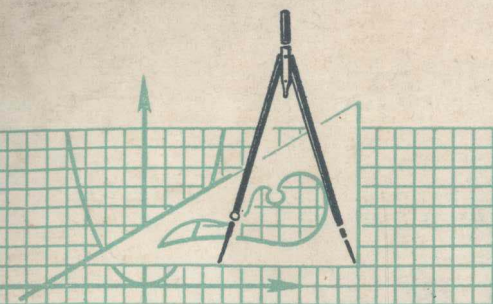




数学小丛书

格点和面积

閔 嗣 鹤

北京市数学会編
人民教育出版社

数学小丛书

格点和面积

闵嗣鹤

北京市数学会编

人民教育出版社

1964年·北京

一張方格紙，上面画着纵横兩組平行綫，相邻平行綫之間的距离都相等，这样兩組平行綫的交点，就是所謂格点。在平面上一个有限的区域内，格点的个数总是一个整数。怎样用格点的个数去計算平面上有限区域的面积，或者，反过来，在平面上已知面积的一个有限区域内至少有多少格点，这就是这本小册子所要討論的問題。这里面特別討論了一条叫做“数的几何中的基本定理”：关于原点对称的凸区域，如果除原点以外不包含其他格点，它的面积頂多是 4。为了证明这条定理，书中还介紹了一条叫“重迭原則”的定理。联系重迭原則，又討論了怎样用有理数逼近无理数等問題。这本小册子就是这样圍繞着格点和面积这个主题，讲了数学上一些有用的問題。

格 点 和 面 积

闵 嗣 鶴

北京市书刊出版业营业許可証出字第 二 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店北京发行所发行

全 国 新 华 书 店 經 售

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

統一书号：13012·44 字数：15 千

开本：787×1092 毫米 1/32 印張：1 $\frac{1}{4}$

1964 年 2 月新一版

1965 年 8 月第二次印刷

北京：23,701—86,700 册

定价 0.12 元

編 者 的 話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的。近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物。我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求。

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际。

这是我们的初步想法和尝试。热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物。

北京市数学会

1962年4月

目 次

一	什么是格点?	3
二	我們的中心問題	3
三	面积的近似計算	4
四	格点多边形的面积公式	7
五	格点多边形面积公式的証明	10
六	另外一个問題的提出	15
七	重迭原則	18
八	有理数和无理数	19
九	用有理数逼近无理数	21
一〇	小数部分 $\{k\alpha\}$ 的分布	25
一一	另一种重迭原則	27
一二	数的几何中的基本定理	28
附录	习题解法提示	33

一 什么是格点？

平常我們用的方格紙，都画着縱橫兩組平行綫，相邻平行綫之間的距离总是相等的。方格紙上兩組直綫的交点，就是所謂**格点**。

如果取一个格点做原点 O ，如图 1，取通过这个格点的橫向和縱向兩直綫分別做橫坐标軸 OX 和縱坐标軸 OY ，并取原来方格紙上相邻平行綫之間的距离做单位长，那末，我們就建立了一个**坐标系**。这时，前面所說的格点，显然就是縱橫两坐标都是整数的点。如图 1 中的 O ， P ， Q ， M ， N ，都是格点。由于这个緣故，我們又叫格点做**整点**。

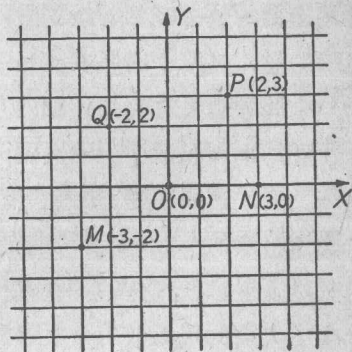


图 1.

二 我們的中心問題

在这本小册子里所要討論的問題，都是圍繞着格点和面积这个主題的。

在一个平面上，格点有无穷多，但是两个不同格点的距离至少是 1，因此，我們說平面上的一个个格点是孤立的或零散

的。在平面上一个有限的区域内(例如某一个圆内),格点的个数总是一个整数。格点的个数如果要增加或减少,增加或减少的至少是1个,不会有不到1个的零数。和这相反,平面上一个区域的面积,常常随着区域边界的微小变动而連續地改变,比方可以改变0.1个单位,或更小如0.01个单位,以至0.001个单位,0.0001个单位,……因此,我們可以說面积是一种連續的量。

在数学里面,我們有两个很基本的問題,那就是:第一,怎样用連續的量去概括零散的量;第二,怎样用零散的量去逼近連續的量。这两个問題其实是一个問題的两个方面。不过,第一个問題着重在利用連續的量去研究或估計零散的量。这是古老的物理和数学上的問題。著名的圆内格点問題就属于这一类型。这問題是:知道了以原点做中心的圆的面积,要估計圆内格点的个数(參看习题2)。近年来,由于电子計算机的长足发展,对于許多零散的量都有了計算的办法,因此,又产生了大量的用零散的量去逼近連續的量的問題。一个简单的例子就是:怎样用一个区域内的格点数去逼近区域的面积,这也就是本書所要討論的一个問題。

三 面积的近似計算

当我們測量田地、园林、湖沼、島屿等等的面积时,需要种种簡便方法来計算面积的近似值。最常用的有所謂平行綫法,方格法和三角法。这里順次簡單介紹如下:

(一)平行綫法 如图2,我們用 $n+1$ 条直綫把所求面积

分成 n 条, 相邻平行线之间的距离都是 d 。为简单起见, 我们假定平行线中第 1 条和第 $n+1$ 条跟所求面积的边界或者相切于一点, 或者有一段重合, 而其他每一条直线跟面积的边界

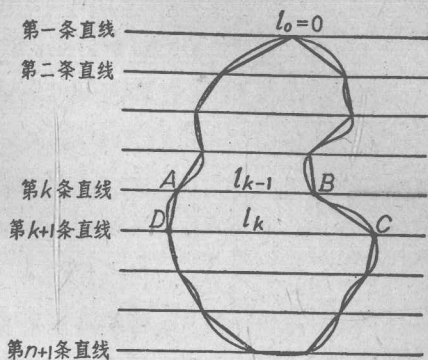


图 2.

恰好交于两点。我们依次用 $l_0, l_1, \dots, l_{k-1}, l_k, \dots, l_{n-1}, l_n$ 表示各平行线和面积相交的一段的长度(可能是 0)。考虑在第 k 条直线和第 $k+1$ 条直线之间的面积。当 d 很小时, 这一条面积是和图中梯形 $ABCD$ 的面积很接近的。因此, 我们可以近似地用梯形面积

$$\frac{1}{2}d(l_{k-1} + l_k)$$

来代替这一条面积。特别当 $k=1$ 或 $k=n$ 时, 所谓梯形可能蜕化为三角形。我们把各条面积的近似值合起来, 就得到所求面积(记作 A)的近似值:

$$A \approx \frac{1}{2}d(l_0 + l_1) + \frac{1}{2}d(l_1 + l_2) + \dots + \frac{1}{2}d(l_{k-1} + l_k) + \dots + \frac{1}{2}d(l_{n-1} + l_n),$$

$$\text{即} \quad A \approx d\left(\frac{1}{2}l_0 + l_1 + \dots + l_{n-1} + \frac{1}{2}l_n\right), \quad (1)$$

式中 $\approx$ 表示近似地相等。

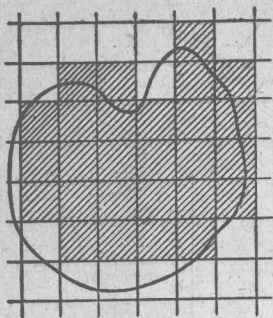


图 3.

(二)方格法 在所求面积上,打好方格,如图 3. 假定相邻平行线之间的距离是 d , 那末每一方格的面积就是 d^2 . 考虑左下角格点落在所求面积上的小方格的全体, 这就是图中画上了斜线的那些小方格. 在一般情形下, 当 d 取得很小时, 这些小方格面积的和是和所求面积很接近的. 另一方面, 每一个这种画

了斜线的小方格, 和它的左下角格点彼此一一对应. 因此, 计算一下落在面积上的格点数 (记作 N), 就容易得到这种小方格的面积和, 它等于 Nd^2 . 如果用 A 表示所求面积, 那末我们就得到下面的近似公式:

$$A \approx Nd^2. \quad (2)$$

(三)三角法 在所求面积的边界上, 按一定方向顺次取 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 共 n 个点, 依次联结成 n 边形 $P_1P_2 \dots P_n$, 如图 4. 把这 n 边形用任意方法分成三角形, 然后求各三角形的面积和. 我们就可以把所得面积和作为所求面积的近似值. 这种求近似值的方法比较灵活, 便于在测量上运用.

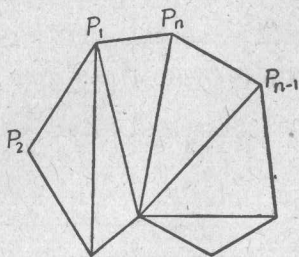


图 4.

以上各种求面积近似值的方法, 优点是简便易算, 缺点是由于

誤差，沒有給出任何的估計。

習 題

1. 在果園里種樹，相鄰兩株的距離是 d （圖 5 中黑點代表樹的位置）。假如園子的面積是 A ，證明果樹的株數 N 可以用下面的近似公式表達出來：

$$N \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{d^2}.$$

這是林學上常用的公式。

2. 以原點做中心， R 做半徑作圓，記圓內格點數做 N ，證明：

$$|\pi R^2 - N| \leq 4\sqrt{2}\pi R.$$

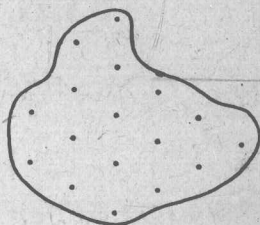


圖 5.

四 格点多边形的面积公式

一個多邊形的頂點如果全是格點，這多邊形就叫做**格点多邊形**。前面用方格法求面積的時候，得到的是近似公式，這公式的誤差還沒有估計。由於格点多邊形是比較特殊的多邊形，它和格點更有密切的關係，因此，我們提出這樣的問題：對

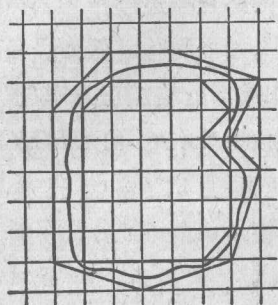


圖 6.

於格点多邊形，能否建立格點數目和面積之間的精密公式？這問題如果能夠得到肯定的回答，那對於用方格法求面積也是有幫助的。如圖 6，我們作了兩個格点多邊形：一個包含着所求面積，一個被含在所求面積的內部。顯然所求面積 A 一定在這兩個格点多

边形的面积 A_1 和 A_2 之間, 即

$$A_1 \leq A \leq A_2.$$

从上式各减去 A_1 和 A_2 的平均值, 就得到:

$$A_1 - \frac{A_1 + A_2}{2} \leq A - \frac{A_1 + A_2}{2} \leq A_2 - \frac{A_1 + A_2}{2},$$

即

$$-\frac{A_2 - A_1}{2} \leq A - \frac{A_1 + A_2}{2} \leq \frac{A_2 - A_1}{2},$$

或

$$\left| A - \frac{A_1 + A_2}{2} \right| \leq \frac{A_2 - A_1}{2}.$$

这說明: 如果我們用所作两个格点多边形面积的平均值作为所求面积的近似值, 誤差頂多是两个格点多边形面积的差的一半。这种求面积近似值的方法可以看成是方格法和三角法的結合。

在一般数学書里面, 只講公式的証明而不講怎样寻求公式。这里, 为了引起讀者鑽研問題的兴趣, 我們要借助这一个简单的例子——寻求联系格点多边形的面积和格点数的精确关系——說明怎样通过特殊的情形归納出一般的公式。

为简单起見, 我們假定每个小方格的边长 $d=1$ 。首先, 我們选择面积和格点数都容易計算的格点多边形作为具体例子, 加以討論。例如边长是

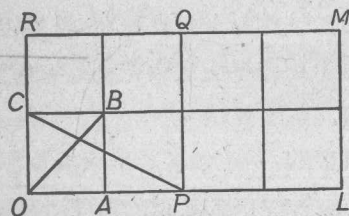


图 7.

1 或 2 的格点正方形 (图 7 中的 $OABC$ 和 $OPQR$), 两腰是 1 的格点三角形 (图 7 中的 OAB), 一腰是 1, 一腰是 2 的直角三角形 (图 7 中的 OPC), 边长

是 2 和 4 的格点矩形 (图 7 中的 $OLMR$)。我們把它們的面积 A , 内部格点数 N 和边上格点数 L , 列成一表如下:

图 形	A	N	L	$A-N$	$L/2$
$OABC$	1	0	4	1	2
$OPQR$	4	1	8	3	4
OAB	$\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
OPC	1	0	4	1	2
$OLMR$	8	3	12	5	6

看过上表的前四行, 我們可能感到很失望, A, N, L 之間几乎看不出什么联系来。不过我們在前面已經看到, 当 A 很大时, A 和 N 的差是(相对地說)很小的。因此, 我們在表上添了一行, 包含 $A-N$ 的值。这行数字是随着 L 而增大的。如果用 2 去除 L , 列到最后一行, 我們立刻得到下面的有趣的关系:

$$A-N = \frac{L}{2} - 1,$$

即

$$A = N + \frac{L}{2} - 1. \quad (3)$$

这就是說, 如果我們把边上的每一个格点作为半个来計算, 那末, 格点数 $N + \frac{L}{2}$ 和面积 A 的差就恰好是 1。

公式 (3) 是我們从五个特例归納出来的。它到底是正确的, 还是一种巧合呢? 要彻底解决这个問題, 当然还要通过严格的証明。不过, 目前我們还應該抱怀疑的态度, 再檢驗一

下,理由是,我們的五个特例还是既简单又特殊的。为了容易列表,我們的确應該先选择简单而易于驗算的特例,但在归納出公式以后,就需要找一个更复杂更有代表性的例子,再来驗証一下公式的正确性。例如我們选择图 8 的四边形 $ABCD$,不

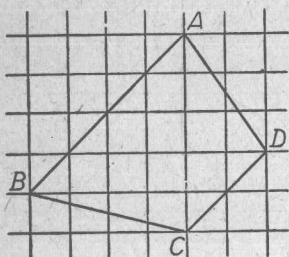


图 8.

难看出,对于这个四边形,我們有

$$A=15, N=12, L=8,$$

而 $15 = 12 + \frac{8}{2} - 1.$

这一个附加的特例,使我們对于公式(3)的正确性,得到更大的保証。因此,我們應該进一步考虑怎样去証明这个公式了。

五 格点多边形面积公式的証明

像寻求公式的时候那样,我們在思索一个公式的証明时,也可以先从比較简单的特殊情形想起。現在我們就先考虑两边平行于坐标軸的格点矩形 $ABCD$, 如图 9。我們假定这矩形的长寬分別是 m 和 n 。容易从图看出,这时,面积 A , 内部格点数 N 和边上格点数 L 分别是:

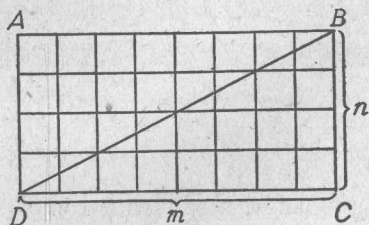


图 9.

$$A = mn,$$

$$N = (m-1)(n-1),$$

$$L = 2(m+1) + 2(n-1) = 2(m+n).$$

} (4)

(最后一式中, $2(m+1)$ 是上下两边的格点数, $2(n-1)$ 是左右两边除去顶点以外的格点数。) 因此,

$$N + \frac{L}{2} - 1 = (m-1)(n-1) + (m+n) - 1 = mn = A.$$

这表明公式(3)对于矩形是成立的。

有了矩形作基础, 我们就不难讨论两腰分别和两坐标轴平行的格点直角三角形, 例如上图中的 $\triangle BCD$ 或 $\triangle ABD$. 由图形的对称性, 容易看出 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 的面积, 内部格点数和边上格点数都是分别相等的。(事实上, 如果把矩形 $ABCD$ 绕它的中心即对角线的交点旋转 180° , 那末 $\triangle ABD$ 就和 $\triangle CDB$ 重合, 而且格点也都一一重合起来了。) 如果用 L_1 表 BD 线段内部格点数 (即不包含端点的格点数), 那末, 除去这 L_1 个格点以后, 矩形内部的格点就平均分配在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 的内部。又前面已经算出, 矩形内部的格点数是 $(m-1)(n-1)$, 所以这两个三角形内部都有

$$N = \frac{(m-1)(n-1) - L_1}{2}$$

个格点。又容易看出, 这两个三角形边上的格点数都是

$$L = m + 1 + n + L_1,$$

而面积显然都是

$$A = \frac{mn}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} N + \frac{L}{2} &= \frac{(m-1)(n-1) - L_1}{2} + \frac{m+n+1+L_1}{2} \\ &= \frac{mn}{2} + 1 = A + 1. \end{aligned}$$

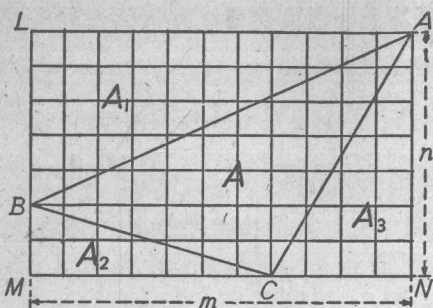


图 10.

这表明公式(3)对于两腰平行于坐标轴的格点直角三角形是正确的。

现在我们进一步讨论一般的格点三角形。

$\triangle ABC$ 是一个格点三角形,如图10,方格纸上通过三顶点的直线围成一个矩形 $ALMN$ 。三角形 ALB , BMC , CNA 都是直角三角形,因此都满足公式(3)。现在把图中四个三角形的面积,内部格点数和边上格点数,分别用不同的记号表示出来,列成下表:

三 角 形	面 积	内部格点数	边上格点数
$\triangle ABC$	A	N	L
$\triangle ALB$	A_1	N_1	L_1
$\triangle BMC$	A_2	N_2	L_2
$\triangle CNA$	A_3	N_3	L_3

利用前面所得到的关于矩形面积和格点的公式(4),容易由图 10 看出:

$$\left. \begin{aligned} A + A_1 + A_2 + A_3 &= mn, \\ N + N_1 + N_2 + N_3 + L - 3 &= (m-1)(n-1), \\ L + L_1 + L_2 + L_3 - 2L &= 2(m+n). \end{aligned} \right\} (5)$$

对于最后一行, 还需要解释一下. 显然 $\triangle ABC$ 边上每一个格点也是相邻三角形边上的一个格点. 因此, 每一个这样的格点恰好在 $L_1 + L_2 + L_3$ 中计算了一次. 又 A, B, C 三点, 都在 $L_1 + L_2 + L_3$ 中计算了两次. 所以 $L + L_1 + L_2 + L_3 - 2L = L_1 + L_2 + L_3 - L$ 实际上就是矩形边界上的格点数, 因此, 它等于 $2(m+n)$.

顺次用 $1, -1, -\frac{1}{2}$ 乘 (5) 的三个式子, 然后相加, 就得到:

$$\begin{aligned} A - (N + \frac{1}{2}L) + [A_1 - (N_1 + \frac{1}{2}L_1)] \\ + [A_2 - (N_2 + \frac{1}{2}L_2)] + [A_3 - (N_3 + \frac{1}{2}L_3)] + 3 = -1. \end{aligned}$$

但是, 我們已經知道公式 (3) 对于直角三角形是成立的, 因此, 上式中有方括号的各項都等于 -1 . 所以由上式得

$$A - (N + \frac{1}{2}L) = -1.$$

这表明对于格点三角形, 公式 (3) 是正确的 (参看习题 5).

最后, 討論一般的格点多边形 $A_1A_2\cdots A_n$, 如图 11. 我們可以用数学归纳法. 当 $n=3$

时, 公式已經证明. 現在假定公式对于 $n-1$ 边形成立, 要证明公式对于 n 边形也成立.

联結 $A_{n-1}A_1$, 我們就把这个 n 边形分成一个格点三角形和一个 $n-1$ 边格点多边形.

用

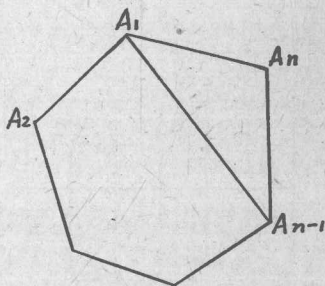


图 11.

$$\begin{array}{ccc} A_1, & A_2, & A; \\ N_1, & N_2, & N; \\ L_1, & L_2, & L \end{array}$$

分别表示这三三角形, $n-1$ 边形和原来的 n 边形的面积, 内部格点数和边上格点数, 我们就得到:

$$A = A_1 + A_2,$$

$$N = N_1 + N_2 + L_0 - 2,$$

$$L = L_1 + L_2 - 2L_0 + 2,$$

其中 L_0 表示 $A_1 A_{n-1}$ 上的格点数 (包含 A_1, A_{n-1} 两点)。因此, 根据归纳法的假设,

$$\begin{aligned} N + \frac{L}{2} &= (N_1 + \frac{L_1}{2}) + (N_2 + \frac{L_2}{2}) - 1 \\ &= A_1 + 1 + A_2 + 1 - 1 \\ &= A + 1. \end{aligned}$$

这就证明了公式 (3) 对于 n 边形也成立 (参看习题 5)。

习 题

3. 证明: 内部和边上 (顶点除外) 没有格点的格点三角形的面积等于 $\frac{1}{2}$ 。

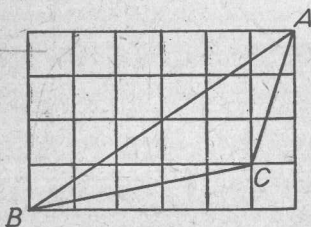


图 12.

4. 证明: 对边平行且相等的 $2n$ 边格点多边形面积总是整数。

5. 上面对于公式 (3) 的证明还需要一些补充。在我们考虑一般的格点三角形时, 可能遇到像图 12 中的那种情形。试考虑一切可能的情形, 并且加以讨