



ANSYS有限元分析

从入门到精通

◎ 张应迁 张洪才 编著

源于实践 成就行录

ANSYS

上海软件行业协会 秘书长 杨根兴
江苏省软件行业协会 副会长 徐雷
四川省力学学会理事 唐克伦 教授

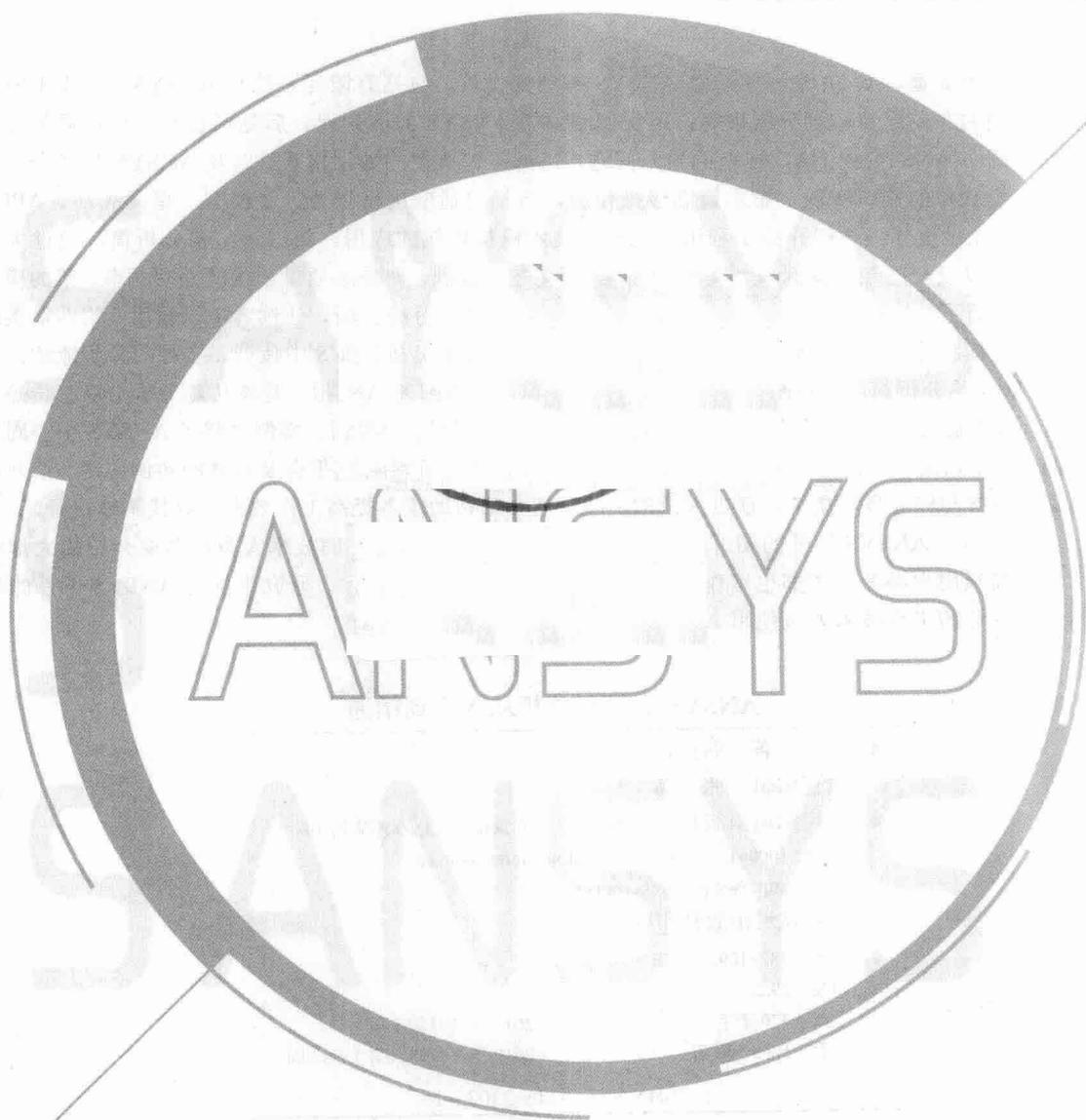
鼎力推荐

- ▶ 36个综合案例
- ▶ 11个贯穿ANSYS实战应用的实例
- ▶ 52个疑难解答和实战技巧
- ▶ 373分钟的视频讲解和案例程序（见光盘）

 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

ANSYS有限元分析 从入门到精通

● 张应迁 张洪才 编著



人民邮电出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

ANSYS有限元分析从入门到精通 / 张应迁, 张洪才编
著. -- 北京: 人民邮电出版社, 2010. 7
ISBN 978-7-115-23033-1

I. ①A… II. ①张… ②张… III. ①有限元分析—应
用程序, ANSYS IV. ①0241. 82

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第086932号

内 容 提 要

本书分为 8 篇, 共 30 章。第一篇 ANSYS 基础操作篇, 包括有限元方法与 ANSYS、工作平面、建模、模型的布尔运算、划分网格等; 用实例阐述了 ANSYS 的前处理、后处理及时间历程后处理, 还特别介绍了 ANSYS 中 CAD 模型的导入问题, 包括各种典型的数据格式, 以及 ANSYS 与当今流行的三维建模软件的接口实现。第二篇高级操作篇, 包括自适应网格划分、子模型、单元死活、APDL 与 UIDL、优化设计; 详细介绍了利用单元死活技术模拟焊接的应用。第三篇结构分析篇, 通过大量的工程实例以及一些经典案例, 如带圆孔矩形平板的应力集中、弹簧—质量系统的固有频率、梁的模式分析等, 介绍了结构线性静力分析、结构非线性分析、结构动力学分析, 让读者学以致用。第四篇接触分析篇, 包括疲劳分析、接触分析、弹塑性分析, 用实例讲解了 ANSYS 中疲劳、接触的分析流程。第五篇 CFD 与热分析篇, 重点阐述 ANSYS 中不可压层流以及湍流的模拟、稳态传热分析与瞬态传热分析。第六篇电磁与声学篇, 包括 ANSYS 声学分析、ANSYS 电磁场分析, 实例讲解了 ANSYS 中声固耦合实例、二维以及三维静态、瞬态磁场。第七篇阐述了 Workbench 仿真平台及具体的实例应用。第八篇常见疑难解答与经验技巧集萃, 通过大量的实战技巧介绍帮助读者提高工作效率, 寻找工作捷径。

本书适用于 ANSYS 软件的初、中级读者, 以及有初步使用经验的技术人员, 书中介绍的大量实例也可供高级用户参考。本书也可作为理工科院校相关专业的本科生、研究生学习 ANSYS 软件的教材和相关行业的工程技术人员使用 ANSYS 软件的参考书。

ANSYS 有限元分析从入门到精通

- ◆ 编 著 张应迁 张洪才
责任编辑 张 涛
- ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址: <http://www.ptpress.com.cn>
中国铁道出版社印刷厂印刷
- ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 29.25
字数: 770 千字 2010 年 7 月第 1 版
印数: 1—3 500 册 2010 年 7 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-23033-1

定价: 59.00 元 (附光盘)

读者服务热线: (010)67132692 印装质量热线: (010)67129223
反盗版热线: (010)67171154

前 言

随着现代 CAE 的飞速发展，ANSYS 作为全球最通用的大型有限元分析软件之一，在 CAE 仿真分析中发挥着越来越重要的作用。该软件以灵活、开放的解决方案为工程设计提供了有效的协同仿真环境，可大幅度地缩短研发时间，降低研发费用，提高产品设计质量。ANSYS 软件广泛应用于建筑、机械制造、石油化工、造船、航空航天、汽车交通、土木工程、水利、铁道、材料等领域的设计中。

目前，国内关于讲解 ANSYS 应用方面的书较多。笔者用 ANSYS 进行设计、教学和科研已有十多年了，对 ANSYS 的学习过程有着真实的体会。ANSYS 应用覆盖面广，内容博大精深，即使是同一个问题，不同的教程往往给出的解决方法和思路也不尽相同，对此，初学者往往不知如何学习，在实践应用上不知如何下手。为了达到易学易用的目的，本书讲解中用大量实例作引导，这些实例既有让读者举一反三的经典示例，也有让读者学以致用、来自工程实践中的真实案例，并对每一个实例进行全面剖析，力争使读者对实例有着深刻的理解，达到自己动手解决实际问题的目的。

本书内容

本书既注重实例的讲解和分析，同时又不忽视理论阐述的严谨性。初学者通过本书的学习能达到自己简化、解决实际工程问题，继而能运用 ANSYS 对问题进行仿真分析；有一定基础的读者通过本书的学习能够掌握 ANSYS 的高级技术和实战技巧，从而能够更好的模拟、仿真现实世界的诸多问题。

全书分为 8 篇，共 30 章。

第一篇包括第 1 章至第 8 章，主要讲述有限元方法与 ANSYS、工作平面、建模、模型的布尔运算、网格划分、加载和求解、通用后处理，以及时间历程后处理等。阐述了 ANSYS 的前处理、后处理及时间历程后处理，特别介绍了 ANSYS 中 CAD 模型的导入问题，包括各种典型的数据格式，以及 ANSYS 与当今流行的三维建模软件的接口问题。

第二篇包括第 9 章至第 13 章，讲述了自适应网格划分、子模型、单元死活、APDL 与 UIDL、优化设计等。并特别介绍了利用单元死活技术模拟焊接的问题。

第三篇包括第 14 章至第 16 章，讲述了结构线性静力分析、结构非线性静力分析、结构动力学分析等。为了让读者更好地应用于实践中，讲解中引用了大量的工程实例及一些经典实例。

第四篇包括第 17 章至第 19 章，讲解了疲劳分析、接触分析、弹塑性分析等。用实例重点介绍了 ANSYS 中疲劳、接触的分析流程。

第五篇包括第 20 章至第 21 章，讲解了计算流体动力学分析、热力学分析等。阐述了 ANSYS 中不可压层流以及湍流的模拟、稳态传热分析与瞬态传热分析等。

第六篇包括第 22 章至第 23 章，讲解了 ANSYS 声学分析、ANSYS 电磁场分析，重点阐述了 ANSYS 中声固耦合实例、二维以及三维静态、瞬态磁场等。

第七篇即第 24 章，阐述了 Workbench 仿真平台及应用。

第八篇包括第 25 章至第 30 章，讲解了通用前处理常见错误提示与对应解决方法、通用后处理常见疑难解答与技巧集萃、高级操作常见疑难解答与技巧集萃、结构分析常见疑难解答与技巧集萃，接触分析、电磁及热分析常见疑难解答与技巧集萃，Workbench 常见疑难解答与技巧集萃。

本书特色

- ANSYS 资深技术支持，培训师亲自执笔。本书是笔者在深入理解了 ANSYS 内涵、精髓基础上，结合自己丰富的培训和一线工程实践经验，精心编写而成。
- 软件采用当前最为流行的 ANSYS 版本。在知识点讲解中穿插了新功能的应用。
- 知识全面、系统，科学安排内容层次架构；由浅入深，循序渐进，适合读者的学习规律。
- 理论与实践应用紧密结合。基础理论知识穿插在知识点的讲述中，言简意赅、目标明确，使读者知其然，亦知其所以然，达到学以致用目的。
- “知识点+针对每个知识点的小实例+综合实例”的讲述方式，可以使读者快速地学习掌握 ANSYS 软件操作及应用该知识点解决工程实践中的问题。综合实例部分，深入细致剖析工程应用的流程、细节、难点、技巧，可以起到融会贯通的作用。
- 常见问题解答与技巧集萃。针对读者学习过程中容易遇到的问题，在本书最后安排了“常见问题解答与技巧集萃”部分，将实战经验、技巧、难点一一分析，最大程度地贴近和满足读者工作实践中的需要。

本书附带所有实例操作的视频光盘。

本书有张应迁、张洪才主编，参与编写的还有郝旭宁、李建鹏、赵伟茗、刘钦、于志伟、张永岗、周世宾、姚志伟、曹文平、邱洪钢、张青莲、陆绍强、汪海波。

读者对象

本书适用于 ANSYS 软件的初、中级用户，以及有初步使用经验的技术人员，书中介绍的大量实例也可供高级用户参考。本书也可作为理工科院校相关专业的本科生、研究生学习 ANSYS 软件的教材和相关行业的工程技术人员使用 ANSYS 软件的参考书。

本书部分素材借鉴了中国 CAE 联盟、SimWe 仿真论坛、百思论坛等有关资料，在此一并表示感谢！鉴于本人理论基础以及工程实践经验的不足和欠缺，谬误之处在所难免，欢迎广大读者不吝批评、指正。编辑联系邮箱为 zhangtao@ptpress.com.cn。

编者

目 录

第一篇 ANSYS基础 操作篇

第1章 有限元方法与

ANSYS概述 ----- 2

- 1.1 有限单元法概述 ----- 2
- 1.2 线弹性力学的基本原理与最小势能原理 ----- 3
 - 1.2.1 弹性力学的基本原理 ----- 3
 - 1.2.2 最小势能原理 ----- 5
- 1.3 里兹法 ----- 5
- 1.4 有限单元法解题过程简介 ----- 6
- 1.5 ANSYS 11.0简介与基本使用 ----- 7
 - 1.5.1 软件功能简介 ----- 7
 - 1.5.2 前处理模块PREP7 ----- 8
 - 1.5.3 求解模块SOLUTION ----- 8
 - 1.5.4 后处理模块POST1和POST26 ----- 9
 - 1.5.5 ANSYS 11.0新特征 ----- 10

第2章 ANSYS坐标系和

工作平面 ----- 11

- 2.1 ANSYS坐标系简介 ----- 11
 - 2.1.1 全局坐标系 ----- 11
 - 2.1.2 局部坐标系 ----- 12
 - 2.1.3 结果坐标系 ----- 13
- 2.2 ANSYS工作平面 ----- 13
 - 2.2.1 建立工作平面 ----- 14
 - 2.2.2 移动工作平面 ----- 14
 - 2.2.3 工作平面性能的增强 ----- 15

第3章 建模及模型导入 ----- 16

- 3.1 ANSYS建模 ----- 16

- 3.1.1 ANSYS的建模步骤 ----- 16
- 3.1.2 实体建模方法 ----- 17
- 3.1.3 自底向上的建模方法 ----- 17
- 3.1.4 自上向下的建模方法 ----- 25
- 3.1.5 模型的复制、移动与缩放 ----- 27
- 3.2 CAD模型的导入 ----- 28
 - 3.2.1 以IGES格式导入CAD模型 ----- 28
 - 3.2.2 以x_t格式导入CAD模型 ----- 29
 - 3.2.3 以sat格式导入CAD模型 ----- 30
 - 3.2.4 应用实例 ----- 30
- 3.3 三维建模软件与ANSYS的接口 --- 30
 - 3.3.1 ANSYS与PRO/E的无缝连接 ----- 31
 - 3.3.2 ANSYS与SOLIDWORKS间的数据交互 ----- 31
 - 3.3.3 ANSYS与CATIA的数据交互 ----- 32
 - 3.3.4 应用实例 ----- 32

第4章 模型的布尔运算 ----- 34

- 4.1 引言 ----- 34
- 4.2 布尔操作后图元的编号 ----- 34
- 4.3 交运算 ----- 34
- 4.4 两两相交 ----- 35
- 4.5 加运算 ----- 35
- 4.6 减运算 ----- 36
- 4.7 搭接运算 ----- 37
- 4.8 分割运算 ----- 38
- 4.9 粘接运算 ----- 38
- 4.10 布尔运算的替代 ----- 39
- 4.11 布尔运算后的更新 ----- 39
- 4.12 布尔运算失败时建议采取的一些措施 ----- 40
- 4.13 实例：轴承座的实体建模 ----- 40

第5章 网格划分 ----- 44

- 5.1 网格类型简介 ----- 44

5.2 定义单元属性-----	44	6.3 耦合及约束方程-----	81
5.2.1 为模型分配单元属性-----	45	6.3.1 何谓耦合-----	81
5.2.2 默认单元属性-----	46	6.3.2 如何生成耦合自由度集-----	82
5.2.3 常用单元属性简介-----	47	6.3.3 耦合的其他条件-----	83
5.3 网格划分控制-----	47	6.3.4 什么是约束方程-----	83
5.3.1 ANSYS网格划分工具-----	47	6.3.5 如何生成约束方程-----	83
5.3.2 单元形状-----	48	6.3.6 约束方程的其他注意事项-----	85
5.3.3 单元形状与计算结果的关系-----	49	6.4 求解-----	85
5.3.4 控制中间节点的位置-----	50	6.4.1 定义分析类型-----	86
5.3.5 局部网格划分控制-----	50	6.4.2 求解控制-----	86
5.3.6 内部网格划分控制-----	51	6.4.3 求解-----	87
5.3.7 生成过渡的金字塔单元-----	55	第7章 通用后处理-----	89
5.3.8 将退化的四面体单元 转化为非退化形式-----	56	7.1 后处理简介-----	89
5.4 自由网格和映射网格控制-----	57	7.2 读入结果数据-----	89
5.4.1 自由网格划分-----	57	7.3 图形显示-----	90
5.4.2 映射网格划分-----	60	7.3.1 云图显示-----	90
5.5 改变网格-----	62	7.3.2 矢量显示-----	92
5.5.1 对模型重新划分网格-----	63	7.3.3 反作用力显示-----	92
5.5.2 利用网格Accept/Reject提示-----	63	7.3.4 破碎图-----	93
5.5.3 清除网格-----	63	7.4 单元表-----	93
5.5.4 细化局部网格-----	63	7.4.1 填上按名字来识别变量的单元表-----	93
5.5.5 改进网格(只针对四面体单元 网格)-----	64	7.4.2 填充按序号识别变量的单元表-----	94
5.6 网格质量的评价-----	65	7.4.3 定义单元表的注释-----	94
5.7 二维单元与三维单元划分实例---	66	7.5 列出结果-----	95
5.7.1 重力坝的网格划分-----	66	7.6 路径操作-----	96
5.7.2 三维单元-----	68	7.6.1 定义路径-----	97
第6章 加载和求解-----	70	7.6.2 沿路径插值数据-----	97
6.1 载荷的概念-----	70	7.6.3 映射路径数据-----	98
6.1.1 载荷的分类-----	70	7.6.4 观察路径项-----	98
6.1.2 关于载荷步和子步-----	71	7.6.5 在路径项中执行算术运算-----	99
6.2 载荷的施加-----	71	7.6.6 将路径数据从一文件中存档或恢复---	99
6.2.1 实体模型载荷与有限元模型载荷 的优缺点-----	72	7.6.7 删除路径-----	100
6.2.2 施加载荷-----	72	7.7 载荷工况-----	100
6.2.3 载荷步选项-----	76	7.7.1 存储组合载荷工况-----	101
6.2.4 创建多载荷步-----	80	7.3.2 可求和数、不可求和数及常数-----	102
		第8章 时间历程响应后处理 --	103
		8.1 时间历程变量观察器-----	103

14.2.1	带圆孔矩形平板的拉伸	195
14.2.2	梁的自重分析	197
14.2.3	列管式换热器高压球底组件 强度分析	200
14.2.4	独管塔的强度分析	203
14.3	实例分析	207

第15章 结构非线性静力分析 实例与分析 ----- 208

15.1	结构非线性概述	208
15.1.1	状态变化(包括接触)	209
15.1.2	几何非线性	209
15.1.3	材料非线性	209
15.2	非线性分析的基本知识	209
15.2.1	方程求解	209
15.2.2	保守行为与非保守行为:过程 依赖性	211
15.2.3	子步	212
15.2.4	载荷和位移方向	212
15.2.5	非线性分析	212
15.3	结构非线性实例	220
15.3.1	压杆的屈曲分析	220
15.3.2	混凝土非线性计算实例——梁 平面应力	224
15.3.3	双轴向载荷作用下平板的蠕变	229
15.4	实例分析	234

第16章 结构动力学实例 与分析 ----- 235

16.1	结构动力学概述	235
16.1.1	动力学分析类型	235
16.1.2	基本概念和术语	236
16.2	模态分析实例	237
16.2.1	模态分析基础理论	237
16.2.2	弹簧—质量系统的固有频率	238
16.2.3	梁的模态分析	243
16.3	谐响应实例	246

16.3.1	谐响应分析介绍	246
16.3.2	弹簧—质量系统的谐响应 分析实例	247
16.4	瞬态动力学实例	251
16.4.1	瞬态分析基础理论	251
16.4.2	球体撞击柔性平面	253
16.4.3	带集中质量梁的瞬态响应	258
16.5	结构动力学实例分析	262

第四篇 接触分析篇

第17章 疲劳分析----- 266

17.1	疲劳的定义	266
17.2	疲劳计算	267
17.2.1	进入POST1和恢复数据库	267
17.2.2	建立疲劳计算的规模、材料疲劳 性质和疲劳计算的位置	267
17.2.3	储存应力、指定事件循环次数和 比例因子	269
17.2.4	激活疲劳计算	272
17.2.5	查看计算结果	273
17.2.6	其他记数方法	273
17.3	疲劳实例	273

第18章 接触分析----- 278

18.1	接触简介	278
18.1.1	点—点接触	278
18.1.2	点—面接触	279
18.1.3	面—面接触	279
18.2	接触分析的一般步骤	279
18.2.1	点—面接触分析的步骤	280
18.2.2	点—面接触分析的步骤	282
18.2.3	面—面接触分析的步骤	286
18.3	接触实例	295

第19章 弹塑性分析----- 304

19.1	塑性理论引言	304
------	--------	-----

19.2	塑性理论介绍	305
19.3	ANSYS中的塑性选型	306
19.4	使用塑性的一些原则	307
19.5	塑性分析实例	309

第五篇 CFD与热分析篇

第20章 计算流体动力学分析 ----- 318

20.1	FLOTRAN计算流体动力学 (CFD) 概述	318
20.2	FLOTRAN分析基础	319
20.2.1	FLOTRAN单元的特点	319
20.2.2	FLOTRAN分析的主要步骤	320
20.2.3	FLOTRAN边界条件	322
20.3	FLOTRAN不可压层流和湍流分析	323
20.3.1	层流分析	324
20.3.2	湍流分析	328
20.4	FLOTRAN热分析	330

第21章 热力学分析 ----- 335

21.1	热分析简介及基础知识	335
21.1.1	热分析简介	335
21.1.2	热分析基础知识	335
21.2	稳态传热分析	338
21.2.1	ANSYS稳态热分析的基本过程	338
21.2.2	后处理	342
21.2.3	稳态传热实例一	342
21.2.4	稳态传热实例二	345
21.3	瞬态传热分析	347
21.3.1	瞬态热分析中的单元及命令	347
21.3.2	ANSYS瞬态热分析的主要步骤	348
21.3.3	相变问题	351
21.3.4	瞬态传热实例一	351
21.3.5	瞬态传热分析实例二	357

第六篇 电磁与声学篇

第22章 ANSYS声学分析 --- 360

22.1	ANSYS声学分析基础	360
22.1.1	声场流体基础	360
22.1.2	声场流体问题中矩阵的推导	361
22.1.3	声场吸声问题	362
22.1.4	声场声固耦合问题	363
22.2	壳单元耦合及实体单元声固耦合实例	364
22.3	消声器性能模拟	370
22.4	两种平面流体单元声学分析的比较	374
22.4.1	首先采用基于位移积分的流体单元FLUID79	374
22.4.2	然后采用基于压力积分的流体单元FLUID29	379
22.5	实例分析	380

第23章 ANSYS电磁场分析 ----- 382

23.1	电磁场有限元分析简介	382
23.2	二维静态磁场分析与实例	385
23.2.1	二维静态磁场分析中要用到的单元	386
23.2.2	静态磁场分析的步骤	387
23.2.3	二维静态磁场分析与实例	387
23.3	二维瞬态磁场分析与实例	391
23.3.1	瞬态磁场分析	391
23.3.2	二维瞬态磁场分析实例	392
23.4	三维静态磁场分析与实例	398
23.4.1	3D静态磁场分析中的单元 (标量法)	398
23.4.2	3D静态磁标势分析的步骤	399
23.4.3	3D静态磁场分析 (棱边单元方法)	399

23.4.4 3D静态磁场分析实例 ----- 401

23.5 3D谐性与瞬态分析实例 ----- 407

23.5.1 3D谐性分析 ----- 407

23.5.2 3D瞬态磁场分析 ----- 411

第七篇 Workbench篇

第24章 ANSYS-Workbench 仿真技术平台 ----- 416

24.1 ANSYS-Workbench简介 ----- 416

24.2 DesignModeler模块功能及实例 ----- 416

24.2.1 主要菜单的功能简介 ----- 417

24.2.2 Workbench二维模型建立实例 ----- 420

24.2.3 Workbench三维模型建立实例 ----- 420

24.3 Simulation模块功能及实例 ----- 421

24.3.1 Simulation界面和操作简介 ----- 421

24.3.2 Simulation实例 ----- 422

24.4 实例分析 ----- 423

第八篇 常见疑难解答与经验技巧集萃

第25章 通用前处理常见错误提示与对应解决方法 ----- 426

第26章 通用后处理常见疑难解答与技巧集萃 ----- 428

第27章 高级操作常见疑难解答与技巧集萃 ----- 431

27.1 自适应网格划分 ----- 431

27.2 子模型技巧（壳到体子模型） -- 432

27.3 单元死活技巧（模拟浇筑过程中的温度分布） ----- 433

27.4 使用APDL、UIDL进行二次开发技巧 ----- 435

27.5 优化设计技巧 ----- 436

第28章 结构分析常见疑难解答及技巧集萃 ----- 437

28.1 结构线性静力分析技巧 ----- 437

28.1.1 BEAM188和189单元额外节点问题 ----- 437

28.1.2 如何考虑结构分析中的重力 ----- 437

28.1.3 如何实现壳单元的偏置 ----- 438

28.1.4 如何加快计算速度 ----- 439

28.1.5 如何定制Beam188/189单元的用户化截面 ----- 439

28.1.6 面载荷转化为等效节点力施加的方法 ----- 440

28.1.7 静力分析时刚度矩阵奇异如何施加约束 ----- 440

28.2 结构非线性分析技巧 ----- 440

28.2.1 解决非线性分析不收敛的技巧 ----- 440

28.2.2 膜元Shell41是否能作大变形分析 -- 442

28.2.3 耦合及约束方程讲座一：耦合 ----- 442

28.2.4 耦合及约束方程讲座二：约束方程 ----- 443

28.2.5 在ANSYS中怎样给面施加一个非零的法向位移约束 ----- 445

28.2.6 SOLID65混凝土单元的使用技巧 ----- 445

28.2.7 非线性计算过程中收敛曲线实时显示 ----- 446

28.2.8 在非线性分析中如何根据ANSYS的跟踪显示来判断收敛 ----- 446

28.3 结构动力学分析技巧 ----- 447

28.3.1 如何提取模态质量 ----- 447

28.3.2 如何使用用户定义用户自定义矩阵 ----- 448

第29章 接触分析、电磁及热分析 常见疑难解答与技巧 集萃 ----- 449	
29.1 接触分析技巧 ----- 449	
29.1.1 ANSYS接触问题的计算方法----- 449	
29.1.2 生成接触单元的几种方法 ----- 451	
29.1.3 接触间隙解决方法 ----- 451	
29.2 电磁分析技巧 ----- 451	
29.3 热分析技巧----- 452	
29.3.1 热分析前后处理中的常用 命令流 ----- 452	
29.3.2 初始温度、参考温度和均匀 温度的区别----- 453	
第30章 Workbench常见疑难解答 与技巧集萃 ----- 454	

第一篇

ANSYS基础

操作篇

- ▶ 第 1 章 有限元方法与 ANSYS 概述
- ▶ 第 2 章 ANSYS 坐标系和工作平面
- ▶ 第 3 章 建模及模型导入
- ▶ 第 4 章 模型的布尔运算
- ▶ 第 5 章 网格划分
- ▶ 第 6 章 加载和求解
- ▶ 第 7 章 通用后处理
- ▶ 第 8 章 时间历程响应后处理

第 1 章

有限元方法与ANSYS概述

1.1 有限单元法概述

有限元方法的基础是变分原理和加权余量法,其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元,在每个单元内,选择一些合适的节点作为求解函数的插值点,将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式,借助于变分原理或加权余量法,将微分方程离散求解。采用不同的权函数和插值函数形式构成不同的有限元方法。有限元方法最早应用于结构力学,后来随着计算机的发展慢慢用于流体力学等其他工程学科的数值模拟。在有限元方法中,把计算域离散剖分为有限个互不重叠且相互连接的单元,在每个单元内选择基函数,用单元基函数的线形组合来逼近单元中的真解,整个计算域上总体的基函数可以看作由每个单元基函数组成的,则整个计算域内的解可以看作是由所有单元上的近似解构成。在数值模拟中,常见的有限元计算方法是由变分法和加权余量法发展而来的里兹法和伽辽金法、最小二乘法等。根据所采用的权函数和插值函数的不同,有限元方法也分为多种计算格式。从权函数的选择来说,有配置法、矩量法、最小二乘法和伽辽金法,从计算单元网格的形状来划分,有三角形网格、四边形网格和多边形网格,从插值函数的精度来划分,又分为线性插值函数和高次插值函数等。不同的组合同样构成不同的有限元计算格式。对于权函数,伽辽金(Galerkin)法是将权函数取为逼近函数中的基函数。最小二乘法是令权函数等于余量本身,而内积的极小值则为对代求系数的平方误差最小。在配置法中,先在计算域内选取 N 个配置点。令近似解在选定的 N 个配置点上严格满足微分方程,即在配置点上令方程余量为0。插值函数一般由不同次幂的多项式组成,也有采用三角函数或指数函数组成的乘积表示,但最常用的是多项式插值函数。

有限元插值函数分为两大类,一类只要求插值多项式本身在插值点取已知值,称为拉格朗日(Lagrange)多项式插值;另一种不仅要求插值多项式本身,还要求它的导数值在插值点取已知值,称为哈密特(Hermite)多项式插值。单元坐标有笛卡尔直角坐标系和无因次自然坐标,有对称和不对称等。常采用的无因次坐标是一种局部坐标系,它的定义取决于单元的几何形状,一

维看作长度比，二维看作面积比，三维看作体积比。在二维有限元中，三角形单元应用得最早，近来四边形等参元的应用也越来越广。对于二维三角形和四边形单元，常采用的插值函数为有 Lagrange 插值直角坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数、面积坐标系中的线性插值函数、二阶或更高阶插值函数等。

1.2 线弹性力学的基本原理与最小势能原理

在有限单元法中经常要用到弹性力学的基本方程和与之等效的变分原理，现将它们连同相应的矩阵表达形式给大家作一简介。

1.2.1 弹性力学的基本原理

弹性体在载荷作用下，体内任意一点的应力状态可由 6 个应力分量 (σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx}) 来表示。其中， σ_x 、 σ_y 、 σ_z 为正应力； τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 为剪切应力。应力分量的正负号规定如下：如果某一个面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，与坐标轴反方向为负；相反，如果某一个面的外法线方向与坐标轴的+负方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，与坐标轴同向为负。应力分量及其正方向见图 1-1。

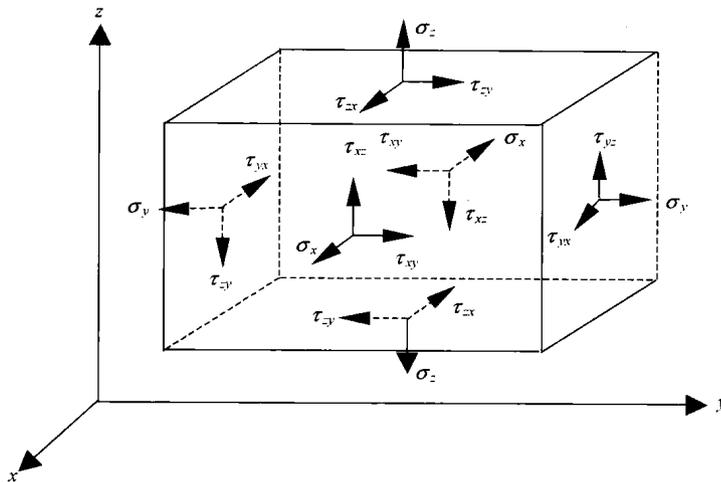


图 1-1 应力分量

使用矩阵来表示应力向量：

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1-1)$$

对于三维问题，弹性力学基本方程可写成如下形式。

1. 平衡方程

弹性体域内任一点沿坐标轴 x 、 y 、 z 方向的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{f}_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{f}_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{f}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 \bar{f}_x 、 \bar{f}_y 、 \bar{f}_z 为单元体积的体积力在 x 、 y 、 z 方向的分量。

2. 几何方程

在微小位移和微小变形的情况下，略去位移导数的高阶项，则应变分量和位移向量间的几何关系有：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

3. 本构方程

弹性力学中应力—应变之间的转换关系也称弹性关系。对于各向同性的线弹性材料，应力通过应变的表达式可用矩阵形式表示：

$$\sigma = D\varepsilon \quad (1-4)$$

式中：

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \text{称} & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

称为弹性矩阵。它完全取决于弹性体材料的弹性模量 E 和泊桑比 ν 。

4. 边界条件

弹性体 V 的全部边界为 S 。一部分边界上已知外力 \bar{F}_x 、 \bar{F}_y 、 \bar{F}_z 称为力的边界条件，这部分

边界用 S_f 表示；另一部分边界上弹性体的位移 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 已知，称为几何边界条件或位移边界条件，这部分边界用 S_u 表示。这两部分边界构成弹性体的全部边界，即

$$S_f + S_u = S \quad (1-5)$$

1.2.2 最小势能原理

弹性体在给定外载荷作用下，在所有满足协调条件和给定的几何边界条件的变形状态中，只有真正的变形状态才能满足平衡条件的状态，使该变形体的总势能能达到最小值。

对于最小势能原理应用于位移法，所选取的位移函数应满足变形协调条件和给定几何边界条件，由这类函数所张成的空间叫容许空间，变分后得到以位移为未知量的平衡方程组。通过一定的数值方法可以求解这类平衡方程。

还需指出，由最小位能原理极值原理，可以给出能量的上界或下界，这对估计近似解的特性是有重要意义的。利用最小势能原理求得位移近似解的弹性变形能是真解变形能的下界，即近似的位移场在总体上偏小，也就是说结构的计算模型显得偏于刚硬，这对于工程计算具有实际意义。

1.3 里兹法

里兹法是从一族假定解中寻求满足泛函变分的“最好的”解。显然，近似解的精度与试探函数的选择有关。如果我们知道所求解的一般性质，那么可以通过选择反映此特性的试探函数来改进近似解，提高近似解的精度。若精确解恰巧包含在试探函数族中，则里兹法将得到精确解。

现用一个例子详细讲述里兹法的原理。先有如下的微分方程，使用里兹法对其进行求解：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y + x = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (1-6)$$

边界条件：当 $x=0$ 时， $y=0$ ；当 $x=1$ 时， $y=1$

其微分方程的泛函为

$$II = \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} y^2 + yx \right] dx \quad (1-7)$$

里兹法第一步是选取试探函数，先选取一阶多项式作为试探函数，试探函数必须满足边界条件，因此一阶多项式为

$$\tilde{y} = a_1 x(1-x) \quad (1-8)$$

则有

$$\text{把式 (1-8) 和式 (1-9) 代入式 (1-7), 得} \quad \frac{d\tilde{y}}{dx} = a_1 - 2a_1 x \quad (1-9)$$

$$II = \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} a_1^2 (1-2x)^2 + \frac{1}{2} a_1^2 x^2 (1-x)^2 + a_1 x^2 (1-x) \right] dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{10} \right) a_1^2 + \frac{1}{12} a_1 \quad (1-10)$$

由泛函变分为 0 得到

$$\frac{\partial II}{\partial a_1} = 0, \quad a_1 = \frac{5}{18}$$

因此，微分方程的近似解为