏

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内容简介

本书是作者根据高职高专理工类各专业对高等数学课程的基本要求，结合我院高等数学近几年的教学经验编写而成。全书主要内容包括一元微积分、二元微积分、常微分方程、无穷级数和数学实验与建模简介共13章。

本书适用于高职高专理工类各专业的教学，也可作为相关技术人员及大专类学生自学的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/何彬主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2010.8
ISBN 978-7-81133-662-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.何…　Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第131011号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　　真	0451-82519699
经　　销	新华书店
印　　刷	肇东粮食印刷厂
开　　本	787mm×1 092mm　1/16
印　　张	18
字　　数	433千字
版　　次	2010年8月第1版
印　　次	2010年8月第1次印刷
定　　价	32.00元

http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail: heupress@hrbeu.edu.cn

随着计算机技术的飞跃发展,数学的作用越来越重要。从历史角度考察,数学为物理描写现象与规律提供了语言与工具,反过来物理现象也为数学概念的建立提供了原型。如今数学的应用早已超越了物理学的范围。数学在化学上的应用也早已不是过去说的只有线性方程组。菲尔许尔斯特－珀尔方程和洛特卡－沃尔泰拉方程用来描述生物种群增长的规律,可以帮助人们计算出人口增长速度与人口密度的关系。现代流行词分子生物学的DNA的复杂结构就与深奥的数学拓扑学的扭结理论密切相关。而经济学诺贝尔奖从首届授予计量经济学的奠基人R. Fisher(挪威,1895—1979)和J Tinbergen(荷兰,1903—1994)以来,就与数学结下了不解之缘,历届经济学诺贝尔奖获得者均有厚重的数学功底,其中半数以上的人有直接从事数学研究的背景,更在核心数学的研究中有重大贡献,如黎曼流形嵌入定理、Nashi-Moser叠代法等。社会科学中的管理科学、质量控制、产品设计、运筹优化、金融投资分析、保险业、市场预测、考古学和地质学等都在大量地应用着数学。随着数字化信息技术对我们生活的快速渗透,数学概念和词汇在文化创作和日常生活中的使用也愈加频繁。数学理论与计算机的结合更是产生了五花八门的新技术,从医疗手段到动画制作,从指纹或签字的识别到自动排版技术,从现代通信技术到信息安全处理等,它们应用的不是过去传统的数学而是非常现代的前沿数学。因此,现在所谓的信息化时代,实质上就是一个数学时代。

数学作为人类智慧的结晶,首先是一种较为重要的文化,它的本质特征决定了高等数学教育对大学阶段的学生至少有以下三个方面的作用:

(1)是专业课学习必不可少的知识工具——工具性;

(2)是培养理性思维能力和科学思想方法最好的知识载体;

(3)是提高科学审美意识的重要途径。

高职教育是我国高等教育序列的一部分,它虽然强调的是实践教学,但和传统意义下的专科教育同属一个层次。因此高职的数学教育要发挥它应有的教育功能,不能仅仅满足于“服务专业,够用为度”这一基本要求。《高等数学》最基本最重要的内容是微积分,因其研究对象主要是连续变化的变量问题,属于连续数学,所以具有较强的抽象性和逻辑性。由于连续变化的量广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域,而且很多非连续问题在一定条件下也可转化为连续问题来处理,因此《高等数学》中的各种数学模型应用广泛,是客观世界中最基本的处理各种关系结构的量化模式,也是学习其它许多课程的基础,因此又具有很强的应用性。本书作为高职数学教育的

主要内容,在实用性和理论层次上都是十分适合的。

本书的内容包含了高职教育各专业中所涉及的高等数学基础、数学方法以及数学应用。它是一门各专业必需的基础课,为高职院校学生提供必备的数学素质教育,同时为解决工程技术和管理学科的实际问题提供重要的数学理论和方法。

近年来,为顺应信息技术的要求,在数学教育中对计算的要求降低了,而对数据的收集、归纳、分析、解释和作出判断的要求提高了;对问题解决过程中逻辑演算的要求降低了,而对实际问题模型化、运用模型解释生活现象以及解决实际问题的要求提高了。所有这些都将影响和促进高职数学课程的建设。本书结合我国高职院校数学教学现状及其培养技能型人才的需要,坚持贯彻教育部高教司1998年关于高职高专院校《高等数学课程教学基本要求》而编写的。总结了我院数学课程教学改革十余年的经验,借鉴省内外高职高专院校教改成果,以强化实践技能,突出高职高专的教学特色,选材处理更适合现在的学生状况,教学理念紧跟时代发展。

在本书编写过程中重点突出如下编写特色。

(1)精练教材内容,突出专业特色,选材力求贴近实际,强化解决问题的能力培养。在有限学时内,给学生建立较广泛的数学基础知识。

(2)定位高职高专层次,彰显工程需求,强调数值计算思想。坚持和增加用高等数学方法处理常见的实际问题,使学生容易地理解数学与专业的联系。

(3)注意与中学数学的衔接,内容过渡自然平和。在坚持数学素质教育的原则下,兼顾数学自身理论体系,削减过多过难的理论推导,使教材内容简洁而不失严谨,着重阐明基本概念、基本理论和数学方法。

(4)章节安排紧凑,内容处理大胆新颖。力求做到重点突出,层次分明,例题典型,深入浅出,行文流畅,说理透彻,图表清楚,便于自学。

(5)融入数学文化,教材可读性增强。

全书共分13章,其内容有一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、数学实验、数学模型及CUMCM,并配有适当的客观和主观习题。书中第3章和第4章由夏冰心编写,第8章至第9章由薛亚宏编写,第5章至第6章由高霞编写,第2章和第13章由马伊丽编写,第1章和第7章由曹忠华(黑龙江农垦九三分局党校)编写,其他由何彬编写并统稿。教材总学时为120学时,在教学中,按不同专业需求选择必需的教学内容。数学学时较少的高职院校,各章节的取舍可自行调整。本书适用于高职院校理工各类专业的必修课教材和专科教材,也可作为成人自考人员参考教程。

本书在编写、出版过程中参考或引用了国内外一些专家学者的论荐，同时也得到了学院、教务处、科研处、基础部的领导、出版社以及数学物理教研室各位老师的全力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者水平有限、经验不足，难免存在错误和不妥之处，欢迎各位同仁和读者批评指正。

编　者

2010 年 1 月

CONTENTS 目录

CONTENTS

CONTENTS 目录

第1章 预备知识

数学受到高度尊崇的另一个原因在于:恰恰是数学,给精密的自然科学提供了无可置疑的可靠保证,没有数学,它们无法达到这样的可靠程度。

——爱因斯坦

在中学,数学课程的内容涵盖几何、代数、微积分初步和概率论与数理统计初步等内容。本章我们将简要回顾高中数学的主要内容,为进一步学习高等数学作适当的铺垫和衔接。

1.1 数与集合

数是最古老的数学概念之一,是数学中的基本概念,也是人类文明的重要组成部分。在长达数十世纪的漫长岁月中,人们对数的认识得到了不断深化。数的概念每一次扩充都标志着数学的巨大飞跃。一个时代人们对于数的认识与应用,以及数系理论的完善程度,反映了当时数学发展的水平。今天,我们所应用的数系,已经构造得如此完备和缜密,以至在科学技术和社会生活的一切领域中,数系都已成为基本的语言和不可或缺的工具。

1.1.1 数系是怎样扩张的

数系概念具有两个方面的含义:其一,数系是一些数的集合;其二,在一个数系内可以进行某些运算(通常是指数的加法和乘法),这些运算满足一定的运算律。

所谓数系的扩张往往同运算的逆运算的可行性,或更一般地说,同某些方程解的存在性的讨论有关。

在自然数系中,人们可以进行加法和乘法运算。在一定条件下,还可以进行减法和除法运算。相应地,方程 $x+a=b$ 和 $cx=d(c\neq 0)$ 并非总有解。为了使减法顺利进行,即要使方程 $x+a=b$ 总有解,我们便将自然数系扩充为整数系。但即使在整数系中,方程 $cx=d(c\neq 0)$ 也不是总有解存在的,因此我们又须把整数系扩充为有理数系。

起初,人们对有理数系很满意,因为加减乘除(除数非零)都可以畅通无阻地进行。但人们很快就发现了缺陷,方程 $x^2=2$(即求边长为 1 的正方形的对角线之长)没有有理数的解[①],人们认为这简直不可思议,因而把$\sqrt{2}$这样的数称为无理数。但实数系远不只包括有理

① 这一事实引发数学史上的第一次数学危机。毕达哥拉斯学派是古希腊最古老的哲学学派之一。大约在公元前5世纪,毕达哥拉斯学派的希帕索斯发现:等腰直角三角形的直角边与其斜边不可通约。这个不可通约量的发现和芝诺悖论一起引发了"第一次数学危机"。

希帕索斯正是因为这一数学发现,被毕达哥拉斯学派的人投进了大海,处以"淹死"的惩罚。因为他竟然在宇宙间搞出了这样一个东西来否定毕达哥拉斯学派的信条:宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。

人们就把希帕索斯发现的这个矛盾,叫做希帕索斯悖论。这一悖论的发现,震惊了当时的西方数学界,也引起了古希腊人数学观念的更新。这场"危机"表明,直觉和经验不一定靠得住,推理证明才是可靠的。从此以后,希腊人开始由重视计算转向重视推理,由重视算术学转向重视几何学,并由此建立了几何公理体系。其实,这是数学思想上的一次巨大革命!

数和$\sqrt{2}$这种可以作为某个实数系方程的根的数。后来人们陆续发现了无理数 π,e 以及更多的方根形式的无理数。要完成有理数向实数系的扩张,必须通过更为复杂的过程,从而也产生了许多复杂的扩张理论和方法。如皮亚诺的自然数公理和戴德金分割定理等。终于在 19 世纪后半叶,由维尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)、戴德金(R. Dedekind,1831—1916)和康托(G. Cantor,1845—1918)等人完成了有理数向实数系的扩张。

实数系向复数系的扩张却出人意料地简单。首先,扩张的“动机”产生于求解方程 $x^2+1=0$,而引进虚数单位 i 后,复数集可以写成 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R}\}$,其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集。在数系的扩张过程中,由于在复数系中没有定义大小顺序,从而与顺序有关的一些性质没能继承下来。

我们列举实数的一些性质如下:

①$(x+y)+z=x+(y+z)$(加法结合律);

②$x+y=y+x$(加法交换律);

③若 $x+z=y+z$,则 $x=y$(加法消去律);

④$(xy)z=x(yz)$(乘法结合律);

⑤$xy=yx$(乘法交换律);

⑥若 $xz=yz, z\neq0$,则 $x=y$(乘法消去律);

⑦$z(x+y)=zx+zy$(乘法对加法的分配律);

⑧$x\geqslant y$ 且 $y\geqslant x\Leftrightarrow x=y$;

⑨$x\geqslant y$ 且 $y\geqslant z\Rightarrow x\geqslant z$(实数的大小有传递性);

⑩对任意一对实数 x,y 总有 $x>y$ 或 $x<y$ 或 $x=y$(实数的三岐性);

⑪$a\geqslant b\Rightarrow a+c\geqslant b+c$;

⑫$a\geqslant b, c\geqslant0\Rightarrow ac\geqslant bc$;

⑬对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,存在 $z\in\mathbf{R}$,满足 $x<z<y$(实数的稠密性)。

1.1.2 绝对值与不等式

1. 绝对值

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

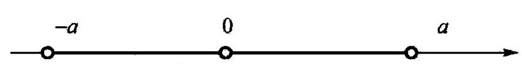

图 1-1 实数绝对值的几何意义

从数轴上看绝对值$|a|$就是点 a 到原点的距离。如图 1-1 所示。

2. 绝对值的一些主要性质

(1) $|a|=|-a|\geqslant0$,当且仅当 $a=0$ 时$|a|=0$

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$; $|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h, h>0$

(4) $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

(5) $|ab|=|a||b|$

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}, b\neq0$

下面给出性质(4)(三角不等式)的证明。

证明:由性质(2)可得

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,-|b|\leqslant b\leqslant |b|$$

以上两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$$

由性质(3),上式等价于 $|a+b|\leqslant |a|+|b|$

把上式的 b 换成 $-b$,得 $|a-b|\leqslant |a|+|b|$

由此可推出

$$|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

$$|A|-\varepsilon<|f(x)|<|A|+\varepsilon$$

1.1.3 几个重要不等式

1. $a^2+b^2\geqslant 2|ab|,|\sin x|\leqslant 1,|\sin x|\leqslant |x|$。

2. 对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i \quad \text{(算术平均值)}$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{(几何平均值)}$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \quad \text{(调和平均值)}$$

有均值不等式 $H(a_i)\leqslant G(a_i)\leqslant M(a_i)$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。

3. Bernoulli 不等式(在中学已用数学归纳法证明过)

对任意 $x>0$,由二项展开式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n$$

$$\Rightarrow (1+x)^n>1+nx,(n>1)$$

1.1.4 几个常见的符号集

1. 数集

N——自然数集;**Z**——整数集;**Q**——有理数集;**R**——实数集。

2. 区间

数轴上一段的所有点组成的集合

表 1-1

符 号	名 称		定 义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$

表 1－1(续)

符　号	名　称		定　义
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x \mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x \mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x \mid x\leqslant a\}$

3. 逻辑符号

(1)符号"$\Rightarrow$"表示"蕴涵"、"推得"或"若……,则……"。

$A\Rightarrow B$:若命题 A 成立,则命题 B 成立;命题 A 蕴涵命题 B;称 A 是 B 的充分条件,同时也称 B 是 A 的必要条件。

例如:n 是整数$\Rightarrow n$ 是有理数

符号"$\Leftrightarrow$"表示"必要充分"、"等价"或"当且仅当"。

$A\Leftrightarrow B$ 表示命题 A 与命题 B 等价;或命题 A 蕴涵命题 B($A\Rightarrow B$),同时命题 B 也蕴涵命题 A($B\Rightarrow A$)。

例如:$A\subset B\Leftrightarrow$任意 $x\in A$,有 $x\in B$。

(2)max 与 min

符号"max"表示"最大",它是 maximum(最大)的缩写。

符号"min"表示"最小",它是 minimum(最小)的缩写。

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个数,例如:

$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$——$n$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大数。

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$——$n$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小数。

(3)连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$

在数学中,常遇到一连串的数相加或一连串的数相乘,例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$等。为简便起见,人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$,即

$$\sum_{i=1}^{n}x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n}x_i = x_1x_2\cdots x_n$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围,把 i 换成别的符号 j,k 等,也同样表示同一和或同一乘积,例如

$$\sum_{j=1}^{n}x_j = x_1+x_2+\cdots+x_n = \sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\prod_{j=1}^{n}x_j = x_1x_2\cdots x_n = \prod_{i=1}^{n}x_i$$

人们通常把这样的指标称为"哑指标"。

我们举几个例子说明连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ 的应用,例如阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^{n}j = n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1$$

二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

其中

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2 初等函数①

函数是中学数学的核心内容。从常量数学到变量数学的转变,是从函数概念的系统学习开始的。函数是连接常量数学与变量数学的纽带,代数式、方程、不等式、数列、排列组合、极限和微积分等都与函数知识有直接的联系。

1.2.1 函数概念

1. 定义

设 D 是非空数集。若存在对应关系 f,对 D 中任意数 x,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y \in M$,则称 f 是定义在 D 上的函数,表示为

$$y = f(x), x \in A$$

说明:

(1)数 x 对应的数 y 被称为 x 的函数值,表示为 $y = f(x)$;

(2)x 被称为自变量,y 被称为因变量;

(3)数集 D 被称为函数 f 的定义域,函数值的集合 $M = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ 被称为函数 f 的值域。

根据函数定义不难看到,一个函数由它的定义域和对应关系确定。

2. 函数的实例

例 1-1 某单位计划建筑一矩形围墙,现有材料可筑墙的总长度为 100 m,试求矩形的面积 S 与矩形长 x 的函数关系式。

解 设矩形的长为 x,则宽为 $50-x$,$S = x(50-x)$,故函数关系式为

$$S = x(50-x)$$

因为当自变量 x 取负数或不小于 50 的数时,S 的值是负数,即矩形的面积为负数,这与实际问题相矛盾,所以还应补上自变量 x 的范围:$0<x<50$,即函数关系式为

$$S = x(50-x), (0<x<50)$$

这个例子说明,在用函数方法解决实际问题时,必须要注意到函数定义域的取值范围对实际问题的影响。

例 1-2 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-3 & ,x \geq 100 \\ f[f(x+5)] & ,x<100 \end{cases}$,求 $f(89)$。

解 这是考查对函数概念的理解,表现为分段函数与复合函数式的变换问题,需要反复

① 在中国清代数学家李善兰(1811—1882)翻译的《代数学》一书中首次用中文把"function"翻译为"函数",此译名沿用至今。对为什么这样翻译这个概念,书中解释说"凡此变数中函彼变数者,则此为彼之函数";这里的"函"是包含的意思。

进行数值代换。

$$\begin{aligned} f(89) &= f(f(94)) = f(f(f(99))) = f(f(f(f(104)))) = f(f(f(101))) \\ &= f(f(98)) = f(f(f(103))) = f(f(100)) = f(97) \\ &= f(f(102)) = f(99) = f(f(104)) \\ &= f(101) = 98 \end{aligned}$$

例 1-3 用初等方法求函数 $y=\dfrac{4}{x^2-4x-5}$ 的值域。

解 先确定函数的定义域，正确选择方法，并作出相应的等式变换。函数的定义域为 $x\neq -1$，且 $x\neq 5$。

令 $u=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$

因为 $u\geqslant -9$ 且 $u\neq 0$，即 $u>0$ 或 $-9\leqslant u<0\Rightarrow \dfrac{4}{u}>0$ 或 $\dfrac{4}{u}\leqslant -\dfrac{4}{9}$

所以，函数的值域为 $(-\infty,-\dfrac{4}{9}]\cup(0,+\infty)$

这里运用了不等式性质 $\begin{cases} a>b \\ ab>0 \end{cases}\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

1.2.2 函数的性质

函数的性质通常是指函数的定义域、值域、解析式、单调性、奇偶性、周期性和对称性等等，在解决与函数有关的（如方程、不等式等）问题时，巧妙利用函数及其图象的相关性质，可以使问题得到简化，从而达到解决问题的目的。

1. 有界性

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若函数值的集合 $M=\{f(x)\mid x\in D\}$ 有界（即存在 $L>0$，对于任意的 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant L$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界。

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\arctan x$ 等在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$。函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上是无界的，在 $[1,\infty]$ 上是有界的。

2. 单调性

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若对于任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，$f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调增加（严格单调减少）；上述不等式改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（单调减少）。

例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格增加的。函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 内是严格减少的，在 $[0,+\infty)$ 内是严格增加的。因此，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=2x^2+1$ 不是单调函数。

3. 奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 定义在数集 D 上，若对于任意的 $x\in D$，存在 $-x\in D$，且 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称函数 $f(x)$ 是奇函数（或偶函数）。

从函数奇偶性的定义可见，若点 (x_0,y_0) 在奇函数 $y=f(x)$ 的图象上，即 $y_0=f(x_0)$，则 $f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0$，即 $(-x_0,-y_0)$ 也在奇函数 $y=f(x)$ 的图象上。于是奇函数的图象关于原点对称；同理可知，偶函数的图象关于 y 轴对称。

例如,函数 $y=x^4$,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\dfrac{\sin x}{x}$等皆为偶函数;函数 $y=x^3$,$y=\sin x$ 等皆为奇函数。

4. 周期性

定义 设函数 $f(x)$ 定义在数集 D 上,若存在常数 $T>0$,对于任意的 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是数集 D 上的周期函数,T 称为函数 $f(x)$ 的一个周期。

显然周期不唯一:若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 $2T$ 也是它的周期。不难用归纳法证明,若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 $kT(k\in\mathbf{N})$ 也是它的周期。若函数 $f(x)$ 有最小的正周期,通常称为函数 $f(x)$ 的基本周期,简称为周期。

例如,$y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 2π。再如,常函数 $y=C$ 也是周期函数,任意正的实数都是它的周期。

1.2.3 复合函数与反函数

1. 复合函数

定义 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,如果 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域中,则 y 通过 u 构成 x 的函数,记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

这种函数称为复合函数,其中 u 称为中间变量。如 $y=\ln\cos x$ 是一个更复杂的函数,它可以看做是经 $y=\ln u$,$u=\cos x$ 复合而成。

需要指出的是,复合函数可以由两个以上函数复合而成,反过来,一个复杂的函数,根据需要也可以分解为若干个简单函数的复合。

例如:$y=(e^{\tan x})^2$ 可以分解为 $y=u^2$,$u=e^t$,$t=\tan x$。

又函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$,函数 $y=(x-1)(2-x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$。为使其生成复合函数,必须要求

$$y=(x-1)(2-x)\geqslant 0,\text{即 } 1\leqslant x\leqslant 2$$

于是,对于任意的 $x\in[1,2]$,函数 $y=(x-1)(2-x)$ 与 $z=\sqrt{y}$ 构成了复合函数

$$z=\sqrt{(x-1)(2-x)}$$

以上是两个函数生成的复合函数,不难将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数。

例如,由三个函数 $u=\sqrt{z}$,$z=\ln y$,$y=2x+3$ 生成的复合函数是 $u=\sqrt{\ln(2x+3)}$ $x\in[-1,+\infty)$。

2. 反函数

定义 在函数 $y=f(x)$(定义域为 D,值域为 M)中,用 y 将 x 表示出来,得到 $x=\varphi(y)$。若对于 y 在 M 中的任何一个值,通过 $x=\varphi(y)$,x 在 D 中都有唯一的值与它对应,则函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$。

按习惯,$x=f^{-1}(y)$ 一般改写成 $y=f^{-1}(x)$,其定义域为 M,值域为 D。

从反函数的定义中可以看出,严格单调函数 $y=f(x)$ 必存在反函数。

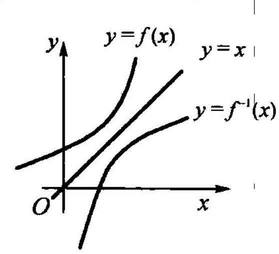

图 1-2 反函数与原函数的对称性

不难证明,$y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-2)。

1.2.4 初等函数

1. 基本初等函数

函数是高中数学的核心内容，总结起来，有如下几种函数：

(1)常数函数 $y=C$；

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$；

(3)指数函数 $y=a^{x}$，特例 $y=\mathrm{e}^{x}$；

(4)对数函数 $y=\log_{a}x$，特例 $y=\ln x$；

(5)三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6)反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}x$。

上述几种函数因其简单性和基础性，成为构成今后高等数学学习内容的基本素材和基础，故称为基本初等函数。它们的性质和图象在高中数学课本中已有详尽的叙述，此处不再赘述。

2. 初等函数

从基本初等函数出发，引入函数的四则运算和复合，则可构成许许多多的函数。对这些函数基本性质的研究及其在各专业的应用构成了高等数学的全部内容。

定义 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

例如，$y=\lg\sin^{2}x$，$y=\sqrt[3]{\tan x}$，$y=\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos(2x+1)$等都是初等函数。

例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^{2}}}{\lg(2x-1)}+(3-2x)^{3}$，$y=\dfrac{4}{x^{2}-4x-5}$等都是初等函数。幂指函数 $(f(x))^{g(x)}(f(x)>0)$是初等函数，因为

$$(f(x))^{g(x)}=\mathrm{e}^{\ln(f(x))^{g(x)}}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

1.2.5 建立函数模型

由实际问题建立函数模型，涉及到几何学、物理学及其他学科的知识和相关经验。建立函数模型的一般步骤如下：

(1)分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示；

(2)根据所给条件，运用数学、物理、经济及其他知识，确定等量关系；

(3)具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明其定义域。

例 1-4 某工厂生产某产品的年产量为若干台，每台售价为 300 元，当年产量超过 600 台时，超过部分只能打 8 折出售，这样可出售 200 台，如果再多生产，则本年就销售不出去了，试写出本年的收益函数模型。

解 设该产品年产量为 x 台，收益函数为 $y(x)$。因为产量超过 600 台时，售价要打 8 折，而超过 800 台时，多余部分本年销售不出去，从而没有效益，因此，把产量划分为三个阶段来考虑收益。根据题意，有

$$y(x)=\begin{cases}300x & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 300\times 600+0.8\times 300(x-600) & 600<x\leqslant 800\\ 300\times 600+0.8\times 300\times 200 & x>800\end{cases}$$

即收益函数模型为