

王玉梅 李立◎编

经济管理 运筹学

Jingji Guanli Yunchouxue



 中国标准出版社

经济管理运筹学

王玉梅 李立 编

中国标准出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

经济管理运筹学/王玉梅,李立编. —北京:中国标准出版社,2010

ISBN 978-7-5066-5806-5

I. ①经… II. ①王… ②李… III. ①经济管理-运筹学 IV. ①F224.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 071045 号

中国标准出版社出版发行
北京复兴门外三里河北街 16 号

邮政编码:100045

网址 www.spc.net.cn

电话:68523946 68517548

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 23.25 字数 568 千字

2010 年 5 月第一版 2010 年 5 月第一次印刷

*

定价 39.00 元

如有印装差错 由本社发行中心调换

版权专有 侵权必究

举报电话:(010)68533533

前言

PREFACE

运筹学是一门以人机系统的组织、管理为对象,应用数学和计算机等工具来研究各类有限资源的合理规划使用并提供优化决策方案的科学。它是经济管理类专业本、专科生和研究生层次的重要专业基础课。

本书由青岛科技大学在第一线工作的、已从事运筹学教学十余年的教师编写,力求根据 21 世纪经济管理人才对运筹学教学的需求,既反映这门学科的新进展,又深入浅出地阐明运筹学的基本概念、理论和方法,以及各类模型的结构特征、经济含义及其在管理中的应用。本书主要适用对象是经济管理专业的大学本专科生、研究生,同时也兼顾理工类专业本科生、研究生和实际工作人员的需要。

全书汲取国内外经典教材精华,总结提炼编者自己的教学经验和成果,系统地介绍了运筹学的线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存贮论、决策论、对策论的基本概念、理论、方法和模型。内容上力求阐明概念和方法的经济、物理含义,用较多的例子介绍各种模型的建立及它们在实际中的应用。各章后附有习题,供复习、消化课本知识及讨论和深入学习之用。

一本好的教材,重在特色,贵在质量。为使本教材不断开拓创新,做到与时俱进,需要不断磨砺,反复修改提高,本书编者将为此继续努力。鉴于编者水平有限,书中有不妥或错误之处,恳请广大读者批评指正。

非常感谢青岛科技大学刘树艳、王志宪、苑吉洋、杨仪清、孙在东、张志耀、柴丽俊、杨友才、傅佳琳、张靖、王宪涛、王丽等人在本书的编写过程中给予的帮助与支持。

编者

2010 年 3 月 15 日

目 录

CONTENTS

第 0 章 绪论	1
0.1 运筹学释义与发展简史	1
0.2 运筹学研究的基本特点	2
0.3 运筹学的主要分支	4
0.4 运筹学与管理科学	5
第 1 章 线性规划与单纯形法	7
1.1 线性规划问题及其数学模型	7
1.2 线性规划问题的几何意义	14
1.3 单纯形法	18
1.4 单纯形法的计算步骤	26
1.5 单纯形法的进一步讨论	29
1.6 应用举例	34
习题	39
第 2 章 对偶理论和灵敏度分析	43
2.1 单纯形法的矩阵描述	43
2.2 改进的单纯形法	44
2.3 对偶问题的提出	47
2.4 线性规划的对偶理论	49
2.5 对偶问题的经济解释——影子价格	56
2.6 对偶单纯形法	56
2.7 灵敏度分析	59
2.8 参数线性规划	65
习题	67
第 3 章 运输问题	71
3.1 运输问题的数学模型	71
3.2 表上作业法	72

3.3 产销不平衡的运输问题及其求解方法	79
3.4 应用举例	81
习题	86
第4章 目标规划	89
4.1 目标规划的数学模型	89
4.2 解目标规划的图解法	91
4.3 解目标规划的单纯形法	92
4.4 灵敏度分析	94
4.5 应用举例	96
习题	98
第5章 整数规划	100
5.1 整数规划问题的提出	100
5.2 分枝定界解法	101
5.3 割平面解法	103
5.4 0-1 型整数规划	106
5.5 指派问题	109
习题	114
第6章 无约束问题	116
6.1 基本概念	116
6.2 一维搜索	127
6.3 无约束极值问题的解法	131
第7章 约束极值问题	149
7.1 最优性条件	149
7.2 二次规划	152
7.3 可行方向法	155
7.4 制约函数法	158
习题	163
第8章 动态规划的基本方法	166
8.1 多阶段决策过程及实例	166

8.2 动态规划的基本概念和基本方程	167
8.3 动态规划的最优性原理和最优性定理	174
8.4 动态规划和静态规划的关系	176
习题	181
第 9 章 动态规划应用举例	183
9.1 资源分配问题	183
9.2 生产与存储问题	193
9.3 背包问题	202
9.4 复合系统工作可靠性问题	205
9.5 排序问题	207
9.6 设备更新问题	209
9.7 货郎担问题	212
习题	213
第 10 章 图与网络优化	217
10.1 基本概念	217
10.2 树	221
10.3 最短路问题	225
10.4 网络最大流问题	232
10.5 最小费用最大流问题	237
10.6 中国邮递员问题	239
习题	242
第 11 章 网络计划	245
11.1 网络计划图	245
11.2 网络计划图的时间参数计算	248
11.3 网络计划的优化	252
11.4 网络计划软件	256
习题	257
第 12 章 排队论	260
12.1 基本概念	260
12.2 到达间隔的分布和服务时间的分布	263

12.3	单服务台负指数分布排队系统的分析	269
12.4	多服务台负指数分布排队系统的分析	277
12.5	一般服务时间 $M/G/1$ 模型	283
12.6	经济分析——系统的最优化	286
12.7	分析排队系统的随机模拟法	289
	习题	293
 第 13 章 存储论		296
13.1	基本概念	296
13.2	确定性存储模型	298
13.3	随机性存储模型	310
13.4	其他类型存储问题	324
	习题	325
 第 14 章 对策论基础		327
14.1	引言	327
14.2	矩阵对策的基本定理	330
14.3	矩阵对策的解法	342
14.4	其他类型对策简介	351
	习题	357
 参考文献		360

第 章 绪 论

0.1 运筹学释义与发展简史

运筹学一词起源于 20 世纪 30 年代。据《大英百科全书》释义：“运筹学是一门应用于管理，有组织系统的科学”，“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具。”我国《辞海》(1970 年版)中有关运筹学条目的释义为：“运筹学主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达有关运用、筹划与管理方面的问题。它根据问题的需求，通过数学的分析与运算，做出综合性的合理安排，以达到较经济，较有效地使用人力物力的目的。”《中国企业管理百科全书》(1984 年版)中的释义为：“运筹学应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人、财、物等有限资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。”

运筹学一词的英文原名为 Operations Research(缩写为 O. R.)。可直译为“运用研究”或“作业研究”。由于运筹学涉及的主要领域是管理问题，研究的基本手段是建立数学模型，并比较多地运用各种数学工具，从这点出发，曾有人将运筹学称做“管理数学”。1957 年我国从“夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”(见《史记·高祖本记》)这句古语中摘取“运筹”二字，将 O. R. 正式译作运筹学，比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

朴素的运筹学思想在我国古代文献中就有不少记载，例如齐王赛马和丁谓主持皇宫的修复等事件。但运筹学这个名词的正式使用是在 1938 年，当时英国为解决空袭的早期预警，做好反侵略战争准备，积极进行“雷达”的研究，但随着雷达性能的改善和配置数量的增多，出现了来自不同雷达站的信息以及雷达站同整个防空作战系统的协调配合问题。1938 年 7 月，波得塞(Bawdsey)雷达站的负责人罗伊(A. PRowe)提出立即进行整个防空作战系统运行的研究，并用“Operational Research”一词作为这方面的研究描述，这就是 O. R. (运筹学)这个名词的起源。运筹学小组的活动，开始局限于对空军战术的研究，以后扩展到海军和陆军，并参与战略决策的研究。这种研究在美国、加拿大等国很快得到效仿。二次世界大战中，各国的运筹学小组广泛进行了如何提高轰炸效果或侦察效果，如何用水雷有效封锁敌方海面和其他战略战术方面的分析。为取得反法西斯战争的胜利做出了贡献。1939 年苏联学者康托洛维奇出版了《生产组织与计划中的数学方法》一书，对彼得格勒胶合板厂的计划任务建立了一个线性规划的模型，并提出了“解乘法法”的求解方法，为数学与管理科学的结合做出了开创性的工作。

战后，运筹学的活动扩展到工业和政府等部门，它的发展大致可分三个阶段：

(1) 从 1945 年到 20 世纪 50 年代初，被称为创建时期。此阶段的特点是人数不多，范围较小，出版物、学会等寥寥无几。最早英国一些战时从事运筹学研究的人积极讨论如何将运筹学方法应用于民用部门，于 1948 年成立“运筹学俱乐部”，在煤炭、电力等部门推广应用运筹学取得一些进展。1948 年美国麻省理工学院把运筹学作为一门课程介绍，1950 年英国

伯明大学正式开设运筹学课程,1952年在美国喀斯工业大学设立了运筹学的硕士和博士学位。第一本运筹学杂志《运筹学季刊》(O. R. Quarterly)1950年于英国创刊,第一个运筹学会美国运筹学会于1952年成立,并于同年出版运筹学学报(Journal of ORSA)。

(2) 20世纪50年代初期到20世纪50年代末期,被认为是运筹学的成长时期。此阶段的一个特点是电子计算机技术的迅速发展,使得运筹学中一些方法,如单纯形法、动态规划方法等,得以用来解决实际管理系统中的优化问题,促进了运筹学的推广应用。20世纪50年代末,美国大约有半数的大公司在自己的经营管理中应用运筹学。另一个特点是有更多刊物、学会出现,从1956年到1959年就有法国、印度、日本、荷兰、比利时等十个国家成立运筹学会,并又有6种运筹学刊物问世。1957年在英国牛津大学召开了第一次国际运筹学会议。1959年成立国际运筹学会。

(3) 自20世纪60年代以来,被认为是运筹学迅速发展和开始普及的时期,此阶段的特点是运筹学进一步细分为各个分支,专业学术团体的迅速增多,更多期刊的创办,运筹学书籍的大量出版以及更多学校将运筹学课程纳入教学计划之中。第三代电子数字计算机的出现,促使运筹学得以用来研究一些大的复杂的系统,如城市交通、环境污染、国民经济计划等。

我国第一个运筹学小组于1956年在中国科学院力学研究所成立,1958年建立了运筹学研究室,1960年在山东济南召开全国运筹学专业学术会议,1980年4月成立中国运筹学会,在农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油化工、水利、邮电、纺织等部门,运筹学的方法已开始得到应用推广。除中国运筹学会外,中国系统工程学会以及国民经济各部门有关的专业学会也都把运筹学应用作为重要的研究领域。我国各高等院校,特别是各经济管理类专业中已普遍把运筹学作为一门专业的主干课程列入教学计划之中。

目前国际上著名的运筹学刊物有: *Management Science*, *Operations Research*, *Interfaces*, *Journal of Operational Research Society*, *European Journal of Operations Research* 等,国内运筹学的专门刊物或较多刊登运筹学理论和应用的刊物主要有:运筹学学报、运筹学与管理、系统工程学报、系统工程理论与实践、系统工程理论方法应用、数量经济技术经济研究、预测、系统工程、系统科学与数学等。

0.2 运筹学研究的基本特点

运筹学研究的基本特点是:考虑系统的整体优化、多学科的配合以及模型方法的应用。

1. 系统的整体优化

所谓系统,可以理解为是由相互关联、相互制约、相互作用的一些部分组成的具有某种功能的有机整体。例如一个企业的经营管理是由很多子系统组成。包括生产、销售、技术、供应、财务等,各子系统的工作好坏直接影响企业经营管理的好坏。但各子系统的目标往往不一致,生产部门为提高劳动生产率希望尽可能增大批量;销售部门为满足更多用户需要,要求增加花色品种;财务部门希望减少积压,加速流动资金周转,降低成本。运筹学不是对每一个决策行为孤立进行评价,而是把它同系统内所有其他重要的相互作用结合起来做出评价,把相互影响的各方面作为一个统一体,从总体利益的观点出发,寻找一个优化协调的方案。

2. 多学科的配合

一个企业的有效管理涉及很多方面。运筹学研究中吸收来自不同领域、具有不同经验

和技能的专家,由于专家们来自不同的学科领域,具有不同的经历经验,增强了发挥小组集体智慧提出问题和解决问题的能力。这种多学科的配合在研究的初期,在分析和确定问题的主要方面,在选定和探索解决问题的途径时,显得特别重要。

3. 模型方法的应用

在各门学科的研究中广泛应用实验的方法,但运筹学研究的系统往往不能搬到实验室来,代替的方法是建立这个问题的数学和模拟的模型,如果说辅助决策是运筹学应用的核心,建立模型则是运筹学方法的精髓。围绕着模型的建立、修正与应用,运筹学的研究可划分为以下步骤:

(1) 分析与表述问题。首先对研究的问题和系统进行观察分析,归纳出决策的目标及制订决策时在行动和时间等方面的限制,实际问题不同于教科书上的例子,很多矛盾交织在一起,边界模糊,情况不确切,需要深入调查分析,并同有关人员一起讨论,明确有关研究问题的过去与未来、问题的边界、环境以及包含这个问题在内的更大系统的有关情况,以便在对问题的表述中明确要不要把整个问题分成若干个较小的子问题,确定问题中哪些是可控的决策变量,哪些是不可控的变量,确定限制变量取值的工艺技术条件及对目标的有效度量等。例如运筹学小组在对美国旧金山警署实现巡警值班与调度优化研究时,曾提出三个目标:第一是维护市民的高度安全;第二是保证警官的高昂士气;第三是运行成本最小。经研究,为达到第一个目标,警署同市政府共同建立了一个期望的安全水平,通过平衡警官的工作量来达到第二个目标,最后通过确立优化的巡逻制度,在满足前两个目标基础上,使用较少的警官来实现低成本运行,为此在这个步骤中,运筹学研究小组还要花时间收集同问题的有关数据、特别是一些关键的数据。

(2) 建立模型。模型是真实系统的代表,是对实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达。模型表达了问题中可控的决策变量、不可控变量、工艺技术条件及目标有效度量之间的相互关系,模型的正确建立是运筹学研究中的关键一步。对模型的研制是一项艺术,它是将实际问题、经验、科学方法三者有机结合的创造性的工作。建立模型的好处,一是使问题的描述高度规范化,如管理中,对人力、设备、材料、资金的利用安排都可以归纳为所谓资源的分配利用问题,可建立起一个统一的规划模型,而对规划模型的研究代替了对一个个具体问题的分析研究。二是建立模型后,可以通过输入各种数据资料,分析各种因素同系统整体目标之间的因果关系,从而确立一套逻辑的分析问题的程序方法。三是建立系统的模型为应用电子计算机来解决实际问题架设起桥梁。建立模型时既要尽可能包含系统的各种信息资料,又要抓住本质的因素。因为模型毕竟是对问题的理想化抽象。所以建模时进行近似或简化假设是必要的,去除一些不重要的因素不会影响问题的结果,建模过程中,一种好的做法是从简单的形式开始,然后逐步丰富使其接近实际问题。一般建模时应尽可能选择建立数学模型,但有时问题中的各种关系难于用数学语言描绘,或问题中包含的随机因素较多时,也可以建立起一个模拟的模型,即将问题的因素、目标及运行时的关系用逻辑框图的形式表示出来。

(3) 对问题求解,即用数学方法或其他工具对模型求解。根据问题的要求,可分别求出最优解、次最优解或满意解;依据对解精度的要求及算法上实现的可能性,又可区分为精确解和近似解等。目前运筹学教材中的算法主要是求最优解,实际上管理问题的解只要满意或对最优解的足够近似即可。近年来发展起来的启发式算法和很多软计算方法(如遗传算法、模拟退火法、蚁群算法等)应成为求解运筹学模型的重要工具。

(4) 对模型和由模型求出的解进行检验。将实际问题的数据资料代入模型,找出的精

确的或近似的解毕竟是模型的解。为了检验得到的解是否正确,常采用回溯的方法,即将历史的资料输入模型,研究得到的解与历史实际的符合程度,以判断模型是否正确。当发现有较大误差时,要将实际问题同模型重新对比,检查实际问题中的重要因素在模型中是否已考虑,检查模型中各公式的表达是否前后一致。检查模型中各参数取值情况,以便发现问题进行修正。

(5) 建立起对解的有效控制。任何模型都有一定的适用范围,模型的解是否有效要首先注意模型是否继续有效,并依据灵敏度分析的方法,确定最优解保持稳定时的参数变化范围,一旦外界条件参数变化超出这个范围时,及时对模型及求出的解进行修正。

(6) 方案的实施。这是很关键但也是很困难的一步,只有实施方案后,研究成果才能有收获。这一步要求明确:方案由谁去实施,什么时间去实施,如何实施,要求估计实施过程可能遇到的阻力,并为此制订相应的克服困难的措施。

0.3 运筹学的主要分支

运筹学按所解决问题性质上的差别,将实际的问题归结为不同类型的数学模型,这些不同类型的数学模型构成了运筹学的各个分支,主要的分支有以下八项。

1. 线性规划

经济管理如何有效地利用现有人力、物力完成更多的任务,或在预定的任务目标下,如何耗用最少的人力、物力去实现。这类统筹规划的问题用数学语言表达,先根据问题要达到的目标选取适当的变量,问题的目标通过用变量的函数形式表示(称为目标函数),对问题的限制条件用有关变量的等式或不等式表达(称为约束条件)。当变量连续取值,且目标函数和约束条件均为线性时,称这类模型为线性规划的模型。有关对线性规划问题建模、求解和应用的研究构成了运筹学中的线性规划分支。内容涉及线性规划及单纯形法、对偶理论、运输问题等。

2. 非线性规划

如果上述模型中目标函数或约束条件不全是线性的,对这类模型的研究便构成了非线性规划的分支。由于大多数工程物理量的表达式是非线性的,因此非线性规划在各类工程的优化设计中得到较多的应用,它是优化设计的有力工具。

3. 动态规划

动态规划是研究多阶段决策过程最优化的运筹学分支。有些经济管理活动由一系列相互关联的阶段组成,在每个阶段依次进行决策,而且上一阶段的输出状态就是下一阶段的输入状态,且各阶段决策之间互相关联,因而形成一个多阶段的决策过程。动态规划研究多阶段决策过程的总体优化,即从系统总体出发,要求各阶段决策所构成的决策序列使目标函数值达到最优。

4. 图与网络分析

生产管理中经常遇到工序的合理衔接问题,设计中经常遇到研究各种管道、线路的通过能力,以及仓库、附属设施的布局等问题。运筹学中把一些研究的对象用节点表示,对象之间的联系用连线表示。点、连线的集合构成图。图论是研究由节点和连线所组成图形的数学理论和方法。图是网络分析的基础,根据研究的具体网络对象(如铁路网、电力网、通信网等),赋予图中各连线某个具体的参数,如时间、流量、费用、距离等。规定图中各节点代表具

体网络中任何一种流动的起点、中转点或终点,然后利用图论方法来研究各类网络结构和流量的优化分析。网络分析还包括利用网络图形来描述一项工程中各项作业的进度和结构关系,以便对工程进度进行优化控制。

5. 存储论

一种研究最优存贮策略的理论和方法。如为了保证企业生产的正常进行,需要有一定数量原材料和零部件的储备,以调节供需之间的不平衡。实际问题中,需求量可以是常数,也可以是服从某一分布的随机变量。每次订货需一定费用,提出订货后,货物可以一次到达,也可能分批到达。从提出订货到货物的到达可能是即时的,也可能需要一个周期(订货提前期)。某些情况下允许缺货,有些情况不允许缺货。存贮策略研究在不同需求、供货及到达方式等情况下,确定在什么时间点及一次提出多大批量的订货,使用于订购、贮存和可能发生短缺的费用的总和为最少。

6. 排队论

生产和生活中存在大量有形和无形的拥挤和排队现象。排队系统由服务机构(服务员)及被服务的对象(顾客)组成。一般顾客的到达及服务员用于对每名顾客的服务时间是随机的,服务员可以是一个或多个,多种情况下又分平行或串联排列。排队按一定规则进行,一般按到达顺序先到先服务,但也有享受优先服务权的。按系统中顾客容量,可分为等待制、损失制、混合制等。排队论研究顾客不同输入、各类服务时间的分布、不同服务员数及不同排队规则情况下,排队系统的工作性能和状态,为设计新的排队系统及改进现有系统的性能提供数量依据。

7. 对策论

用于研究具有对抗局势的模型。在这类模型中,参与对抗的各方称为局中人,每个局中人均有一组策略可供选择,当各局中人分别采取不同策略时,对应一个收益或需要支付的函数。在社会、经济、管理等与人类活动有关的系统中,各局中人都按各自的利益和知识进行对策,每个人都力求扩大自己的利益,但又无法精确预测其他局中人的行为,无法取得必要的信息,他们之间还可能玩弄花招,制造假象。对策论为局中人在这种高度不确定和充满竞争的环境中,提供一套完整的、定量化和程序化的选择策略的理论和方法。对策论已应用于商品、消费者、生产者之间的供求平衡分析,利益集团间的协商和谈判,以及军事上各种作战模型的研究等。

8. 决策论

在一个管理系统中,采用不同的策略会得到不同的结局和效果。由于系统状态和决策准则的差别,对效果的度量和决策的选择也有差异。决策论通过对系统状态的性质、采取的策略及效果的度量进行综合研究,以便确定决策准则,并选择最优的决策方案。

0.4 运筹学与管理科学

从生产出现分工开始就有管理,但管理作为一门科学则始于20世纪初,随着生产规模的日益扩大和分工的越来越细,要求生产组织高度的合理性、高度的计划性和高度的经济性,促使人们不仅研究生产的个别部门,而且要研究它们相互之间的联系,要当作一个整体研究,并在已有方案基础上寻求更优的方案,从而促进了运筹学的发展和应用。

运筹学的诞生既是管理科学发展的需要,也是管理科学研究深化的标志。管理科学是

研究人类管理活动的规律及其应用的一门综合性交叉科学,这是运筹学研究和提出问题的基础,但运筹学又在对问题进一步分析的基础上找出各种因素之间的本质联系,并对问题通过建模和求解,使人们对管理活动的规律性认识进一步深化。例如管理中有关库存问题的讨论,对最高和最低控制限的存储方法,过去只从定性上进行描述,而运筹学则进一步研究了在各种不同需求情况下最高与最低控制限的具体数值。又如计划的编制,过去习惯采用的甘特图只是反映了各道工序的起止时间,反映不出它们相互之间的联系和制约,而运筹学中通过编制网络计划,从系统的观点提示了这种工序间的联系和制约,为计划的调整优化提供了科学的依据。

有人将运筹学概括为是用科学方法去了解 and 解释运行系统的现象,这种系统的含义非常广泛,从包含着人和在自然环境中运行的机器,一直到按一定规则运行的复杂社会结构。运筹学观察运行系统的现象,创造理论、模型来解释这些现象,描述在条件变化时会发生的事情,并根据新的观察来检验这些预言。运筹学应用科学方法来创建它的知识,从数量上研究揭示运行系统的现象和规律,这正是被其他科学所忽略的部分。

运筹学在管理人才的培养中占有重要地位,这是因为:第一,运筹学训练培养管理人员的调查、分析和逻辑思维能力。前面讲到的运筹学建模和应用的6个步骤,特别是前两个步骤是提高这方面能力的极好锻炼;第二,运筹学着眼于系统的全局最优,它不仅考虑系统内各子系统的联系,而且分析该系统同周围环境的交互影响,在对模型的验证中,还要代入有关数据测试可能的运行结局,因而有助于培养管理人员着眼全局和洞察问题的能力;第三,通过学习运筹学培养管理人员掌握运用数学工具进行创造性工作的能力。事实表明,数学对现代科学的发展直到越来越重要的作用。运筹学是数学同管理学科间的重要桥梁,因而掌握运筹学的思想、模型、方法对管理工作者的成长将起到深远的影响。

任何一门科学的发展,一是受科学发展的内在客观规律支配,二是社会因素,特别是社会经济发展的需求。我国管理科学的发展正面临十分有利的机遇,但由于管理科学所研究的社会经济运动是物质运动的最高方式,因而它的发展更有赖于其他学科的发展,而运筹学则是从数量上揭示管理活动规律,促进管理科学发展的学科之一。

运筹学的研究应用已经在管理工作中带来了大量财富的节约,一般是问题的规模越大、越复杂,应用效果越显著。由国际运筹学联合会和美国运筹学会联合主办的 *Interfaces* 杂志主要刊登运筹学的应用成果。国际运筹学联合会每年在世界范围内评选出6项最优秀的运筹学应用成果授予 Franz Edelman 奖,并刊登于该杂志次年的第1期(1-2月号)上。例如 Citgo 石油公司通过炼油过程及产品供应、分配、销售的整体优化,带来每年0.7亿美元的效益;美洲航空公司通过设计和运行一个票价结构、订票和协调航班的系统,年效益在5亿美元以上。我国从20世纪80年代起,经过近10年的工作,建立了一个考虑国民经济发展对能源需求、减少煤炭对环境污染条件下,对发电、煤矿开采、交通建设综合优化平衡的混合整数规划模型,提出的对上述大型项目优选及投产安排的方案年经济效益在4.25亿美元以上,获1994年度的 Franz Edelman 奖。

总的来说,运筹学毕竟是一门年轻的科学,它的诞生还只有60多年的历史。一方面现有的运筹学模型分支还远远描述不了复杂的管理现象,需要发展新的分支模型。另一方面,实际的管理问题中社会、经济、技术、心理各种因素互相交织,需要各方面的专业人员协同配合。总之,运筹学是在解决实际管理问题中发展起来,而管理科学的发展又必将为运筹学的进一步研究发展开辟更广阔的领域。

第 1 章 线性规划与单纯形法

1.1 线性规划问题及其数学模型

线性规划是运筹学的一个重要分支。自 1947 年丹捷格(G. B. Dantzig)提出了一般线性规划问题求解的方法——单纯形法之后,线性规划在理论上趋向成熟,在实用中日益广泛与深入。特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域就更为广泛了:从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用。它已是现代科学管理的重要手段之一。

1.1.1 问题的提出

在生产管理和经营活动中有一类问题经常会被提出,即如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源,以便得到最好的经济效果。

例 1 某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品,已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗,如表 1-1 所示。

表 1-1

项目名称	单位产品消耗		总资源
	I	II	
设 备	1	2	8 台时
原材料 A	4	0	16 kg
原材料 B	0	4	12 kg

该工厂每生产一件产品 I 可获利 2 元,每生产一件产品 II 可获利 3 元,问应如何安排计划使该工厂获利最多?

解: 该问题可以用以下的数学模型来描述。设 x_1 、 x_2 分别表示在计划期内产品 I、II 的产量。因为设备的有效台时是 8,这是一个限制产量的条件,所以在确定产品 I、II 的产量时,要考虑不超过设备的有效台时数,即可用不等式表示为:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

同理,因原材料 A、B 的限量,可以得到以下不等式

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_2 \leq 12$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下,如何确定产量 x_1 、 x_2 以得到最大的利润。若用 z 表示利润,这时 $z = 2x_1 + 3x_2$ 。综合上述,该计划问题可用数学模型表示为:

$$\text{目标函数} \quad \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{满足约束条件} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 2 靠近某河流有两个化工厂(见图 1-1),流经第一化工厂的河流流量为每天 500 万 m^3 ,

在两个工厂之间有一条流量为每天 200 万 m^3 的支流。第一化工厂每天排放含有某种有害物质的工业污水 2 万 m^3 , 第二化工厂每天排放这种工业污水 1.4 万 m^3 。从第一化工厂排出的工业污水流到第二化工厂以前, 有 20% 可自然净化。根据环保要求, 河流中工业污水的含量应不大于 0.2% 。这两个工厂都需各自处理一部分工业污水。第一化工厂处理工业污水的成本是 $1\,000 \text{ 元/万 m}^3$, 第二化工厂处理工业污水的成本是 800 元/万 m^3 。现在要问在满足环保要求的条件下, 每厂各应处理多少工业污水, 使这两个工厂总的处理工业污水费用最小。

解: 这个问题可用数学模型来描述。设第一化工厂每天处理工业污水量为 x_1 (单位为 万 m^3), 第二化工厂每天处理工业污水量为 x_2 (单位为 万 m^3), 从第一化工厂到第二化工厂之间, 河流中工业污水含量要不大于 0.2% , 由此可得近似关系式 $(2-x_1)/500 \leq 2/1\,000$ 。

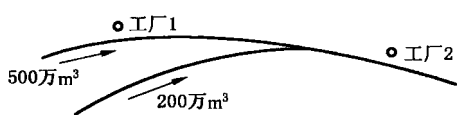


图 1-1

流经第二化工厂后, 河流中的工业污水量仍要不大于 0.2% , 这时有近似关系式

$$[0.8(2-x_1) + (1.4-x_2)]/700 \leq 2/1\,000$$

由于每个工厂每天处理的工业污水量不会大于每天的排放量, 故有 $x_1 \leq 2, x_2 \leq 1.4$ 。

这问题的目标是要求两厂用于处理工业污水的总费用最小, 即 $z = 1\,000x_1 + 800x_2$ 。综合上述, 这个环保问题可用数学模型表示为:

$$\text{目标函数} \quad \min z = 1\,000x_1 + 800x_2$$

$$\text{满足约束条件} \quad \begin{cases} x_1 \geq 1 \\ 0.8x_1 + x_2 \geq 1.6 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 1.4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

以上两例都是属于一类优化问题, 具有共同特征:

(1) 每一个问题都用一组决策变量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示某一方案, 这组决策变量的值就代表一个具体方案。一般这些变量的取值是非负且连续的。

(2) 存在有关的数据, 同决策变量构成互不矛盾的约束条件, 这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示。

(3) 都有一个要求达到的目标, 它可用决策变量及其有关的价值系数构成的线性函数 (称为目标函数) 来表示。按问题的不同, 要求目标函数实现最大化或最小化。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。其一般形式为:

$$\text{目标函数} \quad \max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1-1)$$

$$\text{满足约束条件} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \dots \end{cases} \quad (1-2)$$

$$\begin{cases} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

在线性规划的数学模型中, 式(1-1)称为目标函数, $c_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为价值系数; 式(1-2)、式(1-3)称为约束条件; $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 称为技术系数, $b_i (i=1, 2, \dots, m)$

称为限额系数;式(1-3)也称为变量的非负约束条件。

例3 用一块边长为 a 的正方形铁皮做一个容器,应如何裁剪,使做成的容器的容积为最大。

对于这一问题一般只要在铁皮四个角上剪去四个边长各为 x 的正方形,折叠起来就做成一个容器,容积为 $V=(a-2x)^2x$,要使容积最大,就是要确定 x 的值,使 V 达到最大。

可见这一问题的目标函数不是线性的,所以例3不是线性规划问题。

1.1.2 图解法

图解法简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。现对上述例1用图解法求解。在以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系中,非负条件 $x_1, x_2 \geq 0$ 是指第一象限。例1的每个约束条件都代表一个半平面。如约束条件 $x_1 + 2x_2 \leq 8$ 是代表以直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 为边界的左下方的半平面,若同时满足 $x_1, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 16$ 和 $4x_2 \leq 12$ 的约束条件的点,必然落在 x_1, x_2 坐标轴和由这三个半平面交成的区域内。由例1的所有约束条件为半平面交成的区域见图1-2中的阴影部分。阴影区域中的每一个点(包括边界点)都是这个线性规划问题的解(称可行解),因而此区域是例1的线性规划问题的解集合,称它为可行域。

再分析目标函数 $z = 2x_1 + 3x_2$,在这坐标平面上,它可表示以 z 为参数、 $-2/3$ 为斜率的一族平行线: $x_2 = -(2/3)x_1 + z/3$ 。位于同一直线上的点,具有相同的目标函数值,因而称它为“等值线”。当 z 值由小变大时,直线 $x_2 = -(2/3)x_1 + z/3$ 沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_2 点时,使 z 值在可行域边界实现最大化(见图1-3),就得到了例1的最优解 Q_2 , Q_2 点的坐标为 $(4, 2)$ 。于是可计算出满足所有约束条件下的最大值 $z = 14$ 。

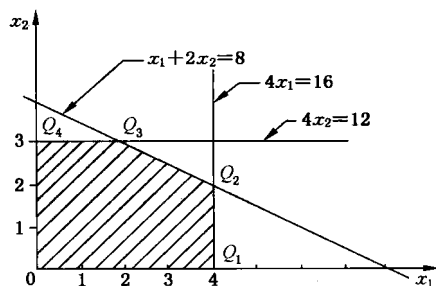


图 1-2

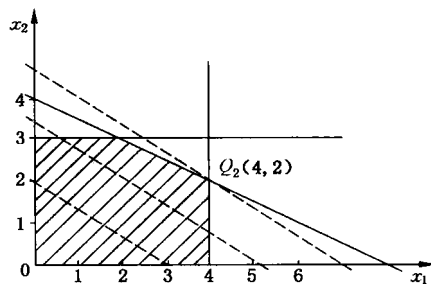


图 1-3

这说明该厂的最优生产计划方案是:生产4件产品I,生产2件产品II,可得最大利润为14元。

上例中求解得到问题的最优解是唯一的,但对一般线性规划问题,求解结果还可能出现以下几种情况。

1. 无穷多最优解(多重最优解)

若将例1中的目标函数变为求 $\max z = 2x_1 + 4x_2$,则表示目标函数中以参数 z 的这族平行直线与约束条件 $x_1 + 2x_2 \leq 8$ 的边界线平行。当 z 值由小变大时,将与线段 Q_2Q_3 重合(见图1-4)。线段 Q_2Q_3 上任意一点都使 z 取得相同的最大值,这个线性规划问题有无穷多最优解(多重最优解)。

2. 无界解

对下述线性规划问题

$$\max z = x_1 + x_2$$