北京市人才强教中青年骨干教师项目资助

小波变换及其工程应用

XIAOBO BIANHUAN JIQI
GONGCHENG YINGYONG

李媛 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

北京市人才强教中青年骨干教师项目资助

小波变换及其工程应用

李 媛 著

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
· 北京 ·

内 容 简 介

本书介绍了一维小波函数和小波变换原理，并重点介绍了小波变换在波形信号分析中的工程应用。小波变换是傅里叶分析方法之后出现的应用于信号分析的新方法，尤其是一维小波变换具有信号噪声分离和提取信号突变点的特性，可以与人工智能技术相结合，应用于工业、医学、军事等多个领域，组成实时的故障检测系统、医学诊断系统和军事上的监测识别系统，具有很高的实用价值。

本书从信号分析与处理的观点出发，首先介绍了小波变换的基本概念、原理、离散小波变换的应用；其次，针对一些实际信号采样时间、处理目的不同，用离散小波变换难以达到要求，本文重点介绍了连续小波的离散化原理及计算机实现过程，并给出了相关程序；最后，本书将小波变换和人工智能技术相结合，实际应用于工业、医疗、军事等系统中，介绍实际系统和程序。

图书在版编目(CIP)数据

小波变换及其工程应用/李嫒著．--北京：北京邮电大学出版社，2010.4

ISBN 978-7-5635-2296-5

Ⅰ.①小… Ⅱ.①李… Ⅲ.①小波分析 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 051343 号

书　　名：小波变换及其工程应用

作　　者：李　嫒

责任编辑：王丹丹

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt. edu. cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷有限责任公司

开　　本：787 mm×960 mm　1/16

印　　张：7

字　　数：150 千字

印　　数：1—2 000 册

版　　次：2010 年 4 月第 1 版　2010 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2296-5　　定　价：16.00 元

前　言

20 世纪 80 年代，法国地质物理学家 Morlet 在分析地质数据时首先提出了小波分析（Wavelet analysis）这一概念，小波理论发展至今，在理论研究和工程应用上均取得了巨大进展。小波分析是傅里叶分析的新发展，它既保留了傅里叶变换的优点，又弥补了傅里叶变换在信号分析上的一些不足，比傅里叶变换更加灵活、全面和有效。

在噪声和多信号环境中如何准确地检测和判别目标信号是电子侦察、雷达、声纳、语音、医疗、工业 CT、ICT、故障诊断和通信领域信号处理中极为关注的热点问题。小波变换的出现为这些信号处理与分析提供了更好的可行之路。通过信号检测和小波变换等信号处理方法可以实现信号波形的分析与变换，提取信号的突变点特征，为进一步识别信号的有效部分奠定了基础。在人工智能、混沌理论及模式识别等智能信息处理技术的研究中，如果没有小波理论嵌人是很难有所突破的。本书的写作目的就是要将小波理论与模式识别技术融合在一起，探讨其在实际波形分析中的应用，实现真正的、具有实用价值的智能控制系统体系。

本书专注于一维小波变换的理论及应用，通过医疗、工业和军事领域的信号分析实例，说明了小波变换在信号预处理、特征提取等方面的优势，并采用模糊模式识别技术获得了目标信号。本书的写作过程中，力求用简单的语言解释复杂的理论，用实例说明小波变换和模式识别的实用价值，希望能将小波变换与人工智能技术、模式识别技术等有机地结合，为各种复杂系统瞬态变化的波形信号分析和多种信号相互混叠的信号分离提供一个高精度分析的技术途径和可使用的理论工具。

本书的完成得到了北京市属市管高等学校人才强教计划"中青年骨干教师"项目资助，也得到了家人、朋友的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

虽然在写作过程中殚精竭虑，但由于本人水平有限，难免有错误和不足之处，请读者批评指正。

作　者

目　　录

第1章 绪　　论

在人们的生活中，信号随处可见。在通信领域，能够听到的语音信号，能够看到的图形、图像信号；在医疗领域，代表着生命体征的心电波信号、脑电波信号以及脉搏、血压和呼吸等信号；在军事领域，电子侦察、雷达、声纳等信号；在工业领域，工业 CT（Computer Tomography）、ICT（In Circuit Tester）、故障诊断等，都需要对检测到的信号进行处理，提取出有用的目标信号。

对于给定的信号 $X(t)$，可以有很多方法描述它，如以时间为变量的函数表达式，通过傅里叶变换得到的频域表示 $X(\mathrm{j}\omega)$，用 $X(t)$的相关函数，其能量谱或功率谱表示等。在这些众多的表达式中，都会包括两个最基本的物理量，即时间和频率。如果信号的幅度和频率内容都不会随着时间的变化而变化，则称此信号是平稳的或时间不变的信号，如幅度不变的直流信号，或频率内容不变的正弦波、三角波等，这些信号通常只携带着最简单的信息；反之，如果信号的幅度随时间变化或信号的频率内容随时间变化，称此信号是非平稳信号或时变信号。在人们的实际生活和工作中，接触到的大部分信号都是变化着的：如一首动听的音乐具有不同的旋律，也就是随着时间的变化，声音信号的频率内容也发生变化；每个人说话的声音和语调都不同，或平静之中突然传出的尖叫等，都涉及信号在时间或频率上的变化。

平稳信号人们可以采用传统的傅里叶变换进行分析，傅里叶变换建立了从时域到频域的通道，但它并没有将时域和频域组合成一个域，大多数的时间信息在频域是不容易得到的。频谱只是显示出了任一频率在信号内的总强度。通常不能提供有关谱分量的时间局域化的信息。因此傅里叶变换是信号在整个积分区间的时间范围内所具有的频率特性的平均值，不具有时间和频率的定位功能。傅里叶变换分析平稳信号是足够了，但对于非平稳信号的分析，无疑需要比傅里叶变换具有更多、更严格的要求。

小波变换对不同的频率成分采用不同的时间分辨，对高频分量或速变成分的信息，时间上的分辨率较高，采样也比较密，时域窗口窄，而容许频域窗口放宽；对低频分量或慢变

信号，时间上的分辨率则低，采样也比较疏，即时域窗口适当加宽，以保证至少能包含一个周期过程，而频域窗口则尽量缩小，保证有较高的频率分辨率和较小的测频误差，以便保证频率的相对误差小，从而满足提取信息的基本需要。显然，小波变换的时-频窗口具有自适应性，特别适合于处理在短时间内突变的信号，能聚焦到信号波形的任一细节，被誉为数学显微镜[13]。小波变换正是凭借其可调的"柔性"窗和对信号细节有"聚焦"功能，才特别适合检测和分析出信号的突变成分。另外，小波变换的系数计算对噪声不很敏感，是非常鲁棒(robust)的。

本书中若无特殊说明，统一以 **Z** 表示整数，用 **R** 表示实数。

1.1 基本概念

小波分析是在现代信号分析与处理的基础上发展起来的，是傅里叶分析划时代的发展结果，涉及许多数学和信号分析方面的基础知识，本节将简要介绍与小波分析有关的泛函分析、傅里叶变换及数字信号处理等相关知识，以方便读者阅读本书。

泛函分析是形成于 20 世纪 30 年代的数学分支，它的出现使数学发展进入了崭新的阶段。针对数学分析研究建立了集合论，提出了希尔伯特空间的概念，拓展了人们对空间的认知；n 维空间几何的产生允许人们把多变函数用几何学的语言解释成多维空间的映像。泛函分析主要研究了无限维向量空间上的函数，算子、极限理论和拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件的映射。下面我们来具体介绍。

1.1.1 函数空间

1. 距离空间

所谓距离空间，就是在集合 X 内引入了距离定义。设 X 是非空集合，对于 X 中的任意两元素 x 与 y，按某一法则都对应唯一的实数 $\rho(x,y)$，并满足以下 3 条公理(距离公理)：

① 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，$\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

② 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

③ 三角不等式：对任意的 x,y,z，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 间的距离(或度量)，并称 X 是以 ρ 为距离的距离空间(或度量空间)，记成 (X,ρ)，或简记为 X；X 中的元素称为 X 中的点。

在一个集合中，定义距离的方式不唯一。如果对同一个集合 X 引入的距离不同，那么所构成的距离空间也不同。在集合中引入距离后，我们就说在集合 X 中引入了拓扑结构。

极限是数学分析中的基本概念之一，有了它可以派生出许多其他概念，泛函分析用距离来导出一般化的极限概念。

如 $n\to\infty$ 时 $x_n\to a$，我们应理解为当 $n\to\infty$ 时，x_n 与 a 的距离趋向于零。

(1) 距离空间 $\mathbf{R}^n$

n 维实数或复数欧几里德(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的全体所组成的集合，其中 a_i 是实数或复数。对任何的 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$，规定

$$\rho(x,y)=\left[\sum_i(a_i-b_i)^2\right]^{1/2} \tag{1.1}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 是距离空间。

(2) 距离空间 $L^p[a,b]$

$L^p[a,b]$表示区间$[a,b]$绝对值的 p 次幂 L 可积函数的全体，并把几乎处处相等的函数看成是同一个函数，对于 $x,y\in L^p[a,b]$，规定

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{1/p},p\geqslant 1 \tag{1.2}$$

则 $L^p[a,b]$构成一个距离空间，称之为 p 次幂可积函数空间。

若 $p=2$，则称 $L^2[a,b]$为平方可积空间，表示为

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{1.3}$$

是一个距离空间。

(3) 连续函数空间 $C[a,b]$

设 $x(t)$是$[a,b]$上的连续函数，且

$$C[a,b]=x(t) \tag{1.4}$$

则称 $C[a,b]$是$[a,b]$上的连续函数空间，在 $C[a,b]$上定义

$$\rho(x,y)=\max|x(t)-y(t)| \tag{1.5}$$

其中，$t\in[a,b]$；　$x,y\in C[a,b]$。

2. 线性空间

设 V 是一个非空集合，K 是实(或复)数域，并可在其上定义“加法”、“数乘”运算，而且满足以下公理：

① 加法交换律：$x+y=y+x$；

② 加法结合律：$(x+y)+z=x+(y+z)$；

③ 存在零元：$x+0=x$；

④ 存在逆元：$x+(-x)=0$；

⑤ 数乘：$1x=x$；

⑥ $a(bx)=(ab)x$；

⑦ $(a+b)x=ax+bx$；

⑧ $a(x+y)=ax+ay$;

$x,y,z\in V$, $a,b\in K$

则称 V 是数域 K 上的线性空间。

3. 线性赋范空间

设 X 是实(或复)线性空间，如果对于 X 中每个元素 x，按照一定的法则对应于实数 $\|x\|$，且满足：

① $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$ 当且仅当 x 等于零($x=0$)；

② $\|ax\|=|a|\,\|x\|$，a 是实(或复)数；

③ $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

则称 X 是实(或复)线性赋范空间，$\|x\|$ 称为 x 的范数。

定义 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，线性赋范空间必然是距离空间。

4. 巴拿赫(Banach)空间

涉及柯西序列的概念：

设$\{x_n\}$是(X,ρ)中的点列，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n,m>N$ 时，有$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是 X 中的柯西(Cauchy)序列，或称基本序列。收敛的序列必然是柯西序列，而柯西序列未必是收敛的序列——空间的不完备性。

若距离空间(X,ρ)中的每一个柯西序列都收敛于(X,ρ)中的某一元素，则称(X,ρ)是完备的距离空间。

如果赋范线性空间$(X,\|.\|)$是完备的，则称$(X,\|.\|)$是 Banach 空间。所以完备的线性赋范空间称为巴拿赫空间。

5. 内积空间

设 X 是定义在实(或复)数域 K 上的线性空间，若对于 X 任意一对有序元素 x,y，恒对应数域 K 的值(x,y)，且满足

① $(ax,y)=a(x,y)$；

② $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

③ $(x,y)=\overline{(y,x)}$；

④ $(x,x)\geqslant 0$，且$(x,x)=0$ 的充要条件是 $x=0$；

则称 X 为内积空间，(x,y)称为 x,y 的内积。特别地，称实数域 $\mathbf{R}$ 上的内积空间 V 为欧几里德空间(欧式空间)；称复数域 C 上的内积空间 V 为酉空间。

6. 希尔伯特空间

在内积空间中，定义范数，可由内积导出范数

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{1.6}$$

定义距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}$，则内积空间是线性赋范空间。完备的内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间，希尔伯特空间必为巴拿赫空间。$L^2[a,b]$是一个可分的希尔伯特空间。

1.1.2 正交系

1. 线性空间

设 $e_k(t)$ 是一个函数序列，X 表示 $e_k(t)$ 所有可能的线性组合构成的集合，即

$$X = \sum_k a_k e_k(t) \tag{1.7}$$

其中，$t, a_k \in \mathbf{R}, K \in \mathbf{Z}$，则 X 被称为由序列 $e_k(t)$ 张成的线性空间，记作

$$X = \mathrm{span}\{e_k(t)\} \tag{1.8}$$

2. 基底

在线性空间中，如果有任意 $g(t) \in X$，可以表示为

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \tag{1.9}$$

且系数 a_k 取值唯一，则称 $\{e_k(t)\}$ 为线性空间 X 的基底。

3. 正交(orthogonal)

若内积空间中两向量的内积为 0，则称它们是正交的。换句话说，内积空间中两个向量正交意味着它们是相互垂直的。例如：向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，记为 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$。

4. 正交向量组

欧氏空间 V 的一组非零向量 $\boldsymbol{e}_k(t)$，如果它们两两正交，就称为一个正交向量组。由单个非零向量所成的向量组也是正交向量组。正交向量组是线性无关的，因此在 n 维欧氏空间中，两两正交的非零向量不能超过 n 个。

5. 标准正交基组

在 n 维欧氏空间中，由 n 个向量组成的正交向量组称为正交基；由单位向量组成的正交基称为标准正交基组。

对一组正交基进行单位化就得到一组标准正交基。

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，由定义，有

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.10}$$

则 $\{\varepsilon_n\}$ 被称为欧式空间中的标准正交基组。

1.2 傅里叶变换与短时傅里叶变换

傅里叶变换是信号处理领域一种很重要的常用算法，它指出任何连续测量得到的时序或信号，都可以表示为不同频率的正弦波信号的无限叠加。因此，我们可以利用直接测量到的原始信号，根据傅里叶变换算法，以累加方式来计算该信号中不同正弦波信号的频率、振幅和相位。傅里叶变换建立了从时域到复域的通道。可以说，傅里叶变换将原来难

以处理的时域信号转换成了易于分析的频域信号(信号的频谱),可以利用一些工具对这些频域信号进行处理、加工。最后还可以利用傅里叶逆变换将这些频域信号转换成时域信号。从现代数学的眼光来看,傅里叶变换是一种特殊的积分变换。它能将满足一定条件的某个函数表示成正弦基函数的线性组合或者积分。

1.2.1 傅里叶变换

傅里叶变换在数学中有严格的定义,设 $f(t)$ 是 t 的函数,并且满足以下条件:

(1) 具有有限个间断点;

(2) 具有有限个极值点;

(3) 绝对可积。

则在全实轴上,定义函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

其中,$\mathscr{F}\{f(t)\}$ 是 ω 的函数,记作 $\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\omega)$。

如果

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.13}$$

通常将以上两个公式称作傅里叶变换对。

傅里叶变换 $F(\omega)$ 一般是复量,可以表示为指数形式

$$F(\omega) = |F(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{1.14}$$

其中,$|F(\omega)|$ 称作 $f(t)$ 的傅里叶谱,$\varphi(\omega)$ 称作相位谱。

例 1:求图 1-1 所示波形 $x(t)$ 的频谱。

解:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leqslant T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \tag{1.15}$$

它的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-T_1}^{T_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T_1}) \\ &= \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} \end{aligned} \tag{1.16}$$

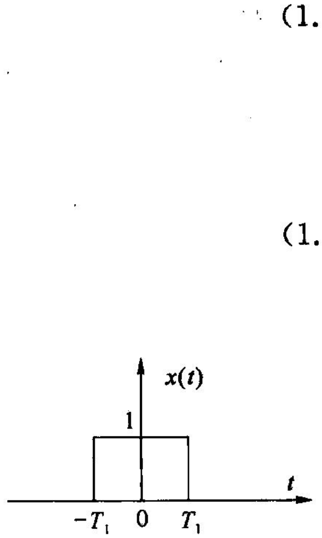

图 1-1 矩形脉冲 $x(t)$

$x(t)$的频谱如图 1-2 所示。

由例 1 可以看出,通过傅里叶变换将时域信号 $x(t)$转换为频域信号 $x(\omega)$。时域和频域构成了分析信号的两种方式。但是傅里叶变换并没有将时域和频域组合成一个域,由图 1-2 可以看出,傅里叶变换之后的频域函数 $x(\omega)$只是显示了任一频率 ω 包含在信号 $x(t)$内的总的强度,不能提供有关谱分量的时间局域化信息。如果信号 $x(t)$是由多个平稳信号叠加而成,应用傅里叶分析就可以得到每个信号的特征。但是由时变信号叠加而成的 $x(t)$,如果采用傅里叶变换就会将随时间产生的所有突变传遍 $x(\omega)$的整个频率轴,导致产生突变的时域信息完全丢失,因此傅里叶变换适用于平稳信号的分析,对于时变信号,应采用更加严格的方式进行分析和转换。

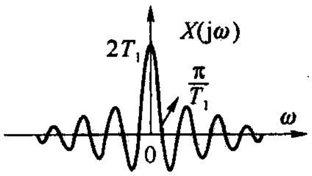

图 1-2 $x(t)$的傅里叶频谱

1.2.2 短时傅里叶变换

在人们的实际生活中,所遇到的信号大多是时变信号,即信号的频率随着时间不断地变换。人们在分析和处理信号的时候,一方面希望了解信号所包含的频谱信息,另一方面也希望知道不同频率出现的时间。

为了研究信号在局部范围的频率特征,Garbor 早在 1946 年就提出了短时傅里叶变换(Short Time Fourier Transform,STFT),即在傅里叶变换中引入时间相关性而又保持线性不变。其基本思想是:取时间函数 $g(t)$作为窗口函数,用 $g(t-\tau)$同待分析函数 $f(t)$相乘,然后再进行傅里叶变换。这样就可以得到比较好的时频定位特性。如果沿着时间轴滑动窗口 $g(t)$,就得到整个时间轴上的频率分布。

$$\mathrm{STFT}_f(\omega,\tau)=\int_{\mathbf{R}} f(t)g'_{\omega,\tau}(t)\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}} f(t)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\langle f(t)\cdot g_{\omega,\tau}(t)\rangle \tag{1.17}$$

其中,

$$g_{\omega,\tau}(t)=g(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$g'_{\omega,\tau}(t)=\overline{g_{\omega,\tau}(t)}=g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

窗口函数 $g(t)$应取对称函数。

由式(1.17)可知,短时傅里叶变换得到的是函数 $f(t)$在 τ 时刻的傅里叶变换。不断变化 τ,即不断移动窗口函数 $g(t)$的中心位置,就可以得到函数 $f(t)$在不同时刻的傅里叶变换。显然,短时傅里叶变换 $\mathrm{STFT}_f(\omega,\tau)$是变量$(\omega,\tau)$的二维函数。如果选用的窗口函数在时域或频域均具有良好的局部特性,那么短时傅里叶变换就给出了信号的局部时-频分析,有利于同时在时域和频域提取信号的精确信息。因此短时傅里叶窗口函数的选取非常重要。

但是现在有一个问题:合适的时域和频域窗口如何选择?人们希望选择的窗口函数能在获得较高的时间分辨率的同时得到同样高的频率分辨率,但是测不准原理表明:对信号做时-频分析时,其时窗和频窗不能同时达到极小值。

测不准原理描述如下：

如果设 $g(t)$ 和 $G(\omega)$ 分别是时域和频域的窗口函数，t_0 和 ω_0 分别表示时窗和频窗的“重心”，σ_{g_t} 和 σ_{G_ω} 表示时窗 $g_{\omega,\tau}(t)$ 和频窗 $G_{\omega,\tau}(\omega)$ 的均方差，则 $\sigma_{g_t}\cdot\sigma_{G_\omega}\geqslant\frac{1}{2}$。这说明对信号进行时-频分析时，要想同时达到时间 t 与频率 ω 都是最高分辨率是不可能的。

对于时-频窗口的选择应遵循如下规律：如果分析的信号频率较高，就应该选择比较窄的时间窗函数，使频域窗口尽量放宽；如果分析的信号频率较低，就应该选择较宽的时间窗函数，而频窗应尽量缩小，保证有较高的频率分辨率和较小的测量误差。总之，对多尺度信号希望时-频窗口有自适应性能，能够自动改变 σ_{g_t} 和 σ_{G_ω} 的大小。高频时，时窗小、频窗大；低频时，时窗大、频窗小。

但短时傅里叶变换 STFT 的时-频窗口是固定不变的，窗口没有自适应性，不适于对多尺度时变信号的分析，显示了短时傅里叶变换的弱点：

(1) 短时傅里叶变换 STFT 一旦选定时间窗后，分辨率就固定了，若要其他分辨率则需要更换时间窗；

(2) 窗函数的平移本身不能构成基，没有简化计算的可能性，使得时频分析的计算量一直很大(若为正交基，系数的计算相当方便)；

(3) 由于时间和频率都使用连续表达，连续窗口傅里叶变换具有极大的冗余性。如何使离散时间和频率参数减少冗余，而又不导致信息丢失？答案就是时-频窗口一致，即时间和频率平移必须完全覆盖整个时频平面。为了解决短时傅里叶变换存在的问题，本书第 2 章引入了小波函数的概念。

1.3 小　结

本章介绍了与小波变换相关的数学概念及傅里叶变换存在的弱点，为第 2 章引入小波变换打下基础。

第2章 小波分析

1981 年，法国地质物理学家 Morlet 在分析地质数据时基于群论首先提出了小波分析(Wavelet analysis) 这一概念。小波分析是傅里叶分析的新发展，它既保留了傅里叶变换的优点，又弥补了在信号分析上的一些不足。小波理论发展至今，在理论研究和工程应用上均取得了巨大进展[3]。

与傅里叶变换相比，小波变换是时间(空间)频率的局部化分析，它通过伸缩平移运算对信号(函数)逐步进行多尺度细化，最终达到高频处时间细分，低频处频率细分，能自动适应时频信号分析的要求，从而可聚焦到信号的任意细节，解决了傅里叶变换存在的难题，成为继傅里叶变换以来在科学方法上的重大突破。有人把小波变换称为"数学显微镜"。

2.1 概　述

2.1.1 小波定义

对于任意 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，即 $\psi(t)$是平方可积函数，如果 $\psi(t)$的傅里叶变换满足可容许条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{2.1}$$

则称 $\psi(t)$是一个基本小波或母小波函数。

母小波函数 $\psi(t)$必须满足下列条件：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\mathrm{d}t=1$，即 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$是单位化的；