



**三合一**

- ★ 新课标解读 ★
- ★ 研究性学习 ★
- ★ 奥赛起跑线 ★

# 圆锥曲线

◆ 湖南师范大学出版社  
◆ 学科主编 ↓ 王树国  
◆ 本册主编 ↓ 朱海棠

**师大附中专题**

SHIDA FUZHONG ZHUANTI

# 师大附中专题

江苏工圆学编图曲馆线  
藏书章

学科主编◇王树国  
本册主编◇朱海棠

湖南师范大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线 / 朱海棠主编. —长沙: 湖南师范大学出版社,  
2003. 4

(师大附中专题)

ISBN 7-81081-245-9/G·163

I. 圆... II. 朱... III. 圆锥—曲线—中学—教学参  
考资料 IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 106580 号

## 圆锥曲线

朱海棠 主编

- 全程策划:李 阳 黄道见
- 组稿编辑:李 阳 黄道见
- 学科主编:王树国
- 本册主编:朱海棠
- 责任编辑:刘琼琳
- 责任校对:刘 琳
- 出版发行:湖南师范大学出版社  
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081  
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
- 经销:湖南省新华书店
- 印刷:长沙银都教育印刷厂印刷
- 开本:890×1240 1/32
- 印张:8.625
- 字数:348千字
- 版次:2003年4月第1版 2003年4月第1次印刷
- 印数:1—10000册
- 书号:ISBN 7-81081-245-9/G·163
- 定价:11.80元

# 师大附中 专题

## 丛书编委会

(按姓氏笔划排序)

王 忠

华中师范大学附中副校长 特级教师

王爱礼

山东师范大学附中副校长 特级教师

刘世斌

辽宁师范大学附中副校长 特级教师

刘 强

首都师范大学附中副校长 高级教师

李 鸿

陕西师范大学附中副校长 特级教师

赵定国

福建师范大学附中副校长 特级教师

杨淑芬

云南师范大学附中副校长 特级教师

樊希国

湖南师范大学附中副校长 高级教师



## 选择《师大附中专题》的理由

### 一、师大附中名师打造

全国各师范大学附中,多为国家示范重点学校.集各师大附中名师,呈现先进的教育理念,科学的教学方法,名师伴读,事半功倍.

师大附中专题,示范中学实力.

### 二、三位一体知识呈现

师大附中专题在“知识呈现”上独具特色:

①重知识归纳(重点、基点、难点三点归纳)

②重方法导引(精讲、精导、精练三精导学)

③重高考点拨(专题知识高考考点与考向)

### 三、新课标理念闪亮抢滩

新课程标准将综合实践活动列为中学必修课程,可以预见,在高考及竞赛活动中都将得以体现.专辟“综合应用与研究性学习”一篇,可谓一大亮点,重点探讨研究性学习与高考的关系,并精选各师大附中典型研究性学习案例,能充分满足教学与备考需要.

### 四、竞赛高考紧密连线

归纳专题竞赛热点,剖析典型赛题,点拨解题方法,精选示范赛题.引导学生深化课堂知识结构,熟悉奥赛基本规则,从容应付高考提高题,也为尖子生的脱颖而出提供了“土壤”,可谓深化专题内容又一大特色.

袁晓林

袁晓林 北京师范大学附中

袁晓林 《师大附中专题》丛书策划组

袁晓林 北京师范大学附中

## 目 录

### 上篇 基础部分

专题知识框架 .....	(2)
高考考点与要求 .....	(2)
本专题高考考向 .....	(3)
第一讲 椭圆 .....	(4)
双基训练 .....	(33)
第二讲 双曲线 .....	(39)
双基训练 .....	(71)
第三讲 抛物线 .....	(78)
双基训练 .....	(106)
第四讲 平移变换 .....	(113)
双基训练 .....	(146)

### 中篇 综合应用与研究性学习

第一讲 与圆锥曲线有关的轨迹问题 .....	(154)
拓展训练 .....	(164)
第二讲 圆锥曲线的弦长问题 .....	(168)
拓展训练 .....	(178)
第三讲 圆锥曲线弦的中点问题 .....	(182)
拓展训练 .....	(194)
第四讲 圆锥曲线的切线问题 .....	(199)
拓展训练 .....	(203)
第五讲 圆锥曲线的应用问题 .....	(207)
拓展训练 .....	(215)
第六讲 研究性学习 .....	(220)





案例 1	抛物线的光学性质 .....	(220)
案例 2	抛物线型酒杯中细棒的平衡位置 .....	(222)
案例 3	一道课本习题的求解、拓展与变通 .....	(225)
案例 4	圆锥曲线直角角性质的探究 .....	(229)

## 下篇 竞赛点津

第一讲	竞赛试题分类精析 .....	(236)
第二讲	竞赛实战模拟训练 .....	(246)
复习测试题(A)	.....	(254)
复习测试题(B)	.....	(261)

### 《圆锥曲线》篇上

(S)	.....	圆锥曲线总论
(S)	.....	椭圆的基本性质
(S)	.....	双曲线的基本性质
(S)	.....	抛物线
(S)	.....	椭圆及其
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双

### 《圆锥曲线》篇中

(S)	.....	椭圆双曲线的关系
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双
(S)	.....	椭圆双



第一次, 主题的确定  
原因及其评价

问题

第二次, 主题的确定  
原因及其评价

论题

第三次, 主题的确定  
原因及其评价



## 上篇 基础部分

第四次, 主题的确定  
原因及其评价

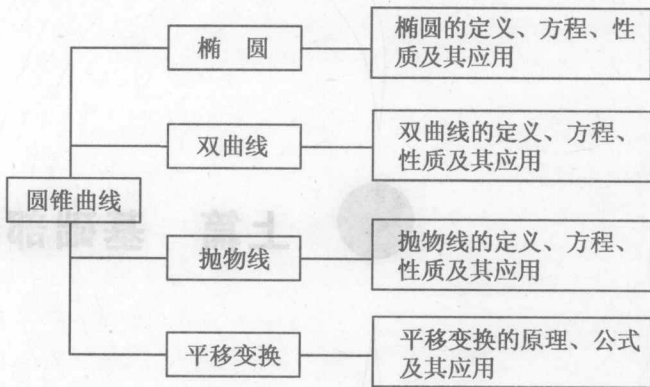
研究意义







## 专题知识框架



## 高考考点与要求

1. 掌握圆锥曲线的定义、标准方程及其几何性质,会根据所给的条件画圆锥曲线,了解圆锥曲线的一些实际应用.
2. 了解参数方程的概念,理解椭圆的参数方程.
3. 理解坐标变换的意义,掌握利用坐标轴平移化简圆锥曲线方程的方法.
4. 了解用坐标法研究几何问题的思想,初步掌握利用方程研究曲线性质的方法,能够根据所给条件,选择适当的直角坐标系求曲线的方程.

## 本专题高考考向

圆锥曲线是高考试题中解析几何部分的主体内容,是历年高考屡见新题的板块,由于求曲线方程和研究曲线性质是圆锥曲线的两个基本问题,由此决定了以圆锥曲线为考查内容的高考试题大致有如下五种考向:

1. 求圆锥曲线的方程;
2. 求动点轨迹或轨迹方程;
3. 求解析量或参数的值;
4. 求取值范围或最值;
5. 解析性质的探究与证明.

高考中圆锥曲线的客观题以考查基础知识为主,解答题重点考查直线与圆锥曲线的综合运用,解决与圆锥曲线有关的综合问题,常需要运用数形结合、方程、函数、不等式、分类讨论等数学思想方法,并对数式变形、字母运算有较高的要求,加之圆锥曲线问题解法灵活多变,因而以圆锥曲线为载体的解析几何综合题,还将继续成为今后高考试题中的“能力型”考题.

近十年来,高考试题中解析几何部分一般有三道选择题、一道填空题和一道解答题,其分值约占整卷的 22%. 这些题大都与圆锥曲线有关,估计今后还将继续稳定这一结构和比例.

值得指出的是,应用性问题已成为高考试题的一个重要板块,而利用圆锥曲线知识解决应用性问题尚未考及,是一个冷点,应加以注意.

## 第一讲 椭圆

### 三点归纳

- ◆ **基点** 椭圆的定义.
- ◆ **重点** 椭圆的标准方程和几何性质.
- ◆ **难点** 直线与椭圆的综合运用.

### 三精导学

#### ◆ 精讲

##### 1. 椭圆的定义

###### (1) 椭圆的第一定义

平面内与两个定点  $F_1$ 、 $F_2$  的距离之和等于常数(大于  $|F_1F_2|$ ) 的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点, 两焦点的距离叫做椭圆的焦距.

在上述定义中“常数大于  $|F_1F_2|$ ”是一个必不可少的条件. 若  $|MF_1| + |MF_2| = |F_1F_2|$ , 则  $M$  点的轨迹为线段  $F_1F_2$ ; 若  $|MF_1| + |MF_2| < |F_1F_2|$ , 则  $M$  点的轨迹不存在.

###### (2) 椭圆的第二定义

平面内到定点  $F$  的距离和它到定直线  $l$  的距离之比为常数  $e$  ( $0 < e < 1$ ) 的点的轨迹是椭圆, 定点  $F$  是椭圆的焦点, 定直线  $l$  叫做椭圆的准线, 常数  $e$  是椭圆的离心率.

在上述定义中, 定点  $F$  应在定直线  $l$  外, 否则轨迹不存在.

##### 2. 椭圆的标准方程

$$\left. \begin{array}{l} \text{焦点在 } x \text{ 轴上: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \\ \text{焦点在 } y \text{ 轴上: } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0). \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{焦点在 } x \text{ 轴上: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \\ \text{焦点在 } y \text{ 轴上: } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0). \end{array} \right\}$$

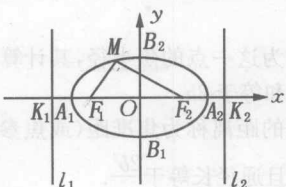
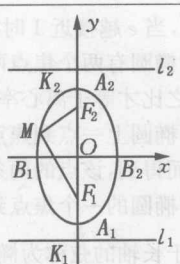
在理解椭圆的标准方程时需注意以下几点:

(1) 只有椭圆的中心在原点,焦点在坐标轴上时,椭圆的方程才具有标准形式.

(2) 椭圆的形状和大小完全由标准方程中的两个参数  $a, b$  所确定,但需注意焦点位置,椭圆的焦点恒在椭圆的长轴上.

(3) 确定椭圆的标准方程只需两个独立条件,若知道焦点所在坐标轴,其标准方程只有一种形式,若不知道焦点所在坐标轴,其标准方程有两种形式.

### 3. 椭圆的几何性质

椭圆方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ( $a > b > 0$ )	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ( $a > b > 0$ )	
图形特征			
	图 1-1	图 1-2	
几何性质	范围	$ x  \leq a,  y  \leq b$	$ x  \leq b,  y  \leq a$
	顶点	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(\pm b, 0), (0, \pm a)$
	焦点	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
	准线	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
	焦半径	$ MF_1  = a + ex_0,  MF_2  = a - ex_0$	$ MF_1  = a + ey_0,  MF_2  = a - ey_0$
	对称性	关于 $x$ 轴、 $y$ 轴、原点对称	
	长短轴	长轴长 $ A_1A_2  = 2a$ , 短轴长 $ B_1B_2  = 2b$	
	离心率	$e = \frac{c}{a}, \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$	
	焦准距	$ F_1K_1  =  F_2K_2  = \frac{b^2}{c}$	
	面积	$S = \pi ab$	

上表中列举的只是椭圆的一些基本性质. 对于焦点在不同坐标轴上的两类椭圆, 其几何性质既有不同点也有共同点, 请加以对比和区分. 在掌握这些性质时, 还要注意以下几点:

(1) 由  $b, c$  的几何意义及  $a^2 = b^2 + c^2$  可知, 椭圆短轴的端点到两个焦点的距离相等, 且等于长半轴长, 即  $|B_1F_1| = |B_1F_2| = |B_2F_1| = |B_2F_2| = a$ .

(2) 在一般情况下, 椭圆的顶点是指椭圆与其对称轴的交点, 两对称轴的交点是椭圆的中心.

(3) 椭圆上的点到椭圆中心的最大距离为  $a$ , 最小距离为  $b$ ; 椭圆上的点到椭圆的一个焦点的最大距离为  $a+c$ , 最小距离为  $a-c$ .

(4) 椭圆的离心率能反映椭圆的扁平程度, 因为  $a > c > 0$ , 故  $0 < e < 1$ , 且  $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ , 当  $e$  越接近 1 时椭圆越“扁”, 当  $e$  越接近 0 时椭圆越“圆”.

(5) 椭圆有两个焦点两条准线, 椭圆上的点到一个焦点的距离和它到相应准线的距离之比才等于离心率.

(6) 椭圆上一点到焦点的距离称为这一点的焦半径, 其计算公式可据椭圆的第二定义而得到, 该点的两条焦半径之和等于  $2a$ .

(7) 椭圆的一个焦点到相应准线的距离称为焦距距(或焦参数). 过椭圆的焦点且垂直于长轴的弦称为椭圆的通径, 且通径长等于  $\frac{2b^2}{a}$ .

(8) 利用椭圆的范围、顶点、对称性等几何性质, 可以快捷地画出反映椭圆基本形状和大小的草图, 简化画图过程.

### 4. 椭圆的参数方程

椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的参数方程是  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数).

这里的参数  $\theta$  称为离心角, 其几何意义可参阅教材.

利用椭圆的参数方程, 可将椭圆上的点  $P$  的坐标用三角形式表示, 即  $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ , 解题中常用它来设椭圆上的未知点的坐标.

### ◆精导

#### 题型 1 求椭圆的标准方程

例 1 已知椭圆中心在原点, 焦点在  $x$  轴上,  $F_1, F_2$  为椭圆的两焦点,  $P(3, 4)$  为椭圆上一点, 若  $PF_1 \perp PF_2$ , 求这椭圆的方程.

**思路与方法** 求椭圆标准方程的基本方法是待定系数法. 先用适当的形式设出椭圆方程, 再利用方程思想, 将已知条件转化为求  $a, b$  的值是解题的基本思路. 通过不同途径转化已知条件, 可产生不同的解法, 灵活运用解析几何性质和平面几何性质解题是一个重要的解题技巧.

**解法 1** 设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$ .

$$\because PF_1 \perp PF_2, \therefore \frac{4}{3+c} \cdot \frac{4}{3-c} = -1 \Rightarrow c=5. \text{ 从而 } a^2 = b^2 + 25. \quad \textcircled{1}$$

$$\because P \text{ 点在椭圆上}, \therefore \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1, \text{ 即}$$

$$16a^2 + 9b^2 = a^2 b^2. \quad \textcircled{2}$$

将①式代入②式, 得  $16(b^2 + 25) + 9b^2 = (b^2 + 25)b^2 \Rightarrow b^4 = 16 \times 25$ ,

$$\therefore b^2 = 20, \text{ 从而 } a^2 = 45.$$

$$\therefore \text{椭圆方程是 } \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

**解法 2** 设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ .

$\because PF_1 \perp PF_2, \therefore \triangle F_1PF_2$  为直角三角形, 且原点  $O$  为斜边  $F_1F_2$  的中点.

$$\therefore |PO| = \frac{1}{2} |F_1F_2| \Rightarrow c = |PO| = 5.$$

$$\therefore \text{椭圆的离心率 } e = \frac{5}{a}.$$

在  $\text{Rt}\triangle F_1PF_2$  中,  $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ,

$$\text{据焦半径公式, 有 } (a + \frac{5}{a} \times 3)^2 + (a - \frac{5}{a} \times 3)^2 = 4c^2 \Rightarrow 2a^2 + 2 \cdot (\frac{15}{a})^2 = 100, \text{ 即}$$

$$a^4 - 50a^2 + 225 = 0,$$

$$\therefore (a^2 - 45)(a^2 - 5) = 0, \therefore a^2 > c^2 = 25, \therefore a^2 = 45, \text{ 从而 } b^2 = a^2 - c^2 = 20,$$

$$\therefore \text{椭圆方程是 } \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

**点评** 上述两种解法都是待定系数法, 其不同点是在解法 1 中, 椭圆方程参加了运算, 而在解法 2 中, 仅设出椭圆方程的形式, 椭圆方程没有参加运算.

**例 2** 已知椭圆中心在原点, 焦点在  $x$  轴上, 离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且与圆  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{20}{3}$  相交于  $A, B$  两点, 若  $AB$  恰好是圆的直径, 求这椭圆的方程.

**解** 设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 由已知  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\therefore a^2 = 2c^2, \text{ 从而 } a^2 = 2b^2.$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 即 } x^2 + 2y^2 = 2b^2.$$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

$$\because AB \text{ 为圆的直径}, \therefore \text{线段 } AB \text{ 的中点为 } (2, 1), \therefore x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2.$$

$$\text{又 } A, B \text{ 在椭圆上}, \therefore x_1^2 + 2y_1^2 = 2b^2, x_2^2 + 2y_2^2 = 2b^2.$$

$$\text{两式相减, 得 } x_1^2 - x_2^2 + 2(y_1^2 - y_2^2) = 0, \text{ 又由题意, } x_1 \neq x_2,$$



$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{2(y_1 + y_2)} = -1, \text{ 即 } K_{AB} = -1.$$

$$\therefore \text{ 直线 } AB \text{ 的方程为 } y - 1 = -(x - 2), \text{ 即 } y = -x + 3. \text{ 代入圆方程, 得 } (x - 2)^2 + (x - 2)^2 = \frac{20}{3}, \therefore |x - 2| = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{\frac{10}{3}}, x_2 = 2 - \sqrt{\frac{10}{3}}, \text{ 从而 } y_1 = 1 - \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$$\therefore 2b^2 = x_1^2 + 2y_1^2 = (2 + \sqrt{\frac{10}{3}})^2 + 2(1 - \sqrt{\frac{10}{3}})^2 = 16,$$

$$\therefore b^2 = 8, \therefore a^2 = 2b^2 = 16.$$

$$\text{故椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

第一讲

点评 由离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  得到  $a, b$  的关系, 使椭圆方程得以简化, 给后继运算带来了方便. 利用  $A, B$  两点在椭圆上, 其坐标满足椭圆方程, 再两式相减, 可得到直线  $AB$  的斜率与线段  $AB$  的中点坐标之间的关系, 这就是所谓的“点差法”, 它是圆锥曲线解题中的一个重要技巧.

椭圆

例 3 如图 1-3, 设椭圆中心在原点, 焦点在  $x$  轴上, 过椭圆的右焦点  $F_2$  作倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线  $l$ , 交椭圆于  $M, N$  两点, 已知椭圆的左焦点  $F_1$  到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{2}$ ,  $M, N$  两点到椭圆的右准线的距离之和为  $\frac{8}{3}$ , 求这椭圆的方程.

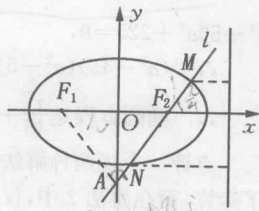


图 1-3

解 设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 直线  $l$  与  $y$  轴相交于  $A$  点, 连  $F_1A$ .

由已知可得  $\triangle F_1AF_2$  为等腰直角三角形, 且  $|F_1A| = \sqrt{2}$ ,  $\therefore |F_1F_2| = 2$ ,  $\therefore c = 1, F_2(1, 0)$ ,  $\therefore$  直线  $l$  的方程为  $y = x - 1$ .

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 由已知

$$\left(\frac{a^2}{c} - x_1\right) + \left(\frac{a^2}{c} - x_2\right) = \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2a^2}{c} - \frac{8}{3} = 2a^2 - \frac{8}{3}.$$

$$\text{从而 } y_1 + y_2 = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) = x_1 + x_2 - 2 = 2a^2 - \frac{14}{3}.$$

$\therefore M, N$  在椭圆上,  $\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ , 两式相减, 得

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0 \Rightarrow b^2(x_1 + x_2) + a^2(y_1 + y_2) \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0.$$

$$\because \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1, \therefore b^2(2a^2 - \frac{8}{3}) + a^2(2a^2 - \frac{14}{3}) = 0,$$

又  $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - 1$ , 代入上式整理, 得  $3a^4 - 7a^2 + 2 = 0, \therefore a^2 = 2$  或  $a^2 = \frac{1}{3}$  (舍去).

$$\therefore \text{椭圆方程是 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

**点评** 将直线  $l$  的方程代入椭圆方程, 得到一个关于  $x$  的一元二次方程, 利用韦达定理也可建立一个  $a, b$  的关系.

**例 4** 如图 1-4, 已知椭圆中心在原点, 焦点在坐标轴上, 直线  $l: x + y - 1 = 0$  与椭圆相交于  $A, B$  两点,  $P(\frac{4}{3}, 1)$  为定点, 若  $\triangle APB$  是以  $AB$  为斜边的等腰直角三角形, 求这个椭圆的方程.

**解** 设椭圆方程为  $ax^2 + by^2 = 1 (a, b > 0, a \neq b)$ ,  
 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

将直线  $l$  的方程联立椭圆方程, 消去  $y$  得

$$ax^2 + b(1-x)^2 = 1 \text{ 即 } (a+b)x^2 - 2bx + b - 1 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2b}{a+b}, x_1 x_2 = \frac{b-1}{a+b}.$$

$$\therefore y_1 + y_2 = (1-x_1) + (1-x_2) = 2 - (x_1 + x_2) =$$

$$\frac{2a}{a+b}.$$

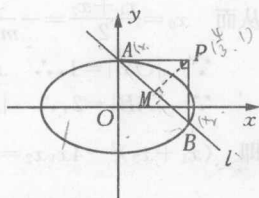


图 1-4

设线段  $AB$  的中点为  $M$ , 则  $M(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$ .

$\because \triangle APB$  为等腰直角三角形,

$$\therefore PM \perp l, \text{ 且 } |PM| = \frac{|\frac{4}{3} + 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 因此 } K_{PM} = 1, \text{ 于是}$$

$$\frac{a}{a+b} - 1 = \frac{b}{a+b} - \frac{4}{3} \Rightarrow b = 2a, \quad (1)$$

$$\text{又 } |AB| = 2|PM| = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sqrt{2}|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{16}{9},$$

$$\therefore (\frac{2b}{a+b})^2 - 4 \cdot \frac{b-1}{a+b} = \frac{16}{9}, \text{ 即 } (\frac{b}{a+b})^2 - \frac{b-1}{a+b} = \frac{4}{9}. \quad (2)$$

$$\text{将 } (1) \text{ 式代入 } (2) \text{ 式得 } (\frac{2}{3})^2 - \frac{2a-1}{3a} = \frac{4}{9},$$

由此解得  $a = \frac{1}{2}$ , 从而  $b = 1$ .

$\therefore$  椭圆方程是  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

点评 若椭圆焦点所在坐标轴没有直接给出,则可按本题方法设椭圆方程,这样可避免对焦点位置进行讨论,且运算更为方便.

例5 已知椭圆中心在原点,焦点在坐标轴上,直线  $l: y = \sqrt{3}(x+1)$  与椭圆相交于  $A, B$  两点,若线段  $AB$  的中点  $M$  到原点的距离为 1,且  $|AB| = 2$ ,求这椭圆方程.

解法1 设椭圆方程为  $mx^2 + ny^2 = 1 (m, n > 0, m \neq n)$ , 将  $y = \sqrt{3}(x+1)$  代入椭圆方程,得

$$(m+3n)x^2 + 6nx + 3n - 1 = 0.$$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$ , 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{6n}{m+3n}, x_1 x_2 = \frac{3n-1}{m+3n},$$

从而  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3n}{m+3n}, y_0 = \sqrt{3}(x_0 + 1) = \frac{\sqrt{3}m}{m+3n}$ .

$\therefore |OM| = 1, \therefore x_0^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow 9n^2 + 3m^2 = (m+3n)^2 \Rightarrow m = 3n.$  ①

$\therefore |AB| = 2, \therefore |x_1 - x_2| = 1,$

即  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1, \therefore (\frac{6n}{m+3n})^2 - 4 \cdot \frac{3n-1}{m+3n} = 1,$  ②

将①式代入②式,得  $1 - 4 \cdot \frac{3n-1}{6n} = 1 \Rightarrow 3n - 1 = 0, \therefore n = \frac{1}{3}, m = 1.$

此时  $\Delta = (6n)^2 - 4(m+3n)(3n-1) = (6n)^2 > 0,$

$\therefore$  椭圆方程是  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1.$

解法2 设  $M(x_0, y_0)$ , 由已知,有  $\begin{cases} y_0 = \sqrt{3}(x_0 + 1) \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0.$

$\therefore x_0 = -\frac{1}{2}$  或  $x_0 = -1.$

$\therefore M$  为  $AB$  的中点,  $\therefore x = -1$  不合要求.

$\therefore M(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}). \therefore |AB| = 2,$

$\therefore |MA| = |MB| = |MO| = 1 \Rightarrow \triangle AOB$  为直角三角形,且  $AO \perp BO.$

设  $A(x_1, \sqrt{3}(x_1+1)), B(x_2, \sqrt{3}(x_2+1))$ , 则

$$\frac{\sqrt{3}(x_1+1)}{x_1} \cdot \frac{\sqrt{3}(x_2+1)}{x_2} = -1 \Rightarrow 4x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2 + 1) = 0.$$

$\therefore x_1 + x_2 = 2x_0 = -1, \therefore x_1 + x_2 + 1 = 0.$

从而  $x_1 x_2 = 0, \therefore x_1 = 0, x_2 = -1.$

$\therefore A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0),$