全国高协组织教材研究与编写委员会审定

高等数学

胡 浩 主编

中国科学技术出版社

全国高协组织教材研究与编写委员会审定

高 等 数 学

胡 浩 主编

中国科学技术出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/胡浩主编. —北京:中国科学技术出版社,2005.7
ISBN 7-5046-4105-7

Ⅰ.高... Ⅱ.胡... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 075579 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
电话:010—62103210 传真:010—62183872
科学普及出版社发行部发行
临沂市第二印刷厂印刷
*
开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:24.5 字数:550 千字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—600 册 定价:45.00 元

前　言

为适应我国高等职业教育发展的需要，加快教材建设的进程，根据教育部关于《高职高专高等数学课程教学基本要求》，充分体现“以应用为目的，以必须够用为度”的原则来编写本教材。

在编写过程中，力求使教材结构紧凑、语言简练、深入浅出、难点分散、论证简明、系统完整。考虑学生数学功底参差不齐，故在教材编写中，注重初等数学与高等数学的衔接，同时，对一些抽象的数学概念在保证其准确性及基本理论完整性的基础上，通过直观而形象化的描述，使之变得通俗易懂，易教易学。

为强化学生对基本理论、基本方法的理解，突出对学生基本技能的训练，本教材在每章节后都配有经认真筛选的一定数量的习题，提供教师和学生选用，书末附有部分习题答案，对例题的分析和解答也是依据该章基本要求，综合运用基本概念、基本定理、基本公式编写的，每章都配有小结，总结本章的重点、难点，便于学生课后有针对性地进行复习。同时为满足部分学生“专升本”继续深造的需要，本教材基本囊括了“专升本”高等数学考试所需的内容，从而使教材更具有适用性。本教材适用于各类大专院校，特别是高职院校教学使用，也可作为各类学历考试的教材或参考书。

参加本书编写的有：安徽中澳科技职业学院胡浩副教授、安徽大学吴秋月副教授、安徽林业职业学院琚松苗副教授、安徽徽商职业学院李翔副教授和太原师范学院赵俊华讲师（硕士）。本书第一章至第八章由胡浩、吴秋月、琚松苗、李翔共同编写，第九章、第十章

由赵俊华老师编写。本书由胡浩任主编，吴秋月、琚松苗、李翔、赵俊华任副主编，并由安徽大学杜先能教授主审全书，在此我们表示衷心的感谢。

由于编写时间有限，不足之处敬请各位同仁及广大读者批评指正，以俟再版时更正。

编　者

2005年4月于合肥

目　　录

第一章　函数极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，而极限方法则是高等数学的重要工具，导数、微分、积分等概念都是建立在极限概念的基础上，理解函数和极限概念，熟练掌握求极限的方法，对学习高等数学有着重要的作用.

本章将先介绍变量、函数等概念，在此基础上讨论函数的极限和函数的连续性.

第一节　函数的概念

一、函数的定义

定义 1　设在某一变化过程中的两个变量 x 和 y，D 是一个给定的非空数集，如果对于数集 D 中的每一个数 x，变量 y 按照某种规则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数.数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

y 是 x 的函数，可表示为 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$ 等.

例 1　在初速度为 0 的自由落体运动中，下落的路程 s 与下落的时间 t 是两个变量，它们之间存在着函数关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，是常量.假定物体着地的时间为 T，那么当 t 取 $[0,T]$ 上某一个值时，由上式就可以确定 s 的值.s 可看成是 t 的函数，$D=[0,T]$ 为定义域.

当 x 取某一数 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作

$$f(x_0)\text{ 或 } y\big|_{x=x_0}.$$

而当 x 取遍 D 的各个数值，对应的函数值全体组成的数集 Z，称为函数的值域.

函数是由定义域和对应法则所确定的，因此研究函数时必须注意它的定义域.在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义所确定的.

对某些函数，当只给出函数的表达式，而没有特别说明函数的实际意义时，函数的定义域就是表达式有意义的自变量所能取的一切实数.

例 2　求函数 $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解：　要使所给定的函数表达式有意义，必须

$$1-x>0 \text{ 且 } x+2\geqslant 0 \qquad \text{即} \qquad x<1 \text{ 且 } x\geqslant -2$$

因此该函数的定义域为 $[-2,1)$.

如果自变量在定义域内任取一数值时，对应的函数值都只有一个，这种函数叫**单值函数**，如果对应的函数值多于一个，则这种对应关系称为**多值函数**.

例如，由方程 $x^2+y^2=r^2$ 所确定的以 x 为自变量的函数为 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是一个多值函数，取它的一个“分支”$y=\sqrt{r^2-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 就变成单值函数.

以后如果没有特殊说明，那么所研究的函数都是指单值函数.

下面我们引入邻域这一概念. 以点 α 为中心的任何开区间称为点 α 的邻域.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 就是点 α 的一个邻域，这个邻域称为点 α 的 δ 邻域. 点 α 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径.

有时用到邻域需要把邻域的中心去掉，点 α 的 δ 邻域去掉中心 α 称为点 α **去心 δ 邻域**.

点 α 的 δ 邻域也可以表示为 $|x-a|<\delta$.

点 α 去心的 δ 邻域也可以表示为 $0<|x-a|<\delta$.

二、函数的表示法

不同的函数关系有不同的函数表示方法，最常用的函数表示方法有解析法、表格法和图像法.

1. 表格法

这是将自变量的值与对应函数值列成表格表示函数关系的方法. 如平方表、对数表、三角函数表等.

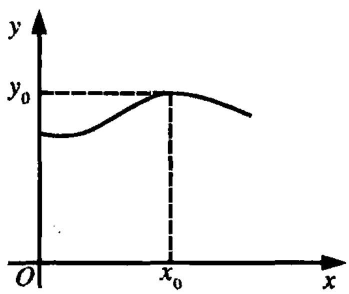


图 1—1

2. 图像法

这是用坐标系中的曲线表示函数关系的方法. 如图1—1.

3. 解析法

这是用解析式子表示函数关系的方法. 例如 $y=\sin 5x$，$y=\lg(x+2)$，等等.

三、分段函数

在定义域的不同范围内用不同的解析式子表示的函数称为分段函数.

例 3 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

表示当 x 取不同区间内的数值时，函数用不同的式子来表示. 如 $x=-1<0$ 时，由 $f(x)=x^2$ 计算得到 $f(-1)=(-1)^2=1$，而在 $x=2>0$ 时，由 $f(x)=x+1$ 计算得到 $f(2)=2+1=3$. 如图1—2.

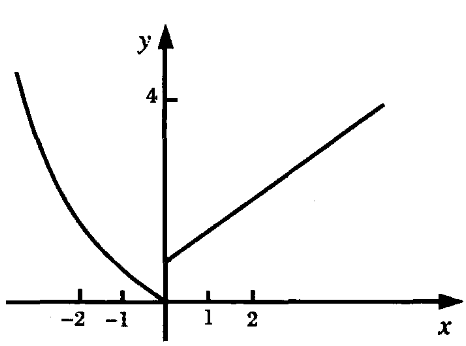


图 1—2

注意： 分段函数仍然是一个函数，而不是几个函数.

四、函数的几何特性

1. 单调性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意两点 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加(或称**单调增**)；而当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>$

$f(x_2)$[或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$]，则称 $f(x)$在区间 I 上是严格单调减少(或称单调减).

在几何上，单调增加函数的图形是随着 x 的增加(从左往右)而上升的曲线(如图 1－3a)，单调减少函数的图形是随着 x 的增加(从左往右)而下降的曲线(如图 1－3b).

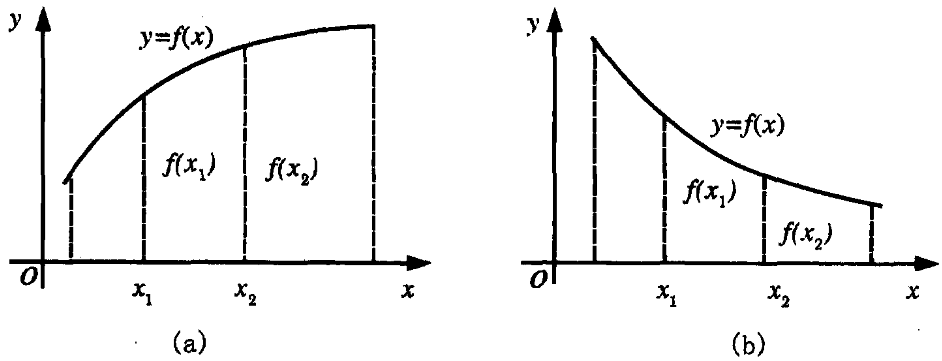


图 1－3

例 4　函数 $y=f(x)=x^2$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加的，而在$(-\infty,0)$上是单调减少的. 若 $f(x)$在区间 I 内单调，则称区间 I 是函数 $f(x)$的单调区间.

2. 有界性

定义 3　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在区间 I 上是有界函数；否则就称为无界函数.

例 5　函数 $y=\sin x$ 对于 $x\in(-\infty,+\infty)$恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它是有界函数.

例 6　函数 $y=x^2$，若 I 为$(1,2)$，则是有界函数；若 I 为$(1,+\infty)$，则是无界函数.

例 7　证明函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上为有界函数.

证：　因为

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}<1,$$

所以　$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

从几何上看，函数 $y=f(x)$有界：$|f(x)|\leqslant M$，其函数图像介于 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

3. 奇偶性

定义 4　设有函数 $y=f(x)$定义域 D 关于原点对称，那么

(1)若对任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$则称 $f(x)$为偶函数.

(2)若对任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$则称 $f(x)$为奇函数.

在几何上看，偶函数 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称，奇函数 $y=f(x)$的图形关于原点中心对称.

例 8　函数 $y=\cos x$ 是偶函数，因为 $\cos(-x)=\cos(x)$(图 1－4).

例 9　函数 $y=\sin x$ 是奇函数，因为 $\sin(-x)=-\sin(x)$(图 1－5).

例 10　函数 $y=\sin x+\cos x$ 和 $y=x^2+x$ 既不是偶函数，又不是奇函数.

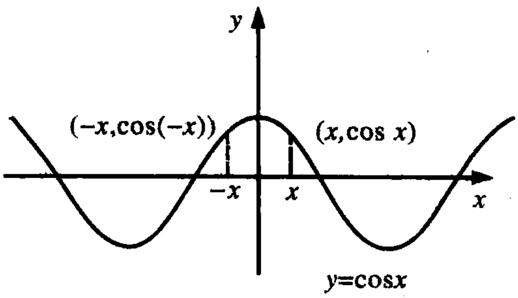


图 1—4

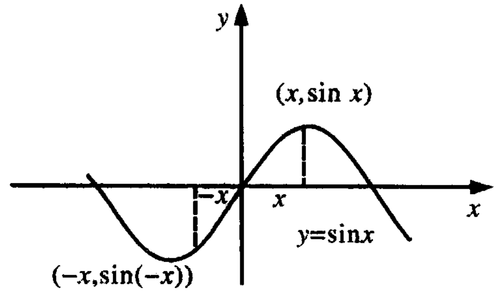


图 1—5

4. 周期性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 L，使得一切 $x\in D$，都有 $x+L\in D$ 且

$$f(x+L)=f(x)$$

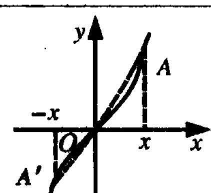
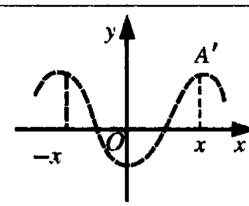
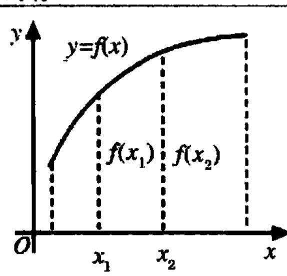
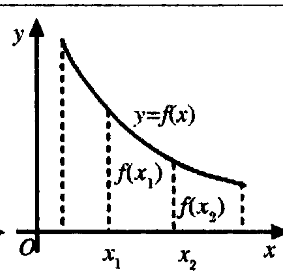
成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，L 为这个函数的周期.

通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期.

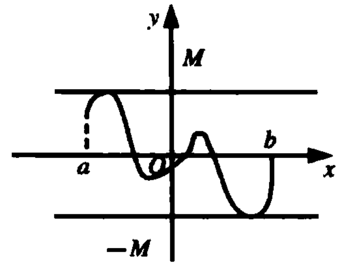
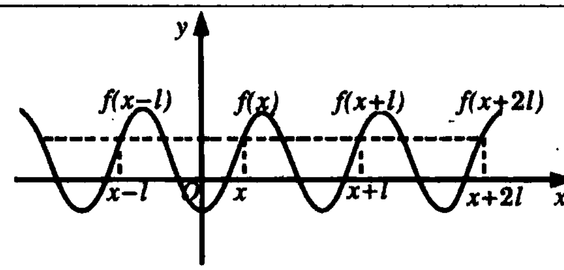
例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

通过上面的介绍，我们把函数的奇偶性、单调性、有界性、周期性做了归纳. 如表 1—1 所示.

表 1—1

特性	定义	几何特性
奇偶性	对于定义域内的任意 x 如果 $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数 如果 $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 为奇函数	  奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称
单调性	对于任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调增加的 如果 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调减少的	  单调增函数图像沿 x 轴正向上升 单调减函数图像沿 x 轴正向下降

续表

特性	定义	几何特性
有界性	对于定义域内的任意的 x，存在 $M>0$，有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，那么 $f(x)$ 有界	区间 (a,b) 内的有界函数的图像全部夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
周期性	对于任意的 $x\in D$，存在正数 l，使 $f(x+l)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数	一个以 l 为周期的周期函数的图像在定义域内每隔长度为 l 的区间上有相同的形状

五、复合函数和反函数

1. 复合函数

定义 6　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，$u=\varphi(x)$ 的定义域为数集 A，如果数集 A 或 A 的子集上，对于 x 的每一个值所对应的 u 值，都能使函数 $y=f(u)$ 有定义，那么 y 就是 x 的函数，这个函数称为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其定义域为数集 A 或数集 A 的子集．这里的 u 称为中间变量．

例如，$y=\sin^2x$ 可以看作是由 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是 $u=\sin x$ 的定义域．

又如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $[-1,1]$，它只是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分．

例 11　指出下列各复合函数的复合过程：

(1) $y=e^{\sin x^2}$；　　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$．

解：(1) $y=e^{\sin x^2}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$ 和 $v=x^2$ 复合而成的；

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 是由 $y=\arctan u$，$u=v^{-\frac{1}{2}}$ 和 $v=1+x^2$ 复合而成的．

例 12　设 $f(x)=x^3$，$g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$．

解：$f[g(x)]=[g(x)]^3=\ln^3x$；

$g[f(x)]=\ln f(x)=\ln x^3=3\ln x$;

$f[f(x)]=[f(x)]^3=(x^3)^3=x^9$;

$g[g(x)]=\ln g(x)=\ln\ln x$.

例 13 设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，求 $f(\lg x)$ 的定义域.

解： 由题意，得 $0<\lg x<1$，从而有 $1<x<10$，因此 $f(\lg x)$ 的定义域为 $(1,10)$.

复合函数不仅可以由两个函数，也可以由两个以上的函数复合而成，反过来，利用复合函数的概念也可以将较复杂的复合函数分解为若干个简单的函数，以便于对函数进行研究和计算.

2. 反函数

定义 7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对于任意 $y\in W$，通过关系式 $y=f(x)$ 都有惟一确定的 D 中的 x 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D. 原来的函数 $y=f(x)$ 叫做 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数.

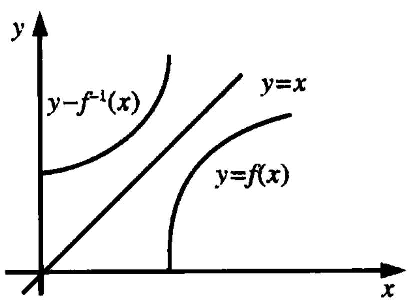


图 1－6

习惯上把 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 在同一坐标系中原函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的（如图 1－6）.

例 14 求函数 $y=4x+4$ 的反函数.

解： 由 $y=4x+4$，解得 $x=\frac{1}{4}(y-4)$

习惯上表示为 $y=\frac{1}{4}(x-4)$

还可以举出很多反函数的例子，如 $y=a^x\ (a>0$，且 $a\neq 1)$ 的反函数是 $y=\log_a x\ (a<0$，且 $a\neq 1)$，$y=\sin x, D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数 $y=\arcsin x, D=[-1,1]$，等等.

六、基本初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指以下六类：

(1) 常函数 $y=c$ （c 为常数）；

(2) 幂函数 $y=x^\mu$ （μ 为任何常数）；

(3) 指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$；

(4) 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$；

当 $a=e$ 时，$y=\ln x$；当 $a=10$ 时，$y=\lg x$；

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，

$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，

$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

基本初等函数的性质和图形在初等数学中已经讨论过，这里不再重复.

2. 初等函数

定义 8　由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和(或)复合运算构成的，并且能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin 2x$，$y=\log_a\sqrt{2x+3}$等都是初等函数. 本书研究的函数主要是初等函数.

注意：分段函数不一定是初等函数.

七、函数图形的简单组合与变换

这里只介绍几种简单的、常用的，由已知函数图形作有关函数图形的方法.

1. 迭加

已知 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的图形，作 $y=f(x)+g(x)$的图形，只要在同一横坐标处将两图形的纵坐标迭加起来即可.

例如，已知 $y=x$ 及 $y=\frac{1}{x}$的图形，作 $y=x+\frac{1}{x}$的图形，如图 1－7.

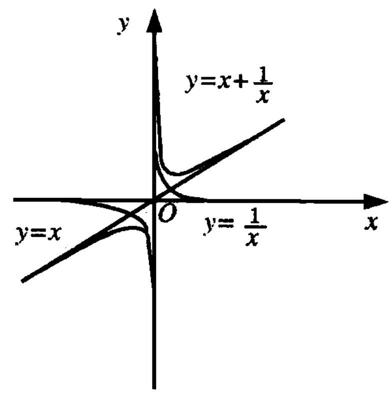


图 1－7

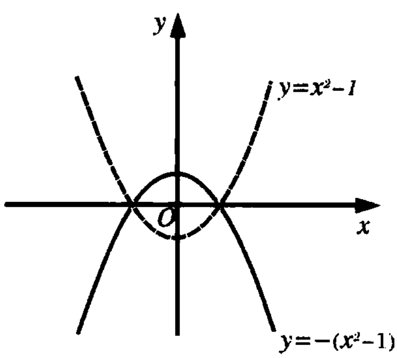


图 1－8

2. 翻转

已知 $y=f(x)$的图形，作 $y=-f(x)$的图形，可在同一横坐标处将 $f(x)$图形的纵坐标改变正负号，若图形在 x 轴上方则翻转到下方，若图形在 x 轴下方则翻转到上方. 即作与 x 轴对称的 $f(x)$图形.

例如，已知 $y=x^2-1$ 的图形，作 $y=-(x^2-1)$的图形，如图 1－8.

3. 放缩

已知 $y=f(x)$的图形，作 $y=kf(x)$的图形(k 为不等于 0 的常数). 当 $k>1$ 时，在同一横坐标处将 $f(x)$图形的纵坐标放大 k 倍；当 $0<k<1$ 时，将 $f(x)$图形的坐标缩小$\frac{1}{k}$；当 $k<0$ 时，既放缩又翻转.

例如，已知 $y=x^2$ 的图形，作 $y=2x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图形，如图 1－9.

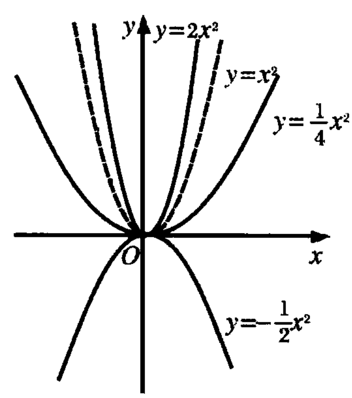


图 1－9

4. 平移

已知 $y=f(x)$的图形，作 $y=f(x)+c$ 的图形(c 为常数). 当 $c>0$ 时，将 $f(x)$的图形向上平行移动距离 c，当 $c<0$ 时，将 $f(x)$的图形向下平行移动距离$|c|$.

例如，已知 $y=x^83$ 的图形，作 $y=x^3+1$ 和 $y=x^3-2$

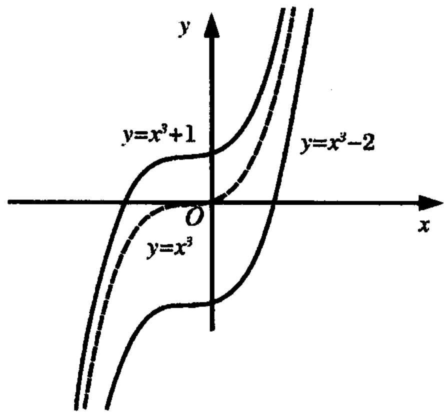


图 1－10

的图形，如图 1－10.

第二节 极限的概念

一、数列极限

1. 数列的概念

所谓数列，简单地说就是一列有一定顺序的有限或无限个数：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \cdots$$

可记作 $\{x_n\}$，其中每一个数称作数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的通项或一般项. 当不致引起混淆时，也可用通项 x_n 简单地表示数列. 同时可以注意到，数列 $\{x_n\}$ 与正整数有一一对应关系，$x_n = x(n)$ 故此数列也可称为**整标函数**.

例如：

(1) $x_n = 2^n$：　　$2, 4, 8, \cdots$

(2) $y_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$：　　$0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

(3) $z_n = \dfrac{1}{n}$：　　$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots$

(4) $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$：　　$1, -\dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{3^2}, -\dfrac{1}{4^2}, \cdots$

(5) $v_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$：　　$0, 1, 0, 1, \cdots$

2. 单调数列

对于数列 $\{x_n\}$，如果 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3, \cdots, \leqslant x_n, \cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为单调增加数列；反之则称是单调减少数列，统称**单调数列**.

如上述的数列 2^n，$\dfrac{1}{n}$ 均为单调数列.

3. 有界数列

对数列 $\{x_n\}$，若存在一个正数 M，使得对于任意的 $n \in N$，恒有 $|x_n| \leqslant M$，则称 $\{x_n\}$ 为

有界数列,否则就是无界数列.

如数列$\frac{1}{2^n}$,$\frac{1}{n}$,$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,$\frac{1+(-1)^n}{2}$均是有界数列,而 2^n 是无界数列.

我们可以看到,数列$\frac{1}{2^n}$是单调递减的有界数列,且随着 n 无限增大$\frac{1}{2^n}$无限接近于 0;数列$\frac{n+(-1)^n}{n}$是有界数列,随着 n 无限增大,$\frac{n+(-1)^n}{n}$无限接近于 1. 而数列$\frac{1+(-1)^n}{2}$虽然有界,但随着 n 无限增大$\frac{1+(-1)^n}{2}$并不无限接近于一常数.

若一个数列$\{x_n\}$,随着 n 的无限增大,x_n 无限接近于某一常数 a,则称数列$\{x_n\}$以 a 为极限.

那么,所谓"无限接近"究竟是什么意思呢? 我们知道,x_n 与 a 的接近程度在数轴上可用点 x_n 与定点 a 之间的距离$|x_n-a|$来度量. 即$|x_n-a|$越小,x_n 与 a 越接近.

以下列数列为例:

(1)$x_n=1+\frac{1}{n}$,　　即 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots$

(2)$x_n=1-\frac{1}{n}$,　　即 $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$

(3)$x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$,　即 $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots$

数列(1)的值总是大于 1,数列(2)的值总是小于 1,而数列(3)的取值时而大于 1,时而小于 1. 但是,我们可以看到,随着 n 的增大,(1),(2),(3)三个数列都越来越接近于 1. 因而可以说:当 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$无限接近于 1.

那么,我们如何来描述"$\{x_n\}$无限接近于 1"呢? 当然可以用点 x_n 与点 1 的距离即用"$|x_n-1|$无限接近于 0"来反映,所谓 n 无限增大时,$|x_n-1|$无限接近于 0,就是$|x_n-1|$可以任意小. 也就是说无论事先指定一个多么小的正数 ε,在 n 无限增大的变化过程中,总有那么一个时刻,在此时刻以后,数列所有的项均满足$|x_n-1|$小于那个事先指定的正数 ε.

仍用(1),(2),(3)三个数列来说明. 具体地说,由于$|x_n-1|=\frac{1}{n}$,如果指定一个很小正数 ε,譬如$\frac{1}{10}$,要使$|x_n-1|<\frac{1}{10}$,即$\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$,只要取 $n>10$ 即可;也就是说从数列的第 11 项开始,以后各项都满足$|x_n-1|<\frac{1}{10}$. 如果再指定一个更小的正数 ε. 如$\frac{1}{1000}$,要使$|x_n-1|<\frac{1}{1000}$,只要 $n>1000$ 即可,也就是说,只要从第 1001 项开始,以后各项都满足$|x_n-1|<\frac{1}{1000}$.

由此可见,对于数列(1),(2),(3),不论是先指定的正数 ε 多么小,在 n 无限增大的变化过程中,总有那么一个时刻,在那个时刻以后(也就是说当 n 充分大以后),$|x_n-1|$总小于那个正数 ε. 由此,我们说$|x_n-1|$可以任意小,称$\{x_n\}$以 1 为极限.

通过上面的分析,可以给出数列极限的定义: