



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

概率论与数理统计

(第2版)

电子科技大学数学科学学院

徐全智 吕 恕



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shulitongji

(第2版)

电子科技大学数学科学学院

徐全智 吕恕



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是作者在第一版的基础上进一步修改而成的。在内容上较“工科类本科概率论与数理统计课程教学基本要求”有所加深和扩充,并广泛、密切地联系实际应用。

全书内容包括概率论的基本概念、随机变量的分布、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析及试验设计。各章设有练习题和思考题,书末附有习题答案。

本书强调基本理论和基本运算,着重于概率统计思想方法的阐述,概念准确、条理清晰、简明易懂,可作为高等学校工科、理科(非数学专业)、管理等各专业的教材,也可供工程技术人员和自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐全智,吕恕主编. —2 版. —北京:高等教育出版社,2010.6

ISBN 978-7-04-029457-6

I. ①概… II. ①徐…②吕… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 067283 号

策划编辑 兰莹莹 责任编辑 李晓鹏 封面设计 张志奇 责任绘图 黄建英
版式设计 马敬茹 责任校对 王效珍 责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京东光印刷厂

开 本 787 × 960 1/16
印 张 20
字 数 370 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2004 年 7 月第 1 版
2010 年 6 月第 2 版
印 次 2010 年 6 月第 1 次印刷
定 价 26.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29457-00

再版前言

本次再版,教材主要内容和框架未做大的改动,仍保持原有特色:力求做到概率论部分及数理统计部分两者并重和有机结合;作为工科教材,编者尽量做到概念准确、系统、完整;强调基本理论和基本运算,着重对概率统计思想方法的阐述;强调概率论与数理统计的客观背景和实际应用(每章最后一节均是对应知识的应用和实例);例题、习题与教材内容紧密结合;书后附有习题答案和有关图表。

再版后每章习题分为练习题和思考题两部分,希望其中的思考题对学生理解概念、了解工程背景有一定帮助。

全书讲授需 68 学时,可根据不同学时和不同层次的要求,讲授内容酌情取舍。

本书由徐全智主编并负责统稿,编写第 1 章至第 5 章,吕恕编写第 6 章至第 10 章。

该书自 1991 年开始编写至本次再版,五易其稿。编写过程中得到我校国家工科数学课程教学基地和课程组全体老师的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢,同时也感谢多年来使用本教材的全体教师和学生。

由于编者水平有限,缺点和不当之处在所难免,恳请同行专家和读者批评指正。

编者

2010 年 1 月

目 录

第 1 章 概率论的基本概念	1
§ 1.1 随机事件与随机变量	1
§ 1.2 概率	9
§ 1.3 条件概率	16
§ 1.4 事件的独立性	23
§ 1.5 应用实例	28
习题一	32
第 2 章 随机变量的分布	36
§ 2.1 随机变量的分布函数	36
§ 2.2 离散型随机变量	40
§ 2.3 连续型随机变量	47
§ 2.4 应用实例	56
习题二	59
第 3 章 多维随机变量	62
§ 3.1 二维随机变量及其分布	62
§ 3.2 随机变量的独立性	72
§ 3.3 条件分布	75
§ 3.4 随机变量的函数及其分布	79
§ 3.5 应用实例	91
习题三	96
第 4 章 随机变量的数字特征	101
§ 4.1 数学期望	101
§ 4.2 随机变量的方差	107
§ 4.3 几种常见分布的数学期望和方差	111
§ 4.4 协方差、相关系数与矩	113
§ 4.5 多维正态随机变量	118
§ 4.6 应用实例	121
习题四	123
第 5 章 大数定律和中心极限定理	126

§ 5.1 随机变量序列的收敛性	126
§ 5.2 大数定律	127
§ 5.3 中心极限定理	131
§ 5.4 应用	135
习题五	136
第 6 章 数理统计的基本概念	138
§ 6.1 总体、样本与统计量	138
§ 6.2 抽样分布	141
§ 6.3 应用	148
习题六	150
第 7 章 参数估计	152
§ 7.1 参数的点估计	152
§ 7.2 估计量的优良性准则	158
§ 7.3 区间估计	162
§ 7.4 应用	172
习题七	175
第 8 章 假设检验	178
§ 8.1 假设检验的基本概念	178
§ 8.2 参数的假设检验	181
§ 8.3 分布的假设检验	190
§ 8.4 应用	195
习题八	198
第 9 章 回归分析	201
§ 9.1 回归分析的模型	201
§ 9.2 一元线性回归	203
§ 9.3 多元线性回归	212
§ 9.4 非线性回归问题的线性化处理	219
§ 9.5 应用	227
习题九	233
第 10 章 方差分析及试验设计	237
§ 10.1 方差分析概述	237
§ 10.2 单因素方差分析	238
§ 10.3 两因素方差分析	246
§ 10.4 正交试验设计	262
§ 10.5 应用实例	272

习题十	276
习题答案	280
附 表	289
附表 1 泊松分布表	289
附表 2 标准正态分布表	291
附表 3 χ^2 分布表	292
附表 4 t 分布表	295
附表 5 F 分布表	297
附表 6 相关关系显著性检验相关系数临界值表	308
附表 7 正交表	308

第 1 章 概率论的基本概念

§ 1.1 随机事件与随机变量

一、随机现象及其统计规律

在自然科学和社会科学的研究中,随着人们认识的不断发展,发现客观现象大体可分为两大类:确定性现象和非确定性现象.

确定性现象的共同特点是在准确重复某些条件时,它的结果总是确定的;或者根据它过去的状态,在一定条件下完全可以预言将来的发展情况.例如,同性电荷必然相互排斥;在 $101\ 325\ \text{Pa}$ (标准大气压)下纯水在 100°C 时必沸腾,在 0°C 时必结冰;在恒力作用下的质点作等加速运动等等.研究确定性现象的规律性,可借助于诸如数学分析、几何、代数、微分方程等我们熟悉的数学工具.

非确定性现象具有事前不可预言性,即在相同条件下对其做重复试验,每次结果未必相同,或者知道它过去的状态,事前却不能预知未来的情况,比如:

(1) 抛一枚均匀硬币若干次,每次抛之前都不知是否会出现正面(国徽面).

(2) 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达 $300\ \text{h}$,该元件还能使用多少小时?

(3) 一名炮手,使用同一门炮,按同样射击条件(初始速度 v_0 ,发射角 θ 与弹道系数 C)进行射击,但射击前无法预测每次弹着点的确切位置.

上面各例所涉及的非确定现象普遍存在,我们称这种不确定现象为随机现象.

为什么在随机现象中,在相同的基本条件下,试验或观测结果会不完全一样呢?这是因为除了基本条件之外,客观上还存在许多变化着的偶然因素,它们中每一个对试验或观测的结果影响均很小,但它们的综合影响就会使得试验或观测的结果产生差异.譬如,在大炮射击时,炮弹的飞行条件、弹药的成分以及射手的发射状态都不可能完全一致,诸多因素的影响,造成了弹着点的偶然性偏差.

对于随机现象,虽然人们事先无法预料个别试验的确切结果,但人们经过长期试验和深入研究后发现,在大量重复试验和观察下,随机现象的结果会呈现出某种规律性,历史上不少的科学试验验证了这种规律性十分明显和稳定.例如,抛一枚均匀硬币,无法肯定一次抛掷会出现正面,但多次重复抛同一硬币,就会发现明显的规律性,即出现正面的次数约占抛掷总数的一半.表 1.1.1 是历史上几位著名学者的试验记录.

表 1.1.1

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	m/n
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
德·摩根	2 048	1 048	0.511 7
德·摩根	2 048	1 017	0.496 6
德·摩根	2 048	1 039	0.507 3
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

由上述试验记录可以看出,随着抛掷次数的增多,比值 m/n 在 0.5 附近摆动.随机现象在个别试验中其结果呈现不确定性,在大量重复试验中其结果又具有规律性,我们称大量同类随机现象所呈现的固有规律为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科.

二、随机试验与随机事件

我们将对社会现象和自然现象进行观察和各种科学实验统称为**试验**.

具有以下特征的试验称为**随机试验**:

- (1) 它可在相同条件下重复进行;
- (2) 试验的全部可能结果,是在试验前就明确的;
- (3) 一次试验结束之前,不能准确预知哪一个结果会出现.

例 1.1.1 抛一枚质地均匀的硬币一次,观察出现正反面情况,这是随机试验,记为 E_1 .

试验 E_1 的可能结果有两个:正面向上和正面向下,试验前不知会出现正面向上还是正面向下,并且重复抛掷同一硬币,使 E_1 可以在相同条件下重复进行.

例 1.1.2 任意抽取 100 只同一型号的晶体管,记录其中的不合格品个数.这也是随机试验,记为 E_2 .

在 100 只晶体管中的不合格品个数可能是 0, 或 1, 或 2, …, 或 100, 但完成测试前,不能肯定其中究竟有多少个不合格品,而且在同批次晶体管中,每次重复抽取 100 件检查其中的不合格品数,即试验 E_2 在相同条件下可重复进行.

类似地,以下各试验均为随机试验:

E_3 : 检查一条生产线在 24 h 期间生产出的次品个数.

E_4 : 在一批晶体管中任取一只,测试它的电流放大系数.

E_5 : 观察一枚新发射的导弹,记录这枚导弹在时刻 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 距地面的高度.

E_6 : 测量某团体人员的身高.

我们通过研究随机试验来研究随机现象,本书中所讨论的试验都是指随机试验.进行一次试验,有这样或那样的事情发生,它们各有不同的特性,彼此之间又有一定的联系,称随机试验中可能发生也可能不发生的事情为**随机事件**,简称**事件**,通常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

例 1.1.3 在 0, 1, 2, …, 9 十个数字中任意选取一个,可有十种不同的结果:

$$A_i = \{\text{取得的数是 } i\}, i=0, 1, 2, \dots, 9.$$

还有其他的可能结果,例如

$B = \{\text{取得的数是奇数}\}, C = \{\text{取得的数大于 } 5\}, D = \{\text{取得的数是 } 3 \text{ 的倍数}\}, B, C, D, A_i, i=0, 1, 2, \dots, 9$ 都是随机事件.

例 1.1.4 测试电视显像管的使用寿命,用 X 表示其寿命(单位:h),对任意实数 $x > 0, A = \{X = x\}$ 表示随机事件“显像管的寿命为 x ”,另外 $B = \{X < 6\,000\}, C = \{X > 5\,500\}$ 分别表示“显像管寿命不到 6 000 h”和“显像管寿命超过 5 500 h”, B 和 C 也是随机事件.

在随机试验中必然发生的事件称为**必然事件**,用符号 Ω 表示.在随机试验中必然不发生的事件称为**不可能事件**,用符号 $\emptyset$ 表示.譬如,例 1.1.4 中,若 $x < 0$,则 $\{X = x\}$ 是不可能事件,而 $\{X \geq 0\}$ 是必然事件,把必然事件和不可能事件看作随机事件,对于我们研究问题是有益的.

三、样本空间与随机变量

让我们分析例 1.1.3 中的诸事件,事件 B 可看成由事件 A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 组合而成, C 和 D 也是由部分 A_i 组成,而 $A_i, i=0, 1, 2, \dots, 9$ 这十个事件具有“最简单”的“不可分”形式.另外每做一次例 1.1.3 中的试验,十个事件 $A_i, i=0, 1, 2, \dots, 9$ 中必有一个发生,且不可能有两个同时发生.类似地,例 1.1.4 中的事件 $\{X$

$=x\}$ 也是形式最简单的事件,并且每测试一只显像管,它的实际使用寿命只能取一个确定的数.

称在随机试验 E 中必发生一个且仅发生一个的最简单事件为试验 E 的**基本事件**,由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**.

例 1.1.3 中的 $A_i, i=0,1,2,\dots,9$ 和例 1.1.4 中的 $\{X=x\}, x>0$ 都是基本事件,其他事件则是复合事件.

一个事件是否为基本事件是相对于试验目的而言的.如试验 E_6 ,若试验的目的仅是测量人的身高,对任意实数 $x>0$,事件“测得人的身高是 x ”都是基本事件,这时试验 E_6 有无穷多个基本事件.若测量人的身高是为了判断乘客乘车是否需购全票、半票或免票,这时仅有三个基本事件.

我们用集合表示事件,对于随机试验 E 的每一基本事件,用一个只包含一个元素 ω 的单元素 $\{\omega\}$ 表示;由若干基本事件组成的复合事件,则用对应的若干个元素所组成的集合表示;由全体基本事件所对应的全部元素所组成的集合,称为随机试验 E 的**样本空间**,称样本空间的每一个元素 ω 为**样本点**.若 $\omega \in A$,表示事件 A 发生.

若将样本空间看作事件,则它是必然事件,样本空间仍用 Ω 表示.试验 E 的任一事件都是样本空间的子集,记为 $A \subset \Omega$.

试验 E_1 有两个基本事件

$$\{\omega_1\} = \{\text{正面}\}, \{\omega_2\} = \{\text{反面}\},$$

则 E_1 的样本空间 $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{正面}, \text{反面}\}$.

例 1.1.3 中的试验 E 有十个基本事件: $A_i = \{\omega_i\}, \omega_i = i, i=0,1,2,\dots,9$, 则 E 的样本空间为

$$\Omega = \{0,1,2,\dots,9\},$$

而且随机事件

$$B = \{1,3,5,7,9\}, C = \{6,7,8,9\}, D = \{0,3,6,9\}$$

都是样本空间 Ω 的子集.

其他试验 E_i 的样本空间 Ω_i 分别是:

$$\Omega_2 = \{0,1,2,\dots,100\};$$

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\dots,N\}, \text{其中 } N \text{ 为 } 24 \text{ h 内所生产的产品总数};$$

$$\Omega_4 = \{\mu: \mu > 0\}, \mu \text{ 为电流放大系数};$$

$$\Omega_5 = \{(h_1, h_2, \dots, h_n) : h_i \geq 0, i=1,2,\dots,n\};$$

$$\Omega_6 = \{x: x > 0\}.$$

样本空间这个概念能使我们更好地把握随机现象的本质,使研究结果更具广泛性.例如,仅包含两个样本点的样本空间能作为抛硬币出现正反面的模型,也可用来描述射击是否“中靶”,产品检验出现“合格品”及“不合格品”等等类

似问题, 尽管问题的实际内容各色各异, 但应用样本空间后却能归结为相同的概率模型.

例 1.1.3 和例 1.1.4 中随机试验的结果直接对应一个数值, 但有些随机试验的结果不一定是数值, 如抛一枚均匀硬币的结果是“正面”和“反面”. 为了深入研究随机现象, 需要将随机试验的结果数量化, 即用一个变量来描述试验结果, 从而用量化分析方法来研究随机现象的统计规律.

例 1.1.5 将一枚均匀硬币连续抛两次, 用 H 、 T 分别表示硬币的正、反面, 其样本空间为 $\Omega = \{TT, HT, TH, HH\}$, 可令

$$X(TT) = 0, X(HT) = X(TH) = 1, X(HH) = 2.$$

X 的实际意义是两次抛掷中正面出现的次数, 它是定义在样本空间 Ω 上的变量, 称 X 是一个**随机变量**, X 完整地描述了该试验的全部结果. 随机变量的数学定义将在第 2 章给出.

例 1.1.6 某射手连续向一目标射击, 直至命中为止, 令

$$\{\omega_i\} = \{\text{前 } i-1 \text{ 次均未命中, 第 } i \text{ 次命中目标}\}, i=1, 2, \dots,$$

则试验的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, 射击次数 Y 为

$$Y = Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1, \\ 2, & \omega = \omega_2, \\ \vdots & \vdots \\ i, & \omega = \omega_i, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

它是样本点 ω 的函数, 此函数的取值取决于试验的结果. Y 也是一个随机变量.

通常对随机变量 X , 记

$$\{X \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \leq x\}, \quad \{X = x\} = \{\omega : X(\omega) = x\},$$

它们都是随机事件. 如例 1.1.5 中的随机变量 X 有

$$\{X = 0\} = \{TT\}, \quad \{X = 2\} = \{HH\}.$$

四、事件的关系与运算

事件是样本空间的子集, 因而事件间的关系与运算可按集合论中集合之间的关系和运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法和含义.

设试验的样本空间为 Ω , 而事件 $A, B, A_k, k=1, 2, \dots$ 是 Ω 的子集.

1. 包含关系: $A \subset B$, 即事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 称事件 B 包含事件 A . 在试验 E_2 中, 考虑事件

$$A = \{100 \text{ 只晶体管中恰有 } 3 \text{ 只不合格}\},$$

$$B = \{100 \text{ 只晶体管中不合格品不超过 } 5 \text{ 只}\},$$

则有 $A \subset B$.

对例 1.1.4 中电子显像管的使用寿命 X , 当实数 $x_1 < x_2$, 则 $\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$.

对任一事件 A , 都有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

2. 和事件: 事件

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\},$$

称为事件 A 与事件 B 的和, 即当且仅当 A 和 B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.

类似地, 称 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件; 称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件.

例 1.1.7 在试验 E_3 中, 令

$$A = \{\text{产品中有次品}\}, \quad A_k = \{\text{产品中有 } k \text{ 件次品}\}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

则

$$A = \bigcup_{k=1}^N A_k.$$

若将此试验改为在生产线上不限时地进行检查, 直到检查出一件次品为止. 设

$$B = \{\text{检查出次品}\}, \quad B_k = \{\text{第 } k \text{ 次检查到次品}\},$$

则显然有

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

3. 积事件: 事件

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\},$$

称为事件 A 与事件 B 的积, 即当且仅当 A 和 B 同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记为 AB .

类似地, 称 $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 A_2 \cdots A_n$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件.

在例 1.1.3 中有

$$B \cap C = \{\text{取得的数是奇数}\} \cap \{\text{取得的数大于 } 5\} = \{7, 9\},$$

$$B \cap D = \{\text{取得的数是奇数}\} \cap \{\text{取得 } 3 \text{ 的倍数}\} = \{3, 9\}.$$

例 1.1.4 中的电子显像管的使用寿命 X , 有

$$\{X > 5\,500\} \cap \{X < 6\,000\} = \{5\,500 < X < 6\,000\}.$$

4. 互不相容事件: 若 $A \cap B = \emptyset$, 称事件 A 与 B 互不相容 (或称它们是互斥的). 即指事件 A 与 B 不能同时发生.

任意事件 A 与不可能事件 $\emptyset$ 互不相容.

例 1.1.4 中的事件 $\{X = 5\ 500\}$ 与 $\{X = 6\ 000\}$ 是互不相容事件, 而事件 $\{X > 6\ 000\}$ 和 $\{X < 5\ 500\}$ 也是互斥的.

如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 任意两个事件都互不相容(互斥), 则称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容(两两互斥).

事件列 $A_k, k=1, 2, \dots$ 互不相容是指事件列的任意有限个事件互不相容.

例 1.1.3 中的十个事件 $A_i = \{\text{抽得数“}i\}\}$ 是互不相容的.

一般地, 根据基本事件的定义可知, 同一随机试验的基本事件都是互不相容的.

5. 对立事件: 若 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或称它们互为逆事件). 这是指对每次试验而言, 事件 A 与 B 必有一个发生, 并且仅有一个发生.

事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}$, 即做一次试验“ A 不发生”这一事件.

在例 1.1.3 中, 事件 $B = \{\text{取得奇数}\}$, 其对立事件为 $\bar{B} = \{\text{取得偶数}\}$.

例 1.1.4 中, 因为

$$\{X \geq 6\ 000\} \cap \{X < 6\ 000\} = \emptyset, \text{ 且 } \{X \geq 6\ 000\} \cup \{X < 6\ 000\} = \Omega.$$

它们互为对立事件, 即有

$$\overline{\{X \geq 6\ 000\}} = \{X < 6\ 000\}, \quad \overline{\{X < 6\ 000\}} = \{X \geq 6\ 000\}.$$

6. 差事件: 事件 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$ 称为 A 与 B 的差事件, 当且仅当 A 发生而同时 B 不发生.

按照对立事件的概念, 有 $A - B = A\bar{B}$, $\bar{A} = \Omega - A$.

在例 1.1.4 中, 对实数 $x_1 < x_2$, 有

$$\{X \leq x_2\} - \{X \leq x_1\} = \{X \leq x_2\} \cap \overline{\{X \leq x_1\}} = \{x_1 < X \leq x_2\}.$$

在上述概念中, 我们将样本空间看作全集, 事件的各种关系和运算对应样本空间子集间的相应关系和运算, 故我们可以用集合论中文氏图(Venn 图)来表示事件的关系和运算, 如图 1.1 所示.

在进行事件运算时, 常用到下述运算规律:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;
2. 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A(BC) = (AB)C$;
3. 分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A(B - C) = (AB) - (AC)$;
4. 吸收律: 若 $A \subset B$, 则 $AB = A$, $A \cup B = B$;
5. 德·摩根(De Morgan)公式: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

它们可以推广到有限个或可列无穷个事件的情形, 如

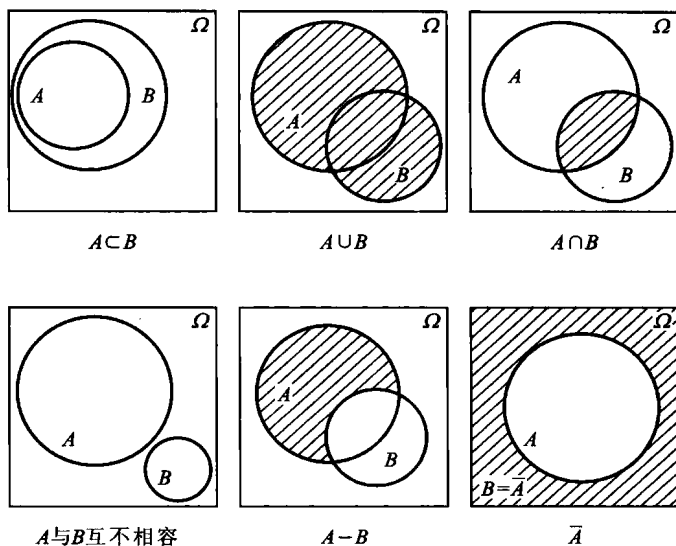


图 1.1

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k, \quad \bigcap_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k.$$

例 1.1.8 证明: $A - B = A - AB$, $(A \cup B) - B = A - B$.

证 $A - B = A\bar{B} = A(\Omega - B) = A\Omega - AB = A - AB$,

$$(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap \bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = (A - B) \cup \emptyset = A - B.$$

例 1.1.9 某射手向一目标射击 3 次, 令

$A_i = \{\text{第 } i \text{ 次命中目标}\}, i = 1, 2, 3.$

$B_j = \{\text{在 3 次射击中, 恰命中 } j \text{ 次}\}, j = 0, 1, 2, 3,$

则 $B_0 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$, $B_1 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$,

$$B_2 = A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3, \quad B_3 = A_1 A_2 A_3.$$

若 $C_j = \{\text{在 3 次射击中, 至少命中 } j \text{ 次}\}, j = 1, 2, 3$, 则有

$$C_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad C_2 = A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3, \quad C_3 = B_3 = A_1 A_2 A_3.$$

例 1.1.10 某电子系统由 n 个元件 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 组成, 令

$A_k = \{\text{元件 } e_k \text{ 正常工作}\}, k = 1, 2, \dots, n.$

$S = \{\text{系统正常工作}\},$

则在并联系统(如图 1.2(a)所示)中, 系统工作正常的事件为

$$S = \{\text{元件 } e_1, e_2, \dots, e_n \text{ 中至少有一个正常工作}\} = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

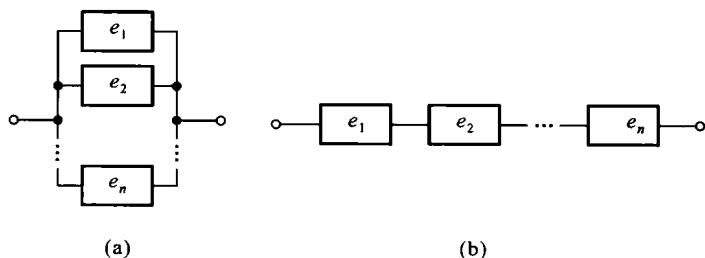


图 1.2

$$\bar{S} = \{\text{系统工作失效}\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n \text{ 全部工作失效}\} = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k.$$

在串联系统(如图 1.2(b)所示)中,系统工作正常的事件为

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n \text{ 都正常工作}\} = \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

整个系统工作失效的事件是

$$\bar{S} = \{e_1, e_2, \dots, e_n \text{ 至少有一个工作失效}\} = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k.$$

§ 1.2 概 率

一、概率

概率是什么?人们对于概率这个数学术语不一定清楚,却往往有意无意地使用它.对问题“明天是否会下雨?”,有人会说:“我有 80% 把握断定明天不会下雨.”每个购买福利彩票的人都关心投入一定的资金,获得头等奖的可能性有多大,这些问题实际上都涉及随机事件的概率.

随机试验中的随机事件,有可能发生,也有可能不发生,人们不能事前预知,但它们发生的可能性大小却是客观存在的,不依人们的主观意识为转移.例如,掷一颗骰子,出现偶数点的可能性大于恰出现 6 点的可能性;购买福利彩票获得头等奖的可能性远远小于获得尾奖的可能性.随机事件发生的可能性大小是一个客观存在的量.概率是对随机事件发生可能大小的一个客观度量.事件 A 的概率记为 $P(A)$.

在概率论的发展过程中,人们针对不同的问题,从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法.

二、频率

人们容易接受这种说法:当一个事件发生的可能性大(小),在相同条件下重复进行若干次试验,该事件发生的次数就多(少),因而,下面引进的数量指标能在一定程度上反映事件发生的可能性大小.

定义 1.2.1 设在相同条件下,进行 n 次试验,事件 A 发生了 m 次,称比值

$$f_n(A) = \frac{m}{n} \quad (1.2.1)$$

为事件 A 发生的频率.

回顾 §1.1 节的表 1.1.1,表中列出了各个试验者对于“抛掷硬币出现正面”这一事件所算得的频率值.从表中可观察到不同试验者所得的频率是不同的,甚至同一试验者所做不同序号的试验,所得的频率也是相异的.一个事件发生的可能性大小是确定的,因此频率虽然能在一定程度反映事件发生的可能性大小,却不是客观量度,就是说频率不是概率.另一方面,从表中我们也可以观察出,随着抛掷次数的增多,“出现正面”这一事件的频率在 $1/2$ 附近摆动,渐趋稳定.

例 1.2.1 检查一大批同型号的产品,其结果如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

抽取数 n	5	10	50	150	200	1 800	3 600
合格数 m	5	8	46	132	179	1 630	3 241
频率 $\frac{m}{n}$	1	0.8	0.92	0.88	0.895	0.906	0.900 3

从表中数据可见,虽然抽到合格品的件数是随机的,但随着抽取件数的增多,“抽得合格品”的频率值逐渐稳定于数 0.9.

一般来讲,在相同的条件下重复进行试验,随着试验次数增多,事件的频率总在某一常数的附近摆动,并且出现较大偏差的可能性很小,我们称频率的这一性质为**频率的稳定性**.第 5 章的大数定律将揭示频率稳定性的确切含义,并且可知事件 A 的频率就稳定于事件 A 的概率 $P(A)$,因而在工程实用中,常进行较多次数的重复试验,算得的频率作为概率的近似值.

三、古典概率

定义 1.2.2 设 E 是一个随机试验,若它满足以下两个条件:

- (1) 仅有有限个基本试验;
- (2) 每个基本事件发生的可能性相等,