



数学与科学史丛书

名誉主编 吴文俊

丛书主编 曲安京

从博弈问题到方法论学科

——概率论发展史研究

◎ 徐传胜/著



科学出版社

www.sciencep.com



数学与科学史丛书

从博弈问题到方法论学科 ——概率论发展史研究

徐传胜 著

山东省社会科学规划研究项目

陕西省重点学科资助项目

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是国内首部全面讨论概率论发展与先进数学技术的学术专著,较全面、翔实地概述了概率论的发展历史。从最初的博弈分析问题到现今方法论综合性学科,全书勾勒出概率论兴起、发展和壮大的清晰脉络,并简要介绍了当前概率论学科的主要研究方向和发展动态。本书也试图从概率论教学角度诠释概率思想,以期让更多的读者从中受益。

本书适合概率论与数理统计工作者、科学技术史研究者、大学数学专业师生和科学哲学爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

从博弈问题到方法论学科:概率论发展史研究 / 徐传胜著.
—北京:科学出版社,2010.7

(数学与科学史丛书)

ISBN 978-7-03-027835-7

I. ①从… II. ①徐… III. ①概率论—数学史—研究
IV. ①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第103518号

丛书策划:孔国平 / 责任编辑:孔国平 郭勇斌 樊 飞 王国华
责任校对:郑金红 / 责任印制:赵德静 / 封面设计:陈 敬

编辑部电话:010-64035853

E-mail: houjunlin@mail.sciencep.com

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2010年7月第一版 开本:850×1168 1/32

2010年7月第一次印刷 印张:12

印数:1—2 500 字数:278 000

定价:42.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

总 序

中华民族正濒临伟大复兴的前夕，科学技术是第一生产力，科技力量的强大无疑是实现民族复兴的决定性关键因素。

中国科学技术源远流长，在历史上众多方面有无数量重大贡献，绝非仅仅是通过丝绸之路传至西方的所谓“四大发明”而已。由于本人是数学工作者，试就中国古代对数学的贡献略志数语如下。

提起数学，我们通常会想到古希腊欧几里得逻辑推理的演绎体系与相应的定理证明。在它的影响下，形成了绚丽多彩的现代数学。古希腊对数学的这种影响与成就，自然是不可磨灭而应该为国人所向往与虚心学习的。

与欧几里得体系不同，中国古代的数学家重视实际问题的解决，由此自然导致多项式方程（组）的求解与相应算法的发现。对方程研究的不断深化，也逐步导致正负数、分数即有理数、（开方型）无理数，以及不尽小数即一般无理数的引入及其计算与极限等规律的发现。这在公元 263 年刘徽的《九章算术注》中即已完成。而在欧洲，则直至 19 世纪 Weierstrass 与 Cantor 等时代，才以繁复而不甚自然的形式实现了实数系统的完成，其中还出现过所谓的数学危机。

不仅如此，我国宋元时期天元概念的引入与天元术的创立，其成就之一是导致解多变量多项式方程组的一般思路与具体方法。20 世纪 70 年代我国的数学家们正是由于研习中国古代数学的启发，建立了解多项式方程

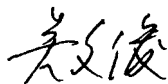
组的一般方法，并由此创立了数学的机械化体系，取得从理论以至实际的多方面应用。特别是成功地应用于（初等与微分）几何定理的机器证明，为计算机时代脑力劳动的机械化开其先河。这不能不归功于中国古代数学所蕴含的思想与方法的深邃内容。

在科学、技术，以至医药、农牧业、地理与制图、水利、工程与机械制造等诸多方面，中国古代也有着辉煌的成就。试以天文学为例，我国是天文学发达最早的国家之一，早在新石器时代中期，我们的祖先已开始观天象，并用以定方位、定时间、定季节。我国历代都有历法，相传黄帝时代即已有之。不仅如此，历代还设置观察天文现象的专职官吏，传说颛顼时代就已有“火正”的官。

由于制历与天象观察都需要数学的帮助，因而中国古代数学的许多成就往往散见于历代的天文历法与有关著作之中。例如，有着悠久发展历史的招差术，主要见于历代的历法之中，在元代历法中实际上已有接近于微积分中麦克劳林级数的内容。

本丛书主编曲安京教授是天文学史方面有突出贡献的著名专家，中国古代天文成就的详情可参看本丛书中曲安京所著《中国历法与数学》和《中国数理天文学》两书。至于其他方面，可参阅李约瑟的《中国科学技术史》及国内出版介绍中国科学技术史的有关著作。

聊志数语，以贺本丛书在曲安京教授的精心策划之下，取得巨大的成功。



2005年12月22日

前 言

概率论自 1654 年创立以来,已由最初的博弈分析问题发展成为现今的方法论综合性学科。作为科学探索的特色方法,概率推理以其显著功效引发了概率理论在科学研究中的爆炸性增长。尤其是近 10 多年来,概率论与其他学科不断交叉融合而形成了一些新的学科分支和增长点,这从 ICM^① 报告中可略见一斑。在 ICM2002, 20 个 1 小时报告中有 6 个涉及概率论, 19 组 45 分钟的报告有 9 组与概率论相关。而在 ICM2006, 与概率论有关的报告有增无减, 特别在 4 位菲尔兹 (Fields) 奖得主中, 至少有 2 位的工作直接与概率论相关。这充分说明, 概率论学科不仅汇入了数学主流, 且逐步走向数学前沿而引领数学科学的发展。

从认识论角度看, 概率论为数学及其他科学提供了观测和研究的新角度、新观点。许多数学的概念、技巧和方法, 晦涩难懂, 不好理解, 但尝试用概率论的某些概念来解读和诠释, 就会有新的感悟和启迪。例如, 测度是一种泛函, 而在概率论中测度是分布, 分布是物理直观的统计性质, 这样就可利用统计观点理解抽象的泛函性质, 因为泛函分析中的不少概念都可在概率论中找到对应; 概率论可用很直观的语言表述位势, 并给出其解的形式, 因而可用概率论方法求解偏微分方程; 概率空间对理解物理现象有着重要意义, 而且一旦概率空间确定, 概率论就不再纠缠于哲学或实用的双重思辨。令人惊叹的是, 概率论不仅研究随机现象, 也研究确定性数学, 且有时比确定性数学更精细。现今越来越多的数学家利用概率论的观点和技术解决传统数学中的一些问题, 如陈木法院士利用耦合技巧解决了一系列的特征值估计问题。

① 国际数学家大会 (International Congress of Mathematicians)。

科学史发展表明：概率思想是统计学的理论基础，是物理学、遗传学和信息论的重要工具，是金融学、地球科学、神经学、人工智能和通信网络等学科的常用方法。故概率论既是一门核心数学学科，更是观测世界的一种基本方法。虽然概率的物理概念似乎清楚而直观，但并不易于理解和公式化，概率思想及其演化过程较为微妙，直至今天概率的定义尚存在争议。因此，对概率思想的研究现已成为数学家和数学史家关注的热点之一。

1. 近代概率论史研究

英国数学家、数学教育家、数学史家艾萨克·托德亨特^①（Isaac Todhunter, 1820 ~ 1884）于1865年出版的《概率的数学理论发展史——从帕斯卡至拉普拉斯时代》（*A History of the Mathematical Theory of Probability from the Times of Pascal to That of Laplace*）是系统研究概率论史的第一部著作。该书讨论了从帕斯卡（B. Pascal, 1623 ~ 1662）时代到拉普拉斯（Pierre-Simon Marquis de Laplace, 1749 ~ 1827）时代的几乎所有概率学者的论著，对相关论文、著作进行了翻译、校对、整理和注释等工作。^②

英国统计学家卡尔·皮尔逊^③（Karl Pearson, 1857 ~ 1936）的著作《理性、科学和宗教思想发展中的17和18世纪的统计学》（*The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries against the Changing Background of Intellectual, Scientific, and Religious Thought*）首次从社会文化背景考察了概率论和统计学的发展史。

① 托德亨特主张在数学课程中把《几何原本》放在中心位置，所编写的《代数》和《欧几里得》再版达15次以上。他对变分法也有所研究，其关于间断解理论的论文曾获得英国皇家学会的1871年亚当斯（Adams）奖。

② Todhunter I. A History of the Mathematical Theory of Probability from the Times of Pascal to That of Laplace. Cambridge and London: Macmillan, 1865; New York: Chelsea, 1993.

③ 皮尔逊认为，托德亨特太专注于代数问题而忽视了历史上重大事件对学科发展所产生的影响。他还建议，为避免变得陈腐，大学教师应每年开设一门从未讲授过的课程。

美国芝加哥大学统计系教授斯蒂格勒 (S. M. Stigler) 于 1986 年出版的著作《1900 年前的统计学发展: 不确定性的测量》(*The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*) 研究了 1900 年以前的统计学工作^①。

哥本哈根大学理论统计系教授、丹麦统计史学家安德斯·赫德 (Anders Hald) 出版了其概率论研究的姊妹篇《1750 年前概率论与数理统计的应用和发展史》(*A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*)^② 和《1750 ~ 1930 年的数理统计学发展史》(*A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*)^③。这部达 1300 页的宏著, 对 16 世纪至 20 世纪初概率论和数理统计所发生的重大理论变革做了研究。

《概率论的创立》(*The Emergence of Probability*)^④ 由加拿大多伦多大学的哲学教授哈金 (Ian Hacking) 所著, 该书对数学概率论概念的建立过程进行了较为详尽的探讨。

戴尔 (Andrew I. Dale) 是南非 Natal 大学教授, 他以逆概率思想为主线, 对几十位概率学者工作进行了研究, 出版了《逆概率的历史: 从托马斯·贝叶斯到卡尔·皮尔逊》(*A History of Inverse Probability: from Thomas Bayes to Karl Pearson*)^⑤。该书引用了大量拉丁文、法语等原始文献, 使读者感到有些困难。

苏联数学家科尔莫戈罗夫 (А. Н. Колмогоров, 1903 ~ 1987 年) 和苏联数学史家尤什克维奇 (А. П. Юшкевич, 1906 ~ 1993) 的宏著《19 世纪的数学》(*Mathematics of the 19th*

① Stigler S. M. *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

② Hald A. *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York: Wiley, 1990.

③ Hald A. *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York: Wiley, 1998.

④ Hacking I. *The Emergence of Probability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

⑤ Dale A. I. *A History of Inverse Probability: from Thomas Bayes to Karl Pearson*. New York: Springer-Verlag, 1991.

Century) 讨论了圣彼得堡数学学派对概率论的卓越贡献。

格涅坚科 (Б. В. Гнеденко, 1912 ~ 1995) 的著作《俄罗斯的概率论发展史》(*Развитие Теории Вероятностей в России*)^①、什托卡洛 (И. З. Штокало) 的《祖国数学史》(*История Отечественной Математики*)^② 和尤什克维奇的著作《1917 年前的俄罗斯数学史》(*История Русской Математики перед 1917*) 对圣彼得堡数学学派成员的概率思想进行了一定的研究和论述。舍伊宁 (O. B. Sheynin) 研究了布尼亚可夫斯基 (В. Я. Буныковский, 1804 ~ 1889) 和马尔可夫 (А. А. Markov, 1856 ~ 1922) 对概率论的贡献^③, 而欧卡·舍伊宁 (Oscar Sheynin) 研究了切比雪夫 (P. L. Chebyshev, 1821 ~ 1894) 的概率讲义, 他们从纯数学的角度探讨了圣彼得堡数学学派成员对一些概率问题的解决方案。

我国最早的概率论著作是华衡芳 (1833 ~ 1902) 和英国传教士傅兰雅 (John Fryer, 1839 ~ 1928) 的译著《决疑数学》, 严敦杰 (1917 ~ 1988)、郭世荣和王幼军等已对其做了出色的考证研究。吴文俊院士主编的《世界著名数学家传记》收录了帕斯卡、费马 (P. de Fermat, 1601 ~ 1665)、雅各布·伯努利 (Jacob Bernoulli, 1654 ~ 1705)、丹尼尔·伯努利 (Daniel Bernoulli, 1700 ~ 1782)、切比雪夫和马尔可夫等, 对他们的生平及主要数学贡献做了简要介绍。李文林先生主编的《数学珍宝——历史文献

① Гнеденко Б. В. Развитие Теории Вероятностей в России. Москва: Издательство Академии Наук СССР, 1948.

② Штокало И. З. История Отечественной Математики. Киев: Издательство Наукова Думка, 1967.

③ 尤什克维奇 1960 年当选为国际科学史研究院院士, 1965 ~ 1968 年任该学院院长。舍伊宁 1994 年当选为院士。科尔莫戈罗夫 1977 年被选为名誉院士, 什托卡洛 1978 年被选为名誉院士。国际科学史研究院的总部设在巴黎, 所有院士都享有终身称号, 其出版刊物为《科学史档案》(*Archeion Archivio Storico Della Scienza*), 而从 1947 年 11 月又推出该杂志的新系列《国际科学史档案》(*Archives Internationales d'Histoire des Sciences—Nouvelle série d' Archeion*)。

精选》收录并翻译了帕斯卡与费马的《关于概率论的通信》、雅各布·伯努利的《论大数定理》、拉普拉斯的《分析概率论》绪论、切比雪夫的《论均值与一般大数定理》等文章。王幼军在2007年出版了《拉普拉斯概率理论的历史研究》。

概率论诞生于西方，资料限制和文化背景的差异使得国内学者对概率思想发展史的研究尚处于起步阶段，已有研究成果大多没有真正掌握概率论学科背后的文化传统和思想基础，普遍缺乏对“史”的反思，这就给准确理解概率思想制造了很大障碍。数学史的结论是以可靠史料与科学分析为基础的。正如吴文俊院士所倡导的“古证复原”思想：一切应在幸存至今的原著基础上得出，所有结论应利用古人当时的知识、辅助工具和惯用推理方法而得出。

2. 本书特色

对近现代概率思想史的研究，不仅需要搞清楚历史上的概率论是如何创造出来的，还需要扩展到概率论的历史，把概率论史上的“点”连成“线”，对数学家为什么要创造那些新的概率思想方法进行深入研究。^①在研读相关概率论原始文献的基础上，笔者通过分析相关概率思想发展的研究资料，对其演化过程进行了较为系统的探讨。本书主要特色为：

(1) 研究模式新颖，以“为什么概率”为切入点。相关研究大多注重于讨论概率论学者的研究成果，尚未从“为什么”的角度，对问题进行系统考察和分析。审视概率思想的数学文化和社会文化背景，可对概率论的众多不同方面形成整合观念，有助于理解数学与文学、艺术、政治、经济、伦理、宗教等诸多领域间的联系。

(2) 采用综合研究分析方法，对相关概率思想的发展进行

^① 曲安京：中国数学史研究范式的转换，中国科技史杂志，2005，26（1）：50～58。

纵向和横向比较。运用内史和外史相结合、学派整体和数学家相结合、史料和比较相结合、概率思想和文化背景相结合等方法探讨了数学家对概率论所作贡献及其概率思想的演化过程。

(3) 注重学科间的交叉和融合, 讨论了相关概率思想与哲学及其他相关学科的联系。哲学的三大要素(量和质的转化、对立的相互渗透、否定之否定)都蕴含着随机数学思想, 偶然性和必然性、规律和因果关系等在古代已列入哲学家的研究议程。试图从概率论哲学视角揭示概率思想的发展轨迹, 展示概率论与其他学科相结合的理论意义。

(4) 注重提炼概率思想的教育价值。通过 20 多年的概率论课程教学实践, 笔者深刻体会到概率文化在教学中的价值, 仅讲授“枯燥无味的概率公式”和“难以理解的定理”与通过鲜活事例而赋予概率公式生命的传授其教学效果是截然不同的。本书试图从概率论教学角度诠释概率思想, 以期让更多的读者从中受益。

3. 本书主要内容

概率论的发展虽源于多种因素, 但总脱离不了先进的数学技术。从数学技术角度分析, 概率论可划分为四个发展阶段:

(1) 萌芽时期(远古至 1653 年), 以计数为工具, 研究赌博和占卜中的一些问题。

(2) 古典概率论(1654 ~ 1811 年), 以代数分析方法、组合方法为研究工具, 主要研究离散型随机变量。

(3) 分析概率论(1812 ~ 1932 年), 以特征函数、微分方程、差分方程等为研究工具, 主要研究连续型随机变量。

(4) 现代概率论(1933 年至今), 以集合论和测度论为主要研究工具, 概率论呈多元化发展趋势。

划时代的标志性著述为:

(1) 帕斯卡与费马关于概率论的通信。一般认为, 帕斯卡与费马的第三封通信标志着概率论的诞生。

(2) 拉普拉斯的《分析概率论》。该书系统总结了古典概率论的理论体系, 开创了概率论发展的新阶段, 实现了概率论由组合技巧向分析方法的过渡。

(3) 科尔莫戈罗夫的《概率论基础》。该书奠定了近代概率论的基础, 建立了概率论公理化体系, 使概率论从半物理性质的科学演化为严格的数学分支。

全书共分为 8 章。

第一章对概率论的形成和发展做了初步探讨, 主要论述了帕斯卡和费马的概率思想, 以及对惠更斯 (C. Huygens, 1629 ~ 1695) 《论赌博中的计算》的研究。

第二章论述了古典概率论的发展, 对雅各布·伯努利的《猜度术》、棣莫弗 (A. de Moivre, 1667 ~ 1754) 的《机会学说》, 以及贝叶斯 (Thomas Bayes, 1702 ~ 1761) 的逆概率思想进行了探讨。

第三章主要论述了拉普拉斯、泊松 (S. D. Poisson, 1781 ~ 1840)、比埃奈梅 (I. J. Bienayme, 1796 ~ 1878)、高斯 (C. F. Gauss, 1777 ~ 1855) 和勒让德 (A. M. Legendre, 1752 ~ 1833) 的概率思想及其对概率论学科发展的贡献。

第四章讨论了圣彼得堡数学学派对大数定理和中心极限定理理论的相关研究。

第五章论述了马尔可夫的概率思想及马尔可夫链的相关理论。

第六章讨论了概率论的公理化过程。科尔莫戈罗夫开创了现代概率论的新时代, 给出了第一个合理的概率论公理化体系。本章还论述了莫斯科概率论学派对概率论的其他贡献。

第七章考察了概率论在中国的传播和发展。对《决疑数学》、我国概率论与数理统计领域的先驱以及当代国内概率学者的研究动态等均做了一定的论述。

第八章论述了概率论发展的新时代。介绍了当前概率论的主要研究方向, 并讨论了概率论学科与其他一些相关学科的交叉融合及其广泛应用性。

4. 致谢

在本书的撰写过程中，得到西北大学曲安京教授的大力支持和耐心指导。能够忝列在先生门下，是我莫大的荣幸。曲安京先生是我的博士生导师，其做事风格和做人原则无不体现着大家风范。先生不远万里从异国他乡给我带回了大量参考资料，对我的学习生活也提供了多方面的关照。本书的框架构成、定稿乃至参考文献的格式等，每个环节都渗透着先生的心血。

在北京查询资料期间，得到中国科学院数学与系统科学研究院李文林研究员的大力支持。李文林先生对本书的撰写给予了许多创造性建议，作者借此机会向李文林先生致以崇高的敬意和深深的感激。

内蒙古师范大学的罗见今教授，河北师范大学的邓明立教授，西北大学的姚远编审、杨宝珊博士、袁敏博士、吕建荣博士和赵继伟博士，曲阜师范大学的陆书环教授、冯振举博士，临沂师范学院的鲁运庚教授、王明琦博士、傅尊伟博士等都对本书提出了一些中肯的建议，使作者获益匪浅。谨向所有关心支持和帮助过作者的各位师长、同窗和友人致以衷心的感谢，对于他们的一贯扶植，作者铭记终生。

还要感谢我的妻子于瑞珍和女儿徐洁，没有她们的支持，本书是不可能付梓的。

本书的出版得到山东省社会科学规划研究项目（项目编号：08JDC125）的资助。向为本书出版付出辛勤劳动的郭勇斌、樊飞等编辑表示谢意！向山东省社会科学规划办公室的同志表示谢意！特别感谢参考文献的各位作者，他们为本书提供了丰富的史料。

由于写作时间有限，书中定有不少不足之处，恳请方家斧正。

作 者

2009 年 11 月

目 录

总序	吴文俊 (i)
前言	(iii)
第一章 概率论的创立	(1)
第一节 从投掷问题到概率论的创立	(1)
一、骰子与概率论萌芽	(2)
二、点数问题与概率论孕育	(4)
三、概率论的创立	(10)
第二节 惠更斯与概率论的奠基	(18)
一、数学文化背景	(19)
二、惠更斯的 14 个概率命题	(20)
三、惠更斯的 5 个概率问题	(29)
四、历史地位及科学评价	(33)
第二章 古典概率论的发展	(35)
第一节 雅各布·伯努利的《猜度术》研究	(35)
一、《猜度术》的整理	(35)
二、系统化概率知识	(38)
三、引进伯努利数	(40)
四、创立大数定理	(41)
五、其他观点和不足	(44)
第二节 棣莫弗与正态概率曲线	(46)
一、数学文化背景	(47)
二、正态概率曲线的发现过程	(47)
三、科学历史评价	(54)

第三节 托马斯·贝叶斯及其逆概率论思想	(56)
一、数学文化背景	(57)
二、“机会学说中一个问题的解”的内容分析	(58)
三、无穷级数研究及其他数学贡献	(65)
四、结束语	(70)
第四节 俄罗斯早期概率文化	(70)
一、尼古拉·伯努利第二和圣彼得堡悖论	(71)
二、丹尼尔和道德期望	(72)
三、欧拉对概率论的贡献	(74)
第三章 分析概率论的发展(上)	(77)
第一节 拉普拉斯的《分析概率论》研究	(77)
一、《分析概率论》的主要内容	(78)
二、拉普拉斯的概率思想	(84)
第二节 泊松概率思想研究	(99)
一、泊松大数定理	(99)
二、泊松分布	(106)
三、积分极限定理	(108)
四、几种概率分布	(110)
第三节 柯西对概率论的贡献	(111)
第四节 比埃奈梅对概率论的研究	(114)
一、比埃奈梅的主要贡献	(114)
二、比埃奈梅的统计模型	(117)
三、比埃奈梅对极限定理的研究	(118)
第五节 凯特勒的正态拟合	(120)
一、发现统计规律	(121)
二、大数定理应用于社会科学	(123)
三、正态分布的拟合	(125)
第六节 最小二乘法 and 正态分布	(127)
一、先驱者的相关研究	(127)

二、勒让德创立最小二乘法	(129)
三、随机误差的早期研究	(131)
四、高斯和正态分布	(132)
第四章 分析概率论的发展 (下)	(136)
第一节 古典概率思想在俄罗斯的传播和发展	(136)
一、俄罗斯概率论先驱	(137)
二、圣彼得堡数学学派对古典概率思想的继承和发展	(144)
第二节 圣彼得堡数学学派对大数定理理论的发展	(159)
一、对伯努利大数定理的研究	(160)
二、对泊松大数定理的研究	(163)
三、切比雪夫大数定理	(165)
四、马尔可夫大数定理	(180)
五、伯恩斯坦大数定理	(184)
第三节 圣彼得堡数学学派的中心极限定理思想研究	(186)
一、整数值随机变量序列的中心极限定理证明	(187)
二、中心极限定理的矩方法证明	(190)
三、李雅普诺夫定理	(198)
四、关于中心极限定理的辩论	(207)
五、伯恩斯坦对中心极限定理的研究	(217)
第五章 概率论的公理化	(221)
第一节 概率论公理化早期研究	(221)
第二节 科尔莫戈罗夫的公理化理论	(226)
第三节 莫斯科概率学派对概率论的其他贡献	(232)
一、现代概率论开拓者	(232)
二、概率极限理论的发展	(236)
三、随机过程的发展	(243)
第六章 马尔可夫链的创立及应用	(250)
第一节 马尔可夫的科学研究特色	(251)

一、教育背景和教育特色	(251)
二、科学研究特色	(254)
第二节 马尔可夫的《概率演算》	(257)
一、《概率演算》的特点	(258)
二、唯物主义者的战斗檄文	(262)
第三节 马尔可夫链理论及其应用	(265)
一、马尔可夫链的定义	(265)
二、“瓮中取球”的马尔可夫链模型	(267)
三、马尔可夫链的遍历性研究	(269)
四、马尔可夫链的极限定理研究	(276)
五、马尔可夫链的应用研究	(279)
第七章 概率论在中国的传播和发展	(288)
第一节 中国第一部概率论著作	(290)
第二节 许宝騄对概率论和数理统计的贡献	(293)
一、建设概率统计学科	(294)
二、加强强大数定理	(295)
三、改进中心极限定理	(297)
四、涉足统计推断领域	(300)
五、推动多元分析发展	(302)
第三节 当代概率学者的研究动态	(304)
一、王梓坤对马尔可夫过程的研究	(304)
二、马尔可夫过程北京学派	(305)
三、严加安对概率论的研究	(306)
四、马志明对概率论的贡献	(307)
五、陈希孺对数理统计学的研究	(307)
六、侯振挺对马尔可夫过程的研究	(308)
第八章 概率论发展的新时代	(309)
第一节 现代概率论的主要研究方向	(311)
一、随机分析	(311)