有限群及其表示论若干问题研究

刘晓蕾◎著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

有限群及其表示论若干问题研究

刘晓蕾　著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书研究有限群及其表示论的若干重要问题，给出了关于正规性、置换化子条件、共轭类长、特征标级等的最新成果，可以作为高等学校数学专业高年级学生、研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限群及其表示论若干问题研究/刘晓蕾著. —北京：国防工业出版社，2010. 6

ISBN 978-7-118-06817-7

Ⅰ.①有... Ⅱ.①刘... Ⅲ.①有限群—群表示—研究 Ⅳ.①O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 072479 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 8½ **字数** 165 千字

2010 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3500 册 **定价** 19.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

有限群论及其表示论,是代数学的前沿之一。

在抽象有限群群论中,群的构造是最基本和最重要的研究对象。而研究有限群的构造理论,有许多重要的方法。其中,通过元素或子群的性质来刻画有限群的结构,一直是一个活跃的课题,有着十分丰富的内容。

通过元素刻画有限群结构,已有一些经典结果。例如,借助于特征标理论,Burnside 证明了单群的元素的共轭类长不能是素数幂,进而证明了著名的 p^aq^b 阶群可解性定理。利用元素的共轭类长刻画有限群的结构,也已有一些经典结果。例如,R. Baer 详细研究了每一个素数幂阶元素的共轭类长是素数幂的有限群;Camina 则把 Baer 问题局部化,引入了 q—Bare 群的概念;D. Chillag 和 M. Herzog 利用有限单群分类定理对元素的共轭类长与群结构的关系进行了相当广泛而深刻的研究。

利用子群性质来刻画有限群有多种途径,也有许多深刻的结果。例如,正规性作为群论的一个非常基本的概念,被广泛重视;Ore 和 Kegel 等人首先推广正规性,引入了拟正规等概念,并用这些概念对有限群进行了多方面的研究。

置换化子条件对有限群结构有重要影响,利用有限单群分类定理,Beidleman 和 D. Robinson 刻画了满足置换化子条件的有限群。

覆盖和远离对刻画有限群是很有用的。例如,Gaschütz、Chambers、Tomkinson、Ezquerro 和郭秀云等人系统地研究了具有覆盖和远离性质的子群对群的可解性、超可解性及其他性质的影响,得出了丰富的结果。

在有限群的表示论中,不可约的复特征标级的意义是重要研究内容。而不可约的复特征标级跟元素的共轭类长的类似之处和相似关系,是人们特别感兴趣的。Dolf 和 Isaacs 就证明了在可解群中,共轭类长和不可约复特征标级之间有直接的联系。

如果一个群的每一个真子群是幂零的,但该群本身不是幂零的,则称这样的群为 Schmidt 群。Schmidt 子群对有限群的结构与性质有着重要的影响。例

如，一个有限群是幂零群的充要条件是它不包含 Schmidt 子群。Schmidt 群首先被 Schmidt. O. Yu 所研究。之后，许多学者进行了研究，得到了进一步的结果。

本书主要研究上述专题，是作者的博士学位论文的延续和深化。作者衷心感谢中山大学王燕鸣教授多方面的指导和帮助；衷心感谢山西大学张宝林教授和上海大学郭秀云教授，在他们的指导下接触有限群论并打下了有限群论的基础；感谢同事李启亮先生在写作过程中给予的技术上的帮助，衷心感谢刘炯编辑为本书的出版付出的辛勤劳动。最后，非常感谢山西财经大学为本人的学习和科研提供了方便条件。

因作者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎批评指正。

刘晓蕾

目　　录

引 论

群是代数学最基本，也是最重要的概念之一. 它不仅在数学本身，即使在现代科学的诸多方面都有广泛而重要的应用. 从产生到现在，群论经历了近 200 年. 经过众多数学家的努力，群论不断地解决问题，也不断地提出问题；不断地在其他学科得到应用，也不断地从其他学科获取思想和方法. 在群论的众多分支中，由于自身的特点，有限群论无论从理论上，还是从实际应用来说，都占据着更为突出的地位.

有限群论，最重要的无疑是有限群的构造理论. 研究有限群的构造理论，有许多重要的方法. 其中，通过元素或子群的性质来刻画有限群的结构，一直是一个活跃的课题，有着十分丰富的内容. 本书研究有限群的若干问题.

第一章收集了研究有限群的必备知识. 利用元素刻画有限群结构，已有一些经典结果. 例如，借助于特征标理论，Burnside 证明了单群的元素的共轭类长不能是素数幂，进而证明了著名的 $p^a q^b$ 阶群可解性定理. 利用元素的共轭类长刻画有限群的结构，也有一些经典结果. 例如，R. Baer 详细研究了每一个素数幂阶元素的共轭类长是素数幂的有限群[1]；Camina 则把 Baer 问题局部化，引入了 q 一Baer 群的概念[2]；D. Chillag 和 M. Herzog 利用有限单群分类定理对元素的共轭类长与群结构的关系进行了相当广泛而深刻的研究[3]；王燕鸣和 J. Cossey 用初等方法对 D. Chillag 和 M. Herzog 的结果进行了深化和改进[4]. 第二章进一步研究了元素的共轭类长与群结构的关系.

利用子群性质来刻画有限群有多种途径，也有许多深刻的结果. 正规性是群论的一个非常基本的概念. 作为正规性的早期推广，Ore 和 Kegel 等人引入了拟正规和 π一拟正规的概念. 用拟正规和 π一拟正规的概念，人们对有限群进行了广泛的研究，得到了丰富的成果. 近几年来，正规性概念又得到了深入的推广. 王燕鸣引入了 c一正规性概念，并成功地用 c一正规性给出了有限群可解性、超可解性等的新准则[5]. c一正规性已是现在有限群论中一个频繁出现的概念. 之后，王燕鸣又用 c一supplement 的概念，得到了有限群的可解性、超可解性及幂零性的新的刻画[6]. 作为 c一supplement 的推广，第三章引入了两个新概念.

Beidleman 和 D. Robinson 深入研究了置换化子条件对有限群结构的影响，

给出了满足置换化子条件的有限群的深刻刻画[10]. 所谓置换化子条件是指：每一个真子群真包含在其置换化子中. 利用有限单群分类定理，Beidleman 和 D. Robinson 证明了下述定理：满足置换化子条件的有限群 G 必定可解，且其主因子的阶或者是 4，或者是素数. 如果 N 是 G 的 4 阶主因子，那么 G 在 N 上诱导完全自同构，即 $G/C_G(N)\cong S_3$. 第四章对置换化子进行了深入研究，证明了上述定理在相当弱的条件下依然成立.

在刻画有限群及其某些子群时，覆盖和远离是很有用的. 例如，Gaschütz 在有限可解群中引入了所谓的 pre-Frattini 子群，这些子群是共轭的[11]. Pre-Frattini 子群远离群的被补的主因子，但同时覆盖所有其他主因子. Chambers 得到了有限可解群的子群是 f-Pre-Frattini 子群的一个充分条件[12]. Tomkinson 给出了构造一类群的方法，这类群子群或者覆盖，或者远离一个有限群的每一个主因子[13]. Ezquerro 在对某类子群要求覆盖和远离性质后，分别得到了一个有限群的 p—超可解性、超可解性[14]. 之后，郭秀云系统地研究了具有覆盖和远离性质的子群对群的可解性、超可解性及其他性质的影响，得出了丰富的结果[15]. 第五章对一个有限群的给定的主因子，用覆盖和远离得到了其可解的若干条件.

Dolf 和 Isaacs 证明了在可解群中，共轭类长和不可约复特征标级之间有直接的联系. 第六章研究了在较弱的条件之下，有限群的共轭类长和不可约复特征标级之间仍然具有良好的关系.

如果 G 的每一个真子群是幂零的，但 G 本身不是幂零的，则称 G 是一个 Schmidt 群. Schmidt 子群对有限群的结构与性质有着重要的影响. 例如，一个有限群是幂零群的充要条件是它不包含 Schmidt 子群. Schmidt 群首先被 Schmidt. O. Yu 所研究. 之后许多学者进行了研究，得到了进一步的结果. 第七章研究了有限群的可解性与 Schmidt 子群的关系.

第一章　基本知识

本章收集了以后各章要用到的基本知识.对一些初等结论,将略去证明.

1.1　基本概念

1.1.1　群的简单性质

定义 1　设 G 是一个非空集合,在其上定义了一个被称为乘法的二元运算,如果它满足下述三个条件,则称 G 是一个群:

(1) 结合律:$(ab)c=a(bc)$,$\forall a,b,c\in G$.

(2) 存在单位元,即存在 $e\in G$,使得对于任意的 $a\in G$,$ea=ae=a$.

(3) G 中每一个元有逆元,即对于任意的 $a\in G$,存在 $b\in G$,使得 $ab=ba=e$.

注　群的定义有若干等价形式.例如:

群的等价定义之一　设 G 是一个非空集合,在其上定义了一个被称为乘法的二元运算,如果它满足下述三个条件,则称 G 是一个群:

(1) 结合律:$(ab)c=a(bc)$,$a,b,c\in G$.

(2) 存在左(右)单位元,即存在 $e\in G$,使得对于任意的 $a\in G$,$ea=a(ae=a)$.

(3) G 中每一个元有左(右)逆元,即对于任意的 $a\in G$,存在 $b\in G$,使得 $ba=e(ba=e)$.

群的等价定义之二　设 G 是一个非空集合,在其上定义了一个被称为乘法的二元运算,如果它满足下述两个条件,则称 G 是一个群:

(1) 结合律成立:$(ab)c=a(bc)$,$a,b,c\in G$;

(2) 对于任意的 $a,b\in G$,方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 都在 G 中有解.

有限群的等价定义　设 G 是一个非空有限集合,在其上定义了一个被称为乘法的二元运算.则 G 是一个群的充要条件是该运算满足结合律,也满足消去律,即对于任意的 $a,b,c\in G$,如果 $ac=bc$,则 $a=b$;如果 $ca=cb$,则 $a=b$.

定义 2　设 G 是一个群.如果 G 满足交换律,即对于任意的 $a,b\in G$,$ab=ba$,那么称 G 为交换群,或 abel 群.

群的简单性质：

性质 1 群中的单位元是唯一的.

性质 2 群中的每一个元有唯一的逆元. 这样，如果 a 是群 G 中元，则以 a^{-1} 表示 a 的逆元.

性质 3 设 a 是群 G 中任意元，则 $(a^{-1})^{-1}=a$.

性质 4 群中消去律成立.

性质 5 设 a,b 是群 G 中任意元，则 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

性质 6 群中指数律成立.

1.1.2 子群

定义 1 设 G 是一个群，H 是 G 的一个非空子集. 如果 H 对 G 的运算也构成一个群，则称 H 是 G 的一个子群. 如果 H 是 G 的子群，则记 $H\leqslant G$；如果 H 是 G 的子群，但 H 不等于 G，即 H 是 G 的真子群，那么记 $H<G$. 任何一个群 G 都有两个明显的子群，即 G 本身和仅由 G 的单位元组成的群.

子群的判别条件 1 设 H 是 G 的一个非空子集. 则 H 是 G 的子群的充分必要条件是：

(1) 如果 $a,b\in H$，则 $ab\in H$；

(2) 如果 $a\in H$，则 $a^{-1}\in H$.

子群的判别条件 2 设 H 是 G 的一个非空子集. 则 H 是 G 的子群的充分必要条件是：对于任意的 $a,b\in H$，必有 $ab^{-1}\in H$.

子群的判别条件 3 设 H 是群 G 的一个非空有限子集. 则 H 是 G 的子群的充分必要条件是 H 对 G 的运算是封闭的，即：如果 $a,b\in H$，则 $ab\in H$.

设 H 和 K 均是群 G 的非空子集，规定 H 和 K 的乘积为

$$HK=\{hk\mid h\in H,k\in K\}.$$

如果 K 仅由一个元素 a 组成，则简记为 $HK=Ha$，$KH=aH$. 也规定 $H^{-1}=\{h^{-1}\mid h\in H\}$. 借助于这些约定，可以得到子群的如下判别条件：

子群的判别条件 1′ 群 G 的非空子集 H 是 G 的子群的充分必要条件是 $HH\subseteq H$，$H^{-1}\subseteq H$.

关于子群的如下两个定理是容易验证的.

定理 1 群的任意多个子群的交仍然是该群的子群.

定理 2 设 H 和 K 是群 G 的子群. 则 HK 是 G 的子群的充分必要条件是 $HK=KH$.

1.1.3 子群的陪集

定义 1 设 G 是一个群，H 是 G 的一个子群，a 是 G 中一个元素. 称

$aH(Ha)$为 H 在 G 中的一个左(右)陪集.

以下只讨论右陪集. 对于左陪集有相仿的结果. 关于子群 H 在 G 中的右陪集,有如下简单性质:

(1) 对于 $a\in G$, Ha 和 H 之间存在自然的双射.

(2) 对于 $a\in G$, $Ha=H$ 的充分必要条件是 $a\in H$.

(3) 对于 $a\in G$, $a\in Ha$. 称 a 为右陪集 Ha 的一个陪集代表元.

(4) 对于 $a\in G$,如果 $b\in Ha$,则 $Ha=Hb$.

(5) $Ha=Hb$ 的充分必要条件是 $ab^{-1}\in H$.

(6) 任意两个右陪集 Ha 及 Hb 或者相等,或者不相交.

这样,若 G 是一个有限群, H 是 G 的一个子群,则 G 可以表示为 H 的若干个不相交的右陪集的并. 以 $|G:H|$ 表示 H 在 G 中的右陪集个数,并称为 H 在 G 中的指数.

定理 1(Lagrange) 设 G 是一个有限群. 那么 G 的阶等于子群 H 的阶与 H 在 G 中的指数的乘积:

$$|G|=|H||G:H|.$$

定理 2 设 H 与 K 是群 G 的有限子群,则

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}.$$

定理 3 设 G 是有限群, H 和 K 是 G 的子群,则下述结论成立:

(1) 如果 K 是 H 的子群,则 $|G:K|=|G:H||H:K|$.

(2) $|\langle H,K\rangle:H|\geqslant|K:K\cap H|$.

(3) $|G:K\cap H|\leqslant|G:H||G:K|$.

(4) 若 $|G:H|$ 和 $|G:K|$ 互素,则 $|G:H\cap K|=|G:H||G:K|$.

(5) (Dedekind 恒等式) 设 $A\leqslant C\leqslant G$,且 $G\subseteq AB$,那么有 $C=AB\cap C=A(B\cap C)$.

注 由(4)不难证明,对于不同的素数 p 和 q, G 的 Hall p'-子群与 Hall q'-子群之交是 G 的 Hall$\{p,q\}'$-子群.

在(5)中,实际上只需 A,B 均是含有 G 的单位元的子集,而不必是子群.

1.1.4 共轭

定义 1 设 G 是群, $a,g\in G$, $M\leqslant G$.

(1) 规定 $a^g=g^{-1}ag$,并称其为 a 在 g 下的共轭变形,或 a 的一个共轭.

(2) 规定 $M^g=g^{-1}Mg$.

命题 1 设 G 是一个群, $a,g,h\in G$. 则下面等式成立:

(1) $a^{gh}=(a^g)^h$.

(2) $(ab)^g=a^gb^g$.

(3) $(a^g)^{-1}=(a^{-1})^g$.

命题 2 群的元素(子群、子集)间的共轭关系是等价关系. 因此,一个群可以表示为其元素的共轭等价类(称为共轭类)的并. 特别地,若 G 是一个有限群,$C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是其全部共轭类,则 $G=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k$,因而有所谓的**类方程**

$$|G|=|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_k|.$$

设 G 是群,$a\in G$,$H\subseteq G$. 规定

$$N_G(H)=\{g\in G\mid H^g=H\}$$

及

$$C_G(H)=\{g\in G\mid h^g=h,h\in H\},$$

并分别称为 H 在 G 中的**正规化子**和**中心化子**. 特别地,若 H 只含一个元素 a,则可以将 $C_G(H)$ 记为 $C_G(a)$,而且此时有 $C_G(a)=N_G(a)$. 记 $Z(G)=C_G(G)$,并称之为 G 的**中心**.

命题 3 G 中元素 a 所属的共轭类 C 的长度 $|C|=|G:C_G(a)|$,因此,$|C|$ 是 $|G|$ 的因子. 类似地,子群(或子集 H)的共轭子群(或共轭子集)的个数为 $|G:N_G(H)|$,也是 $|G|$ 的因子.

设 H,K 是有限群 G 的子群,则称形如 HaK 的子集为 G 关于子群 H 和 K 的一个双陪集. 类似于陪集,则有如下命题成立.

命题 4 对于双陪集成立:HaK 和 HbK 或者相等,或者无交. 于是,G 可表示成互不相交的若干双陪集的并.

命题 5 任一双陪集 HaK 可表示成若干 H 的右陪集(或 H 的若干左陪集)的并. 它包含 H 的右陪集的个数为 $|K:H^a\cap K|$,而包含 K 的左陪集的个数为 $|H^a:H^a\cap K|$.

证 只证明关于右陪集的结论.

假定 $g\in HaK$,则 $Hg\subseteq H(HaK)=HaK$. 因此,HaK 由若干个 H 的右陪集的并组成. 设 HaK 包含 n 个 H 的右陪集,则 $n=|HaK|/|H|$. 又显然有 $|HaK|=|a^{-1}HaK|=|H^aK|$. 由前面定理,$|H^aK|=|H^a||K|/(|H^a\cap K|)=|H||K|/(|H^a\cap K|)$,于是,$n=|H||K|/(|H^a\cap K||H|)=|K|/(|H^a\cap K|)=|K:H^a\cap K|$.

命题 6 有限群的任意一个真子群的全部共轭子群的并是该群的真子集.

证明 设 G 是一个有限群,H 是 G 的一个真子群,$H_1=H,H_2,\cdots,H_k$ 是与 H 共轭的全部子群,则 $k=|G:N_G(H)|$. 因为 $N_G(H)\geqslant H$,有 $k\leqslant|G:H|$. 于是有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} H_i\right| = 1+\left|\bigcup_{i=1}^{k}(H_i-\{1\})\right| \leqslant 1+k(|H|-1) \leqslant$$
$$1+|G:H|(|H|-1) = |G|-|G:H|+1.$$

因为 H 是 G 的真子群，故 $|G:H|>1$. 因而

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} H_i\right| < |G|,$$

即 $\bigcup_{i=1}^{k} H_i$ 是 G 的真子集.

注 实际上，利用参考文献[17]中的定理 1 可以证明，有限群的任意一个真子群的全部共轭子群的并不能包含 G 的全部素数幂阶元.

证明 借助于上述命题的证明中的假设，来证明 G 中存在素数幂阶元 x 使得 $x\notin \bigcup_{i=1}^{k} H_i$. 令 $\Omega=\{H_1=H, H_2, \cdots, H_k\}$，$G$ 依共轭作用在 Ω 上. 可以假设 $|\Omega|>1$. 当然 G 传递地作用在 Ω 上. 因此，由参考文献[17]中的定理 1 可知，G 中存在素数幂阶元 x，使得 x 不正规化 Ω 中任意元，故有 $x\notin \bigcup_{i=1}^{k} H_i$.

1.1.5 正规子群与同态

定义 1 设 G 是一个群，N 是 G 的一个子群. 如果对任意的 $g\in G$，N^g 包含在 N 中，则称 N 是 G 的正规子群，并记为 $N\trianglelefteq G$. 显然，G 和 G 中单位元的单点集均是 G 的正规子群，称其为 G 的平凡的正规子群. 称只有平凡正规子群的群为单群.

命题 1 设 G 是一个群，N 是 G 的正规子群. 则下述条件等价：

(1) $N\trianglelefteq G$.

(2) 对任意 $g\in G$，$N^g=N$.

(3) $N_G(N)=G$.

(4) 对任意 $g\in G$，$Ng=gN$.

(5) N 在 G 中的每一个左陪集均是一个右陪集.

(6) 对任意 $n\in N$，G 的包含 n 的共轭元素类仍然在 N 中.

命题 2 群 G 的有限多个正规子群之交是 G 的正规子群；群 G 的有限多个正规子群生成的子群是 G 的正规子群.

命题 3 若 N 是 G 的子群，且 $|G:N|=2$，则 $N\trianglelefteq G$.

命题 4 设 G 是一个群，N 是 G 的正规子群，H 是 G 的任意子群. 则 N，H 生成的子群等于 NH.

定理 1 设 N 是 G 的子群. 则能够通过规定

$$(gN)(hN) = ghN,$$

在 N 的左陪集上定义一个乘法的充分必要条件是 $N\trianglelefteq G$. 而且，在这个乘法下，这些左陪集做成一个群.

记定理 1 中的群为 G/N，称为 G 对 N 的**商群**. 显然有，$|G/N|=|G:N|$.

定义 2 设 G 和 G_1 是两个群，α 是 G 到 G_1 的一个映射. 如果对任意的 $a,b\in G,(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$，则称 α 是 G 到 G_1 的一个同态(映射)；

如果 α 是一个满(单)射，则称为 G 到 G_1 的一个**满(单)同态**；

如果 α 是一个双射，则称为 G 到 G_1 的一个**同构映射**，记为 $G\cong G_1$.

设 G 和 H 是两个群，α 是 G 到 H 的一个同态映射. 令 $\mathrm{Ker}\ \alpha=\{g\in G\mid g^\alpha=1\}$，称其为同态 α 的**核**；而 $G^\alpha=\{g^\alpha\mid g\in G\}$ 称为同态 α 的**像**. G^α 是 H 的子群.

定理 2(第一同态定理) 设 G 和 H 是两个群，α 是 G 到 H 的一个同态映射. 则 $\mathrm{Ker}\ \alpha\trianglelefteq G$. G 中两个元素在 α 下的像相同的充分必要条件是它们属于 $\mathrm{Ker}\ \alpha$ 的同一个陪集.

定理 3(第二同态定理) 设 G 是一个群，H 是 G 的一个正规子群. 那么 G 到 G/H 的映射

$$\alpha: g\mapsto Hg,\ \forall g\in G$$

是一个满同态映射，其核为 H. 称此 α 为 G 到 G/N 的自然同态.

定理 4(第三同态定理) 设 G 和 H 是两个群，α 是 G 到 H 的一个同态满射，α 的核为 K. 那么 $G\cong H/K$.

定理 5(第一同构定理) 设 M 和 N 均是 G 的正规子群，且 N 是 M 的子群. 那么 M/N 是 G/N 的正规子群，并且 $(G/N)/(M/N)\cong G/M$.

定理 6(第二同构定理) 设 H 是 G 的子群，K 是 G 的正规子群，则 $(H\cap K)$ 是 H 的正规子群，而且 $HK/K\cong H/(H\cap K)$.

1.1.6 自同构

若 α 是群 G 到 G 的一个同构映射，则称 α 为 G 的一个**自同构**. 容易证明：G 的两个自同构按照映射的积，仍为 G 的一个自同构，而且 G 的所有自同构，对这个乘积成群. 特别地，一群 G 的所有自同构成群，记为 $\mathrm{Aut}(G)$. 设 σ 是群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的元，规定法则 $\sigma(a)$：对 G 的任意元素 x，$x\mapsto a^{-1}xa$. 则容易验证 $\sigma(a)$ 是 G 的一个自同构，称之为 G 的一个**内自同构**. G 的内自同构全体记为 $\mathrm{Inn}(G)$.

命题 设 $g\in G,\alpha\in \mathrm{Aut}\ (G)$，则 $\alpha^{-1}\sigma(g)\alpha=\sigma(g^\alpha)$.

定理 1 设 G 是一个有限群. 则 $\mathrm{Inn}\ (G)\trianglelefteq \mathrm{Aut}\ (G)$；$\mathrm{Inn}\ (G)\cong G/Z(G)$.

证明 由上述命题可得 $\mathrm{Inn}\ (G)\trianglelefteq \mathrm{Aut}\ (G)$.

对 $\sigma(g)\in \mathrm{Inn}\ (G)$，令 $\sigma: G\to \mathrm{Inn}\ (G)$，$g\mapsto\sigma(g)$，$\forall g\in G$，则 σ 是一个满同态，且易知 $\mathrm{Ker}\ \sigma=Z(G)$. 故由同态定理得 $\mathrm{Inn}\ (G)\cong G/Z(G)$.

定理 2 设 G 是一个有限群，H 是 G 的一个子群. 那么 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(H)$ 的一个子群.

证明 设 $g \in N_G(H)$，则 $\sigma(g): h \mapsto h^g$ 是 H 的一个自同构. 并且，$g \mapsto \sigma(g)$ 是 $N_G(H)$ 到 $C_G(H)$ 内的一个同态，核为

$$\operatorname{Ker} \sigma = \{g \in N_G(H) \mid h^g = h, \forall h \in H\} = C_{N_G(H)}(H) = C_G(H) \cap N_G(H).$$

但显然 $C_G(H) \leqslant N_G(H)$，故 $\operatorname{Ker} \sigma = C_G(H)$. 由同态定理得

$$N_G(H)/C_G(H) \cong \sigma(N_G(H)) \leqslant \operatorname{Aut}(H).$$

1.1.7 换位子与可解群

可解群的“可解”一词来源于代数方程的根式可解性. 根据 Galios 理论，每个域 F 上的 n 次代数方程 $f(x)=0$ 相伴一个群 G. $f(x)=0$ 的根能由有限次 F 的根式表示的充要条件是 G 为可解群. 从纯群论的角度看，可解群可以看做abel 群的推广，它是“多重”abel 群. 与单群一样，可解群是群论中一类极其重要的群.

定义 1 群 G 的元 $x^{-1}y^{-1}xy$ 做 x 与 y 的换位子，记 $x^{-1}y^{-1}xy=[x,y]$.

由一切换位子 $[x,y]$ 生成的 G 的子群记为 G'，叫做换位子群，或导群. 由定义，$[x,y]=1$ 等价于 $yx=xy$. 于是，G 内一切换位子为 1 等价于 G 是 abel 群. 因此换位子可用来度量一群离 abel 群的远近.

我们记 $G^{(1)}=G'$，对 $i \geqslant 1$，记 $G^{(i+1)}=G^{(i)'}$.

定义 2 一个群 G 叫做可解的，如果

$$G > G' > G'' > \cdots > G^{(e)} = 1,$$

其中 e 为有限数. 注意，若 $G^{(i)}=G^{(i+1)}$，则对一切 $j>i$，$G^{(i)}=G^{(j)}$.

定理 1 K 为 G 的正规子群，G/K 为 abel 群的充分必要条件是 K 包含 G'.

定理 2 可解群的子群及商群均为可解群.

定理 3 设 G 是一个有限群，则

(1) 若 N 在 G 中正规，且 N 和 G/N 均可解，则 G 可解.

(2) 设 $M \trianglelefteq G$，$N \trianglelefteq G$，且 G/M 和 G/N 均可解，则 $G/M \cap N$ 亦可解.

(3) 设 M，N 是 G 的可解正规子群，则 MN 亦然.

(4) 可解单群必为素数阶循环群.

1.2 循环群

定义 1 如果群 G 的每个元素都能表示一个固定元素 a 的方幂，那么 G 称为由 a 生成的循环群，记作 $\langle a \rangle$. a 称为 $\langle a \rangle$ 的一个生成元.

根据元素的阶的性质，可知循环群共有两种类型：