华东师范大学函授教材

数学讲义

（第三册）

华东师范大学数学系
陈美廉　許　明　林忠民编

华东师范大学函授部

华东师范大学函授教材

数 學 講 义

(第 三 册)

陈美廉　許　明　林忠民編

华东师范大学函授部
1959 年

目　　錄

第四篇　積分學

第四篇 積分學

本篇的內容有二：其一是求和的极限問題——定积分，其二是求函数的原函数問題——不定积分。正象导数与微分一样，定积分与不定积分在概念上及其应用上虽然不同，但在运算方面却有着紧密的联系，也正是基于这一点，我們把求定积分与不定积分的运算統称为积分法（或簡称积分）。研究定积分与不定积分概念、性質及应用的科学称为积分学。在本篇中只想向函授生介紹这一領域中最基本的方法与最簡單的性質与应用。

第一章 积 分

本章的主要內容是研究定积分与不定积分的性質与求法以及它們之間的关系。其系統是从具体的問題引入定积分概念（§1–§2）进而研究其性質，为了更好更早地看到定积分与原函数之間的关系（§4）以便利用这个关系来研究定积分的性質（§5）我們在§3中引入了原函数与不定积分的概念。在最后兩节（§6–§7）我們集中地研究不定积分的求法。函授生在閱讀这章的过程中必須注意如下几个問題：

1. 彻底弄懂定积分的定义，掌握积分和式的来龙去脉以及取极限过程中应注意的問題。

2. 明确原函数与不定积分的定义以及兩者之間的关系。

3. 掌握定积分与原函数之間的关系以及利用这个关系去証明定积分的簡單性質。

4. 注意积分計算技巧的訓練，通过大量的練习，記住基本积分

表幷熟練地运用求不定积分的兩种一般方法——分部积分法与变量代换法。

§1. 問題的引入

I. 曲边梯形的面积

在初等几何学中仅仅教給我們計算一类非常簡單的平面图形的面积。如三角形、矩形、多角形、圓、弓形等面积，这些图形都是由直綫段和圓弧所圍成的。至于要計算更复杂一些的平面图形的面积，比如說：曲边梯形(如图1)就无能为力了。当人們掌握了极限工具之后，就提供了計算它甚至更复杂一些平面图形的面积的可能性。下面我們打算把这可能性变为现实性。

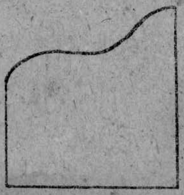

图1

为了避免累贅起見，我們从最簡單的問題着手。

設在 Ox 軸上方有一条曲綫是函数 $y=f(x)$ 的图形，試計算由該曲綫 $y=f(x)$, Ox 軸及直綫 $x=a$ 与 $x=b$ 所圍成的曲边梯形的面积 S。(图2)

要解决上述的問題可依照以下的步驟来进行。

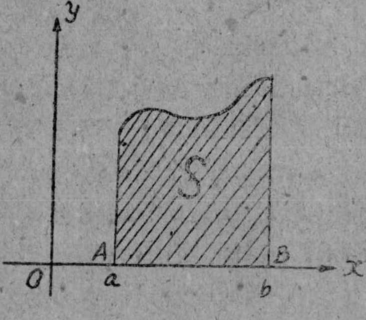

图2

首先把綫段 AB 分成 n 个小段(不一定相等)，每一个小段的長度依次用 $\Delta x_1(=x_1-a)$, $\Delta x_2(=x_2-x_1)$, $\Delta x_3(=x_3-x_2)$, ……, $\Delta x_n(=b-x_{n-1})$記之。其次按順序在每一个小綫段上各取出一点 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$, 在这些点处 $y=f(x)$ 的函数值分别为 $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $f(\xi_3)$, $\cdots f(\xi_n)$。可以看出乘积

$$f(\xi_1)\Delta x_1$$

是表示以 $\Delta x_1=x_1-a$ 为底边，以 $f(\xi_1)$ 为高的小矩形的面积。所有

这样的小矩形的面积加起来

$$S_n=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n. \qquad (1)$$

这个和 S_n 等于图3中有影綫的各小矩形面积之和，当綫段分得很細时，这个面积与原来由曲綫圍成的面积很相近。綫段分得愈細，S_n 与原来的面积 S 就愈接近*。因此当最大的小綫段的長度 d_n** 趋于另时，我們有理由把和式(1)的极限

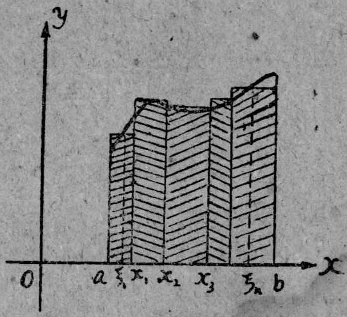

图3

$$S=\lim_{d_n\to 0}S_n=\lim_{d_n\to 0}[f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n]$$

$$=\lim_{d_n\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

S 称做曲边梯形的面积。

由此可見，計算曲边梯形面积的問題，最終是归結到求形如(1)的和式的极限問題。

II. 变力所作的功

設有一物体受力 P 的作用沿一直綫运动，(不妨假設力的方向与物体运动的方向一致）我們要計算物体从 a 移到 b 位置时所作的功。

現在分兩种情况考慮:

(i) 如果物体由 a 移动到 b 所受的力 P 是不变的。換句話說，它在移动的路程上每一处所受的力 P 是相同的，那末力 P（常数）与这一段距离 $\overline{AB}$ 的相乘积

$$W=P\cdot\overline{AB}$$

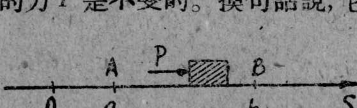

图4

---

* 这里所謂分得越細是指所分的不一定相等的小綫段中，最長的那一个小綫段的長度愈小。

** d_n 表示对应分划的最大小区間的長度，有时也記做 $\max \Delta x_i$.

就是常力 P 在这段路程上所作的功。这种簡單的情況不是我們感兴趣的問題。我們感到兴趣的是物体受变力 P 的作用沿直綫运动时所作的功。所謂变力是指当物体在不同的位置时作用于它的力是不同的，这样的变力 P 对物体在不同的位置上它所对应的値是不同的，因此它是物体距 A 点距离 S 的函数以 $P=P(s)$ 記之，試求物体在这个变力 $P(s)$ 的作用下沿直綫 OS 由 A 移到 B 位置所作的功。

为了解决上述問題，我們仍依下面的步驟来进行。

首先把路徑 AB 分成 n 个小段（不必相等），每一小段路程的距离依次用

$$\Delta s_1(=s_1-a),\ \Delta s_2(=s_2-s_1),\ \Delta s_3(=s_3-s_2),\cdots,\ \Delta s_n(=b-s_{n-1})$$

表示。其次在每一小段 $[s_{i-1}, s_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上順序取出一点 ξ_i，在 ξ_i 位置上的力是 $P(\xi_i)$，設在这小段上每一处的力都等于 $P(\xi_i)$，那末在路程 Δs_i 上所作的功就是

$$P(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

但实际上在 Δs_i 上每一处的力并不一定都等于 $P(\xi_i)$，因此 $P(\xi_i)\Delta s_i$ 只能表示变力 $P(s)$ 在 Δs_i 上所作的功的近似値。現在把每一小段路程上所作的功加速起来

$$W_n=P(\xi_1)\Delta s_1+P(\xi_2)\Delta s_2+\cdots+P(\xi_n)\Delta s_n=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i)\Delta s_i$$

当路程愈分愈小时*，功 W_n 与原变力 $P(s)$ 在路程 AB 上所作的功愈接近。因此当最大的那个小段的長度（距离）d_n 趋向于另时，我們有理由把极限

$$W=\lim_{d_n\to0}W_n=\lim_{d_n\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i)\Delta s_i$$

W 称做变力 $P(s)$ 在路徑 AB 上所作的功。

由此可見，求变力所作的功的問題最終还是归結到求一个和式的极限問題。

---

* 这里所指的愈分愈小的意义同第 3 頁註 *

III. 物質曲綫的質量

設有一金屬曲綫(很細)其長度为ℓ,若其密度 ρ 处处都是一样,(即所謂物質分布均匀)那末它的質量就是

$$m=\rho\ell.$$

但实际的情况往往不是这样，也就是說金屬曲綫的各处密度經常是不一样的。現在我們要来研究这种情况，

設金屬曲綫的密度 ρ 是曲綫長度 s 的函数,以

$$\rho=\rho(s)$$

表示,試求密度分布为 $\rho(s)$ 長为 ℓ 的金屬曲綫的質量。

首先把曲綫分成 n 个小段(如图 5),各小段的長度依次用

$\Delta s_1(=s_1-s_0)_1, \Delta s_2(=s_2-s_1),\cdots$

$\Delta s_n(s_n-s_{n-1})$

表示。这里 $s_0=0$, $s_n=\ell$ 其次在第i小段上任取定一点 ξ_i, 在这点处的密度为 $\rho(\xi_i)$。若在这段上每一点的密度都等于 $\rho(\xi_i)$, 那末它的質量就是

图 5

$$\rho(\xi_i)\Delta s_i$$

但实际上在 $[s_{i-1}, s_i]$ 上每一点处的密度并不一样,因此 $\rho(\xi_i)\Delta s_i$ 只是这小段質量的近似值，現在把每一个这样的質量加起来

$$M_n=\rho(\xi_1)\Delta s_1+\rho(\xi_2)\Delta s_2+\cdots+\rho(\xi_n)\Delta s_n=\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta s_i,$$

当小段分得很細时，这个和 M_n 与原曲綫的質量很接近,当最大的小段的長度 d_n 趋向于另时,我們有理由把这个极限

$$M=\lim_{d_n\to 0} M_n=\lim_{d_n\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta s_i.$$

M 称做該金屬曲綫的質量。

由此可見，解决密度分布不均匀的物質曲綫的質量問題仍然归結到求一个和式的极限問題。

§2. 定积分的定义

从前节所討論的三个实际問題来看，虽然它們是屬于不同方面的問題。但就其解决的方法与步驟而言，却是相同的——都归到求某种和式的极限。数学的任务是要抽去上节問題中函数所代表的具体的几何或物理的意义，而用分析的方法概括出解决那些問題的方法与步驟。并給予严謹的数学定义。

設函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，依 §1 解决問題的步驟

(i) 引入 $n-1$ 个分点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$. 把 $[a,b]$ 分成 n 个小区間，每一个小区間的長度依次用

$$\Delta x_1=x_1-a,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ \Delta x_3=x_3-x_2,\cdots,\ \Delta x_n=b-x_{n-1}{}^*$$

表示。

(ii) 在每一个小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots n)$ 上任取一点 ξ_i, 作 $f(\xi_i)$ 与 Δx_i 的相乘积

$$f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

(iii) 把这些乘积加起来

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n \tag{1}$$

(iv) 当最大的小区間的長度 $d_n=max\ \Delta x_i$ 趋于另时，取和式(1)的极限

$$I=\lim_{d_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果极限 I 存在，則称为函数 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上的定积分。显見极限 I 是依賴于函数 $f(x)$ 和区間 $[a,b]$。

如果称和式(1)为积分和式(或积分和)的話，那末还可以給定积分一个簡單的定义：

定义：积分和式(1)当最大的小区間長度 $d_n=max\ \Delta x_i$ **趋向于**

---

* 可以令 $a=x_0$, $b=x_n$.

另时的极限称为函数 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上的积分。用符号

$$\int_a^b f(x)dx\,^*$$

表示。即

$$\lim_{d_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

(符号 $\int_a^b f(x)dx$ 就讀作 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分。)符号中的 a 称为积分的下限，b 称为积分的上限，$[a,b]$称为积分区間，x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积分函数(簡称被积函数)，$f(x)dx$ 称为被积表达式。

在此我們將不加証明地告訴大家一个重要的事实:

連續函数的定积分一定存在。

这里在給出定积分定义的同时，出現了許多新的名詞，希望函授生能耐心地、細心地了解与体会它，絕不能囫圇吞棗，一知半解地讓它們溜过。

現在来举几个定积分的例子:

例 1 根据定义求 $\int_0^1 x^2dx$

［解］ 由于 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 区間上連續，它的定积分一定存在，根据定义的四个步驟进行計算。

(i) 把 $[0,1]$ 区間分成 n 个相等的小区間，(这只是为了計算方便)

$$\Delta x_1=\frac{1}{n}-0=\frac{1}{n},\Delta x_2=x_2-x_1=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n},\cdots,\Delta x_n=1-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n};$$

(ii) 在每一个小区間中任取一点，比如說: 我們都取每一个小区間的右端点。作在該点的函数值与对应区間長的相乘积

$$f(\xi_i)\Delta x_i=\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n};$$

(iii) 把这些乘积加起来

* 符号 $\int$ 是由拉丁字“和”的第一个字母S变形而来的，我們用它来表示和的极限。

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right],$$

利用自然数平方和的公式

$$1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

把积分和式改写成

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{1}{6}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right);$$

iv) 当最大的小区間的長度 $max\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$趋向于另时，即 $n\to\infty$ 时，取积分和式的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

这就是說，函数 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 区間上的定积分等于$\frac{1}{3}$.

如果联系到第一节問題 I，我們馬上知道由曲綫 $y=x^2$, Ox 軸，及直綫 $x=1$ 所圍成的面积 S 正是函数 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上的定积分。由此

知道面积 S 等于 $\frac{1}{3}$。(图 6)

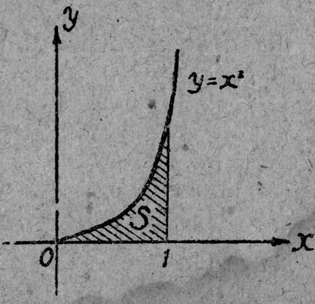

图 6

例 2 根据定义求 $\int_a^b \sin x\, dx$。

〔解〕 由于 $y=\sin x$ 在 $[a,b]$ 上連續，同理可根据定义的四个步驟計算：

(i) 把 $[a,b]$ 分成 n 个相等的小区間(也只是为了計算方便)，每一个小区間的長度为 $h=\frac{b-a}{n}$。

$$\Delta x_1 = x_1 - a = (a+h) - a = h,$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = (a+2h) - (a+h) = h,$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = (a+3h) - (a+2h) = h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta x_n = b - x_{n-1} = b - [a+(n-1)h] = h; *$$

(ii) 在每一个小区間上任取一点，比如說：我們都取小区間的右端点，作在該点处的函数值与对应的小区間長的相乘积

$$f(\xi_i)\Delta x_i = \sin(a+ih)h; \qquad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

(iii) 把这些乘积加起来

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sin(a+ih)\,h$$

$$= h[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin(a+nh)]$$

設 $h \neq 2k\pi$ (k 为整数) 將和式的分子分母同乘上 $2\sin\frac{h}{2}$ 得

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}} 2\sin\frac{h}{2}[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin(a+nh)]$$

$$= \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}[2\sin\frac{h}{2}\sin(a+h) + 2\sin\frac{h}{2}\sin(a+2h) + \cdots$$

* 因为 $b=a+nh$.

$$+2\sin\frac{h}{2}\sin(a+nh)]$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left\{\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right]+\left[\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)\right]+\cdots+\left[\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)+\cdots+\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right];$$

(iv) 当 $h\to0$ 时取和式的极限

$$\lim_{h\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{h\to0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\lim_{h\to0}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\mathrm{n}h+\frac{h}{2}\right)\right]$$

由于 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}=1$（参看第二篇第二章 §7）

又 $\lim\limits_{h\to0}\left[\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\dfrac{h}{2}\right)\right]$

$$=\lim_{h\to0}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\lim_{h\to0}\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)^{*}$$

* 因为 $a+nh=b$.

$$=\cos\left[\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{h}{2}\right)\right]-\cos\left[\lim_{h\to 0}\left(b+\frac{h}{2}\right)\right]^{*}$$

$$=\cos a-\cos b。$$

故 $$\int_a^b \sin x\,dx=\cos a-\cos b。$$

在結束这节前应該提一下的是前节三个实际問題，若引用定积分的概念可以叙述如下：

I 由函数 $f(x)\geqslant 0$ 所表示的曲綫与 Ox 軸及直綫 $x=a$，$x=b$ 所圍成的曲边梯形面积就是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区間上的定积分。

II 变力 $P(s)$ 在路程 $\overset{\frown}{AB}$ 上所作的功就是函数 $P(s)$ 在 $[a,b]$ 区間上的定积分。

III 密度分佈为 $\rho(s)$ 長为 ℓ 的物質曲綫的質量就是函数 $\rho(s)$ 在 $[0,\ell]$ 区間上的定积分。

§3. 不定积分及基本积分表

通过 §2 的学习，使我們清楚地看到了定积分定义的本身已給我們提供了定积分的求法——求积分和式的极限。不过这个方法做起来相当复杂（見 §2 例），計算每一个具体函数的定积分都需要去寻找一个特殊的方法，这样势必給定积分的广泛应用帶来很大的限制。因此我們必須寻找別的途徑，想办法用統一的方法来达到計算定积分的目的。

为了上述目的，本节將引入所謂原函数与不定积分的概念，作为达到上述目的的准备。

其实，所謂原函数这个概念并不是什么新鮮的东西，在第三篇中我們研究了这样的問題——給出一个函数 $F(x)$，如何去求其导数

* 根据 $\cos x$ 的連續性。

$F'(x)=f(x)$ 或微分的問題？比如說：已知函数 $F(x)=\frac{x^3}{3}$，其导数

$$f(x)=F'(x)=\left[\frac{x^3}{3}\right]'=\frac{1}{3}[x^3]'=\frac{1}{3}(3x^2)=x^2.$$

反过来，我們現在考虑給定一个函数 $f(x)$，能否找到另一个函数 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)$？如上例：假使我們先知道

$$f(x)=x^2$$

如何去求原来的那个函数 $F(x)$？我們知道

$$f(x)=x^2=\left[\frac{x^3}{3}\right]'$$

所以說 $F(x)=\frac{x^3}{3}$ 是导数等于 x^2 的那个原来的函数，同时我們还可找出 $\frac{x^3}{3}+1$，它的导数也等于 x^2

$$\left[\frac{x^3}{3}+1\right]'=\frac{1}{3}[x^3]+[1]'=x^2=f(x)$$

因此 $G(x)=\frac{x^3}{3}+1$ 也是导数等于 $f(x)$ 的那个原来的函数。

为了便于以后的討論，我們作如下的

定义：导数等于 $f(x)$ 的函数 $\Phi(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的原函数。 換句話說；**若 $\Phi'(x)=f(x)$，則称 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数。**

例 1　正弦函数 $\Phi(x)=\sin x$ 是余弦函数 $f(x)=\cos x$ 的一个原函数。事实上

$$\Phi'(x)=[\sin x]'=\cos x=f(x)$$

即 $\sin x$ 的导数等于 $\cos x$，依定义 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数。由前例的启发，我們說

$$\sin x+1,\quad \sin x-\sqrt{2},\quad \sin x+c\quad (c\ 为任何常数)$$

都是 $\cos x$ 的原函数。因为

$$[\sin x+1]'=[\sin x]'+[1]'=\cos x+0=\cos x;$$

$$[\sin x-\sqrt{2}]'=[\sin x]'-[\sqrt{2}]'=\cos x+0=\cos x;$$

$$[\sin x+c]'=[\sin x]'+[c]'=\cos x+0=\cos x。$$

綜观上例，可以下这样的断言：若函数 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\Phi(x)$ 加上任何常数 c 也是 $f(x)$ 的原函数。

回忆一下第三篇第三章 §1 中值定理的第二个推論，那我們还可以說：若 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，則

$$\Phi(x)+c$$

是 $f(x)$ 的所有的原函数。式中 c 是任意常数。

有时我們把 $f(x)$ **的原函数族** $\Phi(x)+c$（c **为任意常数**）**称为函数** $f(x)$ **的不定积分**。并用符号

$$\int f(x)dx=\Phi(x)+c\ ^{*}$$

記之。类似于定积分那里的說法，**我們称 $f(x)$ 为被积函数，$f(x)dx$ 为被积表达式，特别称 c 为积分常数。（$\int f(x)dx$ 就讀作 $f(x)$ 的不定积分。）如上例可写做

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c;$$

$$\int\cos x dx=\sin x+c。$$

求不定积分的运算过程叫做积分法。根据定义，我們知道积分法是微分法的逆（反）运算。明确了这个关系之后，再回忆一下从前我們把求已知函数的导数的方法叫做微分法。那末它的逆运算——积分法应該确定为从导数来求出它的原函数。依这个观点，就可以从第三篇第一章 §6 导数基本公式表中得到基本不定积分表

---

* 这里的 $\int dx$ 是表示运算符号 $\int f(x)dx$ 是表示对 $f(x)$ 进行运算，正像 $\frac{df(x)}{dx}$ 是表示对 $f(x)$ 进行求导运算一样。

** 这样的类似性將在下一节中得到說明。

基本积分表

1. $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c,\quad (m\neq-1)$　　$\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]'=x^m;\ (m\neq-1)$

2. $\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c,$　　$[\ln x]'=\frac{1}{x};$

3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c,\quad (a>0)$　　$\left[\frac{a^x}{\ln a}\right]'=a^x;\quad (a>0)$

特别 $\int e^x dx=e^x+c,$　　$[e^x]'=e^x;$

4. $\int\cos x\,dx=\sin x+c,$　　$[\sin x]'=\cos x;$

5. $\int\sin x\,dx=-\cos x+c,$　　$[-\cos x]'=\sin x;$

6. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+c,$　　$[\operatorname{tg}x]'=\frac{1}{\cos^2 x};$

7. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+c,$　　$[\operatorname{ctg}x]'=-\frac{1}{\sin^2 x};$

8. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c,$　　$[\arcsin x]'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

9. $\quad=-\arccos x+c,$

10. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,tg}x+c,$　　$[\operatorname{arc\,tg}x]'=\frac{1}{1+x^2};$

$\quad=-\operatorname{arc\,ctg}+c,$

这个基本不定积分表很重要，它是今后求积分的基石，函授生必須切实地記住它。

为了更好地用这个表，讓我們先来导出不定积分的兩个性質

性質Ⅰ.　常数因子可以提到不定积分的符号外面。

事实上，設 $f(x)$ 有原函数，k为一常数，对$kf(x)$ 的不定积分

$$\int kf(x)dx$$

的导数$\left[\int kf(x)dx\right]'$，根据积分法与微分法为互逆运算，有