历经17次修订，经2978683名考生证明的考研成功首选品牌！

FOCUS 聚焦图书
中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学复习指南

市面上唯一一本由陈文灯、黄先开教授亲自执笔的全程辅导用书

涵盖文登培训课堂讲义全部精华

课后习题答案详解

（经济类）

让你的投资更超值：

附赠2010年考研真题及答案详解及价值60元的文登网校课程

ISBN 978-7-5062-5213-3
9 787506 252133 >
全套定价：53.80元

目　　录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

一、填空题

1.【解】可得 $e^a = \int_{-\infty}^{a} te^t \mathrm{d}t = (te^t - e^t)\Big|_{-\infty}^{a} = ae^a - e^a$，所以 $a = 2$.

2.【解】$\dfrac{1}{n^2+n+n} + \dfrac{2}{n^2+n+n} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}$

$< \dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n} < \dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+1}$

所以 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < \dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n} < \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} \to \frac{1}{2},\ (n \to \infty)$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1} \to \frac{1}{2},\ (n \to \infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

3.【解】因为 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} = c \neq 0$，所以 $b = 0$. 按洛必达法则

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{a - \cos x}{x^3/x}$$

$$\xlongequal{\text{所以 } a = 1} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} = c \neq 0.$$

所以 $b = 0,\ a = 1,\ c = \dfrac{1}{2}$.

4.【解】$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h} = -\dfrac{1}{2}f'(3) = -1$.

5.【解】$f[f(x)] = 1$.

6.【解】$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + 3\sqrt{n} - n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2$.

7.【解】$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) + a\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) + a\cos x}{1} = f'(0) + a = b + a = A$.

8. 【解】$0 \neq k = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + bxe^x - 1 - ax}{x^3(1+bx)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + bxe^x - 1 - ax}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + bxe^x + be^x - a}{3x^2} \xlongequal{\text{所以 } b+1=a} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + 2be^x + bxe^x}{6x}.$

所以 $2b + 1 = 0$，$b = -\dfrac{1}{2}$，$a = \dfrac{1}{2}$.

9. 【解】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$.

10. 【解】$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{1990}}{n^k - (n-1)^k} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{1990}}{kn^{k-1} + \cdots} = A$,

所以 $k - 1 = 1990$，$k = 1991$；$\dfrac{1}{k} = A, A = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{1991}$.

二、选择题

1. 【解】A 反例 $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$，$f(x) = 1$，则 $\varphi[f(x)] = 1$；

B 反例 $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$，$[\varphi(x)]^2 = 1$；

C 反例 $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$，$f(x) = 1$，则 $f[\varphi(x)] = 1$；

D反设 $g(x) = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $(-\infty\ +\infty)$ 内连续，则 $\varphi(x) = g(x)f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，矛盾. 所以 D 是答案.

2. 【解】B 是答案.

3. 【解】$\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$，$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$，所以 D 为答案.

4. 【解】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x (e^{t^2} - 1)\mathrm{d}t}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} 2x}{2} = 0 = f(0) = a$，所以 A 为答案.

5. 【解】$\lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{3}{1^2 \times 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \times 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2 \times (n+1)^2} \right]$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} \right] = \lim\limits_{n \to \infty} \left[1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} \right] = 1$，所以 B 为答案.

6. 【解】$8 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^{95}/x^{95}(ax+1)^5/x^5}{(x^2+1)^{50}/x^{100}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1+1/x)^{95}(a+1/x)^5}{(1+1/x^2)^{50}} = a^5$，$a = \sqrt[5]{8}$，所以 C 为答案.

7. 【解】C 为答案.

8. 【解】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{1} = \ln 2 + \ln 3$，所以 B 为答案.

9. 【解】$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)(1+2x)(1+3x) + a = 0$，$1 + a = 0$，$a = -1$，所以 A 为答案.

10.【解】$2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{a}{\cos^2x}+b\sin x}{\dfrac{-2c}{1-2x}+2xde^{-x^2}}=-\dfrac{a}{2c}$，所以 $a=-4c$，所以 D 为答案.

三、计算题

1. (1)【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^1=e.$

(2)【解】$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x-\sin x}{1}}=e^2.$

(3)【解】令 $y=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to0}(\sin2y+\cos y)^{\frac{1}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin2y+\cos y-1}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{2\cos2y-\sin y}{1}}=e^2.$$

(4)【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}.$

2. (1)【解】当 $x\to1$ 时，$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}\sim2\sqrt[3]{x^2-1}$. 按照等价无穷小代换 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$

(2)【解】方法 1：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-(x^2+1)\cos^2x}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{-2x\cos^2x+2(x^2+1)\cos x\sin x}{4x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x\cos^2x+\sin2x}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2x+4x\cos x\sin x+2\cos2x}{12x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2x+2\cos2x}{12x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x\sin x-4\sin2x}{24x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin2x}{24x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

方法 2：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-(x^2+1)\cos^2x}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(\cos2x+1)}{x^4}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)}{x^4}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \frac{1}{2}(2x^2 - 2x^4 + 2 - 2x^2 + \frac{16}{24}x^4 + o(x^4))}{x^4} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4} = \frac{2}{3}.$$

(3) **【解】** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x \cdot \sqrt{1-x^2})}{\tan x \ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x \cdot \sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cos x}\left(-\sqrt{1-x^2}\sin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x\right)}{2x}$$

(5)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0.\end{cases}$

(6)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \xlongequal{x=1/n,c=b/a} a\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1+c^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1+c^x}{2}-1\right)\frac{1}{x}}=ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+c^x-2}{2x}}=ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{c^x\ln c}{2}}=ae^{\frac{\ln c}{2}}=a\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt{ab}.$

四、【解】$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\,dt-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,dt-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x^2-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-2x\sin x^2}{2}=0,$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2-2\cos x-x^2}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\cos x-2}{6x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2\sin x}{6}=0,$

所以 $f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在($x=0$ 处) 可导，所以 $f(x)$ 在($x=0$ 处) 连续.

五、1.【解】$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$，

所以 $x=0$ 为第一类间断点.

2.【解】$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=\begin{cases}-x & |x|\geqslant1\\ x & |x|<1\end{cases}$

显然 $f(1+0)=-1,f(1-0)=1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点；

$f(-1+0)=-1,f(-1-0)=1$，所以 $x=-1$ 为第一类间断点.

3.【解】$f(+0)=-\sin1$，$f(-0)=0$. 所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点；

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在. 所以 $x=1$ 为第二类间断点；

$f(-\frac{\pi}{2})$ 不存在，而 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-k\pi-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\infty$，$(k=1,2,\cdots)$ 所以 $x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 为第二类无穷间断点.

六、【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{x^5}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}\xlongequal{\text{分子极限为 }0,b=-1}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3ax^2+1-e^{-x^2}}{5x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6a+2e^{-x^2}-4x^2e^{-x^2}}{60x^2}$

$\xlongequal{\text{分子极限为 }0,a=-\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-4xe^{-x^2}-8xe^{-x^2}+8x^3e^{-x^2}}{120x}=-\dfrac{1}{10}.$

七、【解】$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，要求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$ 存在. 所以

$\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]=0$. 所以

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x+\sin^2 x-(\alpha+\beta\sin x)^2}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\alpha^2)+(1-2\alpha\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x)}=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha}=1-\alpha$$

所以 $\alpha=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+\beta\sin x))}$$

上式极限存在，必须 $\beta=\dfrac{1}{2}$.

八、【解】上式极限存在，必须 $a=\dfrac{1}{5}$（否则极限一定为无穷）. 所以

$$\lim_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+7y+2y^5)^{\frac{1}{5}}-1}{y}$$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{5}(1+7y+2y^5)^{-\frac{4}{5}}(7+10y^4)=\dfrac{7}{5}$. 所以 $b=\dfrac{7}{5}$.

九、【解】当 $\alpha\leqslant 0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^\alpha\sin\dfrac{1}{x})$ 不存在，所以 $x=0$ 为第二类间断点；

当 $\alpha>0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^\alpha\sin\dfrac{1}{x})=0$，所以 $\beta=-1$ 时，在 $x=0$ 连续，$\beta\neq-1$ 时，$x=0$ 为第一类跳跃间断点.

十、【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$. 所以

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)\right)=0$. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，所以 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 所以 $f(0)=-3$. 因为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\frac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\dfrac{9}{2}$，将 $f(x)$ 泰勒展开，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)+3}{x^2}=\dfrac{9}{2}$，所以$\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{9}{2}$，于是 $f''(0)=9$.

第二章　导数与微分

一、填空题

1. **【解】**$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,dt=\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,dt-2x^2\cos x^4$.

2. **【解】**$f'(x)=\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\dfrac{(-1)^1 2\cdot 1!}{(1+x)^{1+1}}$，假设 $f^{(k)}=\dfrac{(-1)^k 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$，则

$f^{(k+1)}=\dfrac{(-1)^{k+1}2\cdot(k+1)!}{(1+x)^{k+1+1}}$，所以 $f^{(n)}=\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

3. **【解】**$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)'_t\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{2t\cos t-2\sin t}{4t^2}\dfrac{1}{2t}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

4. **【解】**$e^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin xy=0$，所以

$y'=\dfrac{y\sin xy-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin xy}$.

5. **【解】**由 $f(-x)=-f(x)$ 得 $-f'(-x)=-f'(x)$，所以 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(x_0)=f'(-x_0)=k$.

6. **【解】**$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-n\Delta x)}{\Delta x}$

$=m\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}+n\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-n\Delta x)-f(x_0)}{-n\Delta x}=(m+n)f'(x_0)$.

7. **【解】**$k\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，所以 $kf'(x_0)=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，

所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

8. **【解】**$-f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{1}{x}$，所以 $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{x^2}{2}$. 令 $x^2=2$，所以 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

9. **【解】**$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)]\cos\{f[\sin f(x)]\}$.

10. **【解】**上式二边求导 $e^{2x+y}(2+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$. 所以切线斜率

$k=y'(0)=-2$. 法线斜率为$\dfrac{1}{2}$，法线方程为

$y-1=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$.

二、选择题

1. **【解】**必要性：

$F'(0)$ 存在，所以 $F'(0^+)=F'(0^-)$，于是

$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x)-f(0))+f(x)\sin x}{x} = f'(0)+f(0),$$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(f(x)-f(0))-f(x)\sin x}{x} = f'(0)-f(0),$$

所以 $f'(0)+f(0) = f'(0)-f(0)$，$2f(0)=0$，$f(0)=0$.

充分性：

已知 $f(0)=0$，所以

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x)-f(0))+f(x)\sin x}{x} = f'(0)+f(0) = f'(0),$$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(f(x)-f(0))-f(x)\sin x}{x} = f'(0)-f(0) = f'(0),$$

所以 $F'(0)=f'(0)$ 存在. A 是答案.

2.【解】$F'(x) = f(e^{-x})(e^{-x})' - f(x) = -e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$. A 是答案.

3.【解】$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2![f(x)]^3$，假设 $f^{(k)}(x) = k![f(x)]^{k+1}$，所以 $f^{(k+1)}(x) = (k+1)k![f(x)]^k f'(x) = (k+1)![f(x)]^{k+2}$，按数学归纳法 $f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$ 对一切正整数成立. A 是答案.

4.【解】$b = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{a}f(1+x)-\frac{1}{a}f(1)}{x} = \dfrac{1}{a}f'(1)$，所以 $f'(1)=ab$. D 是答案

注：因为没有假设 $f(x)$ 可导，不能对于 $f(1+x)=af(x)$ 二边求导.

5.【解】$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & x\geqslant 0 \\ 2x^3 & x<0 \end{cases}$. $f''(x) = \begin{cases} 24x & x\geqslant 0 \\ 12x & x<0 \end{cases}$

$$f'''(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{24x-0}{x} = 24,$$

$$f'''(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{12x-0}{x} = 12,$$

所以 $n=2$，C 是答案.

6.【解】由微分定义 $\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x)$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. B 是答案.

7.【解】在 $x=0$ 处可导一定在 $x=0$ 处连续，所以

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)$，所以 $b=0$.

$f'(0^+) = f'(0^-)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ax}{x}$，所以 $0=a$. C 是答案.

8.【解】由 $f'(0)$ 存在可推出 A 中的极限值为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$，B 中的极限值为 $-f'(0)$，D 中的

极限值为 $f'(0)$，而 C 中的极限值为 0. 反之 A、C 中的极限值存在，不一定 $f'(0)$ 存在，举反例如下：$y = |x|$，排除 A、C. D 中的极限值存在，不一定 $f'(0)$ 存在，举反例如下：$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，排除 D. 所以 B 是答案. 由 B 推出 $f'(0)$ 存在证明如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \xlongequal{令 x=1-e^h} \lim_{h\to 0}\frac{1}{1-e^h}f(1-e^h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)\cdot\frac{h}{1-e^h}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h).$$

所以 $f'(0)$ 存在.

9.【解】A 不正确. 反例如下：$y = x$；B 不正确. 反例如下：$y = x^2$；C 不正确. 反例如下：$y = x$；D 是答案. 证明如下：反设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k \neq +\infty$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ 存在（k 为有限数）. 任取 x，在区间 $[x, x+1]$ 上用拉格朗日定理

$f(x+1) - f(x) = f'(\xi)\ (x < \xi < x+1)$

令 $x \to +\infty$，于是 $0 = +\infty$，矛盾. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

10.【解】A 反例：$f(x) = 0$，取 $a = 0$. 排除 A；C 反例：$f(x) = x^2+x+1$，取 $a = 0$. $f(0) = 1 > 0$，$f'(0) = 1 > 0$，$|f(x)| = f(x)$，在 $x = 0$ 可导. 排除 C；D 反例：$f(x) = -x^2 - x - 1$，取 $a = 0$. 排除 D；所以 B 是答案. 对于 B 证明如下：在 B 的条件下证明 $|f'(a)|$ 不存在.

不妨假设 $f'(a) > 0$. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}$. 所以存在 δ，当 $x \in (a-\delta, a+\delta)$ 时 $\dfrac{f(x)}{x-a} > 0$. 所以当 $x > a$ 时，$f(x) > 0$. 于是 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a} = f'(a)$. 当 $x < a$ 时 $f(x) < 0$. 于是 $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-f(x)}{x-a} = -f'(a)$. 所以 $|f'(a)|$ 不存在.

三、计算题

1.【解】$y' = \dfrac{-\sin(10+3x^2)\cdot 6x}{\cos(10+3x^2)} = -6x\tan(10+3x^2)$.

2.【解】$y' = f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]\cdot\dfrac{1}{x+\sqrt{a+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a+x^2}}\right)$

$$= \frac{f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]}{\sqrt{a+x^2}}.$$

3.【解】$e^{y^2}y' = 2x\cos x^2 + 2yy'\cos y^2$

$y' = \dfrac{2x\cos x^2}{e^{y^2} - 2y\cos y^2}$.

4.【解】$\dfrac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\dfrac{y'x-y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$

$x + yy' = y'x - y$，所以 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

5.【解】$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\cos t + e^t\sin t} = \dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-(\cos t+\sin t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t+\sin t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}.$$

6.【解】$dx=(2y+1)dy$，$du=\frac{3}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)dx$

$$\frac{(2y+1)dy}{du}=\frac{dx}{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+x}(2x+1)dx}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{2}{3(2y+1)\sqrt{x^2+x}(2x+1)}.$$

7.【解】$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(e^{3t}-1)3e^{3t}}{f'(t)}$，所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=3.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=3\frac{[f''(e^{3t}-1)3(e^{3t})^2+3e^{3t}f'(e^{3t}-1)]f'(t)-e^{3t}f'(e^{3t}-1)f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=3\frac{[3f''(0)+3f'(0)]f'(0)-f'(0)f''(0)}{[f'(0)]^3}=\frac{9f'(0)+6f''(0)}{[f'(0)]^2}.$

8.【解】$y_t'=-\frac{e^t}{e^y}=\frac{e^t}{e^t-2e}$. 所以$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\frac{e^t}{e^t-2e}}{e^t+te^t}=\frac{1}{(1+t)(e^t-2e)}$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-\frac{1}{2e}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1+t)(e^t-2e)}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{2e^t-2e+te^t}{(1+t)^3(e^t-2e)^2e^t},$$

所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\frac{1}{8e^2}$. 在 $t=1$ 的曲率为

$$k=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=1}=\frac{\frac{1}{8e^2}}{\left(1+\frac{1}{4e^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=e(1+4e^{-2})^{-\frac{3}{2}}.$$

四、【解】(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，所以

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=a,$$

所以 $\lim_{x\to0}(g(x)-\cos x)=0$，所以 $g(0)=\cos0=1$

(这说明条件 $g(0)=1$ 是多余的). 所以

$$a=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)+1-\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=g'(0)+0=g'(0).$$

(2) 方法 1：

$$f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x) - \cos x - ax}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \cos x - ax}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(\xi)x^2 - \cos x - ax}{x^2} \quad (0 < \xi < x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}g''(\xi)x^2 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}(g''(0) + 1)$$

所以 $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x[g'(x) + \sin x] - [g(x) - \cos x]}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}(g''(0) + 1) & x = 0 \end{cases}$

方法 2：

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x) - \cos x}{x} - a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x) - \cos x - ax}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \cos x - ax}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + \sin x - a}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) + \cos x}{2} = \frac{1}{2}(g''(0) + 1).$$

五、**【解】** $F(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$，所以 $c = f(-0) = f(0)$；因为 $F(x)$ 二阶可导，所以 $F'(x)$ 连续，所以 $b = f_-'(0) = f'(0)$，且

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \leqslant 0 \\ 2ax + f_-'(0) & x > 0 \end{cases}$$

$F''(0)$ 存在，所以 $F_-''(0) = F_+''(0)$，所以

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2ax + f_-'(0) - f'(0)}{x} = 2a$，所以

$a = \dfrac{1}{2}f''(0)$.

六、**【解】** $f(x) = -1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x}$,

$f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$,

$f^{(2k+1)}(0) = 0$，$k = 0, 1, 2, \cdots$

$f^{2k}(0) = n!$，$k = 0, 1, 2, \cdots$

七、**【解】** 使用莱布尼兹高阶导数公式

$$f^{(n)}(x) = x\cdot(\ln x)^{(n)} + n(\ln x)^{(n-1)} = x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + n(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$= (-1)^{n-2}(n-2)!\left[\frac{-(n-1)}{x^{n-1}} + \frac{n}{x^{n-1}}\right] = (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}},$$

所以 $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-2}(n-2)!$.

八、**【解】** $y' = 2\arcsin x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$y'' = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\arcsin x\left[-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right](-2x)$$

$$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

所以 $(1-x^2)y'' = 2 + xy'$.

将上式二边求 $n-1$ 阶导数. 按莱布尼兹公式

$$(1-x^2)(y'')^{(n-1)} + (1-x^2)'C_{n-1}^1(y'')^{(n-2)} + (1-x^2)''C_{n-1}^2(y'')^{(n-3)}$$

$$= x(y')^{(n-1)} + x'C_{n-1}^1(y')^{(n-2)}$$

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - 2x(n-1)y^{(n)} - 2\frac{(n-1)(n-2)}{2!}y^{(n-1)} = xy^{(n)} + (n-1)y^{(n-1)}$$

所以 $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} - (n-1)^2y^{(n-1)} = 0$.

第三章　不定积分

$$=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c.$$

2. **【解】** 令 $x=\tan t$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{\tan^4 t\sec t}=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t}-\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+c$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c.$$

3. **【解】** 令 $x=\tan t$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t}$$

$$=\arctan\sin t+c=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c.$$

4. **【解】** 令 $x=a\sin t$

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\mathrm{d}t}{a\cos t}=a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}a^2 t-\frac{1}{4}a^2\sin 2t+c$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+c.$$

5. **【解】** 令 $x=\sin t$

$$\int\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x=\int\cos^4 t\mathrm{d}t=\int\frac{(1+\cos 2t)^2}{4}\mathrm{d}t=\int\frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t+c$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin 2t(1+\frac{1}{4}\cos 2t)+c$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{4}2\sin t\cos t(\frac{4+1-2\sin^2 t}{4})+c$$

$$=\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(5-2x^2)+c.$$

6. **【解】** 令 $x=\frac{1}{t}$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令t=\sin u}-\int\sin u\cos^2 u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 u+c=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+c.$$

7. **【解】** 令 $x=\frac{1}{t}$

$$\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{t+1}{t}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$\xlongequal{\text{令 } t=\sin u} -\int \frac{\sin u+1}{\cos u}\cos u\,\mathrm{d}u = \cos u - u + c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin\frac{1}{x} + c.$

三、求下列不定积分：

1.【解】$\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}-e^{-x})^2+1} = \arctan(e^{x}-e^{-x})+c.$

2.【解】令 $t=2^x$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t\ln 2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x(1+4^x)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+t^2)\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{t\ln 2} - \frac{\arctan t}{\ln 2} + c$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}(2^{-x}+\arctan 2^x)+c.$$

四、1.【解】$\int \frac{x^5}{(x-2)^{100}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{99}\int x^5\,\mathrm{d}(x-2)^{-99} = -\frac{x^5}{99(x-2)^{99}} + \frac{5}{99}\int x^4(x-2)^{-99}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{x^5}{99(x-2)^{99}} - \frac{5x^4}{99\times 98(x-2)^{98}} + \frac{5\cdot 4}{99\cdot 98}\int x^3(x-2)^{-98}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x^5}{99(x-2)^{99}} - \frac{5x^4}{99\cdot 98(x-2)^{98}} - \frac{5\cdot 4x^3}{99\cdot 98\cdot 97(x-2)^{97}} - \frac{5\cdot 4\cdot 3x^2}{99\cdot 98\cdot 97\cdot 96(x-2)^{96}}$$

$$- \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}{99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95(x-2)^{95}} - \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95(x-2)^{94}} + c.$$

2.【解】$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^4}} \xlongequal{\text{令 } x=1/t} \int \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^4+1}{t^4}}} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}}$

$\xlongequal{\text{令 } t^2=\tan u} -\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 u}{\ldots}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln|\tan u+\sec u| + c = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{\ldots}$

$$= x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + c.$$

5.【解】$\int \dfrac{x\cos^4\dfrac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \dfrac{x\cos^4\dfrac{x}{2}}{8\sin^3\dfrac{x}{2}\cos^3\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int \dfrac{x\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}\dfrac{x}{2}$

$= -\dfrac{1}{4}\int x\csc\dfrac{x}{2}\mathrm{d}\csc\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{8}\int x\mathrm{d}\csc^2\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{8}x\csc^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}\int \csc^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{8}x\csc^2\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\cot\dfrac{x}{2} + c.$

六、1.【解】$\int \dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}\dfrac{1}{1-x^2}$

$= \dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$\xlongequal{\text{令 } x=\tan t} \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{1-\tan^2 t}\cdot\dfrac{1}{\sec t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$

$= \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{\cos t}{1-2\sin^2 t}\mathrm{d}t$

$= \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int \dfrac{\mathrm{d}\sqrt{2}\sin t}{1-2\sin^2 t}$

$= \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} + c$

$= \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x} + c.$

2.【解】$\int \dfrac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c.$

3.【解】$\int \dfrac{\arctan e^x}{e^{2x}}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int \arctan e^x\mathrm{d}e^{-2x} = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \dfrac{1}{2}\int e^{-2x}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{e^{-x}}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{e^x(1+e^{2x})}\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \dfrac{1}{2}\int (\dfrac{1}{e^x} - \dfrac{e^x}{1+e^{2x}})\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + c$

七、【解】$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int (x\ln(1+x^2) - 3)\mathrm{d}x \\ \int (x^2+2x-3)e^{-x}\mathrm{d}x \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2}[x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + c & x \geqslant 0 \\ -(x^2+4x+1)e^{-x} + c_1 & x < 0 \end{cases}$