

The background features a large, stylized 'M' in white on a black background, followed by 'ATLAB' in white on a red background. Below this, a large green circle with a black border and a yellow-orange gradient center is visible. The bottom left corner shows a stylized keyboard layout with various colored keys.

MATLAB

基于**MATLAB** 的小波分析应用

(第二版)

主编 周伟



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

基于 MATLAB 的小波分析应用

(第二版)

主 编 周 伟

副主编 张一鸣 桂 林 陈燕东 张 龙

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书详细介绍了使用 MATLAB 小波工具箱进行信号处理、图像处理、机械故障诊断、数字水印以及语音信号处理等方面的方法和技巧,最后介绍了在 Visual C++中使用 MATLAB 小波工具箱的方法。

与第一版相比,第二版采用了最新推出的 MATLAB R2008 小波分析工具箱,增加了对新增的小波函数、提升了小波功能和多信号小波的介绍,并且增加了 MATLAB 小波在数字水印、生物医学信号处理和矩阵方程求解等领域中的典型应用实例。

本书可供信号处理、图像处理、机械故障诊断、数字水印、语音/生物医学信号处理以及矩阵方程求解等领域中使用 MATLAB 小波技术的工程技术人员借鉴,同时也是理工科各专业高年级本科生、研究生学习小波分析必不可少的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

基于 MATLAB 的小波分析应用 / 周伟主编. —2 版. —西安: 西安电子科技大学出版社, 2010.6

ISBN 978-7-5606-2375-7

I. 基… II. 周… III. 小波分析—计算机辅助计算—软件包, MATLAB IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 239413 号

策 划 毛红兵

责任编辑 曹 昶

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西光大印务有限责任公司

版 次 2010 年 6 月第 2 版 2010 年 6 月第 2 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印 张 22.875

字 数 538 千字

印 数 4001~6000 册

定 价 33.00 元

ISBN 978-7-5606-2375-7/O · 0103

XDUP 2667002-2

如有印装问题可调换

本社图书封面为激光防伪覆膜, 谨防盗版。

前 言

目前小波分析在许多工程领域中都得到了广泛的应用,成为科技工作者经常使用的工具之一。MATLAB 作为一种高性能的数值计算和可视化软件,经过各个领域专家共同努力,现已包含信号处理、图像处理、通信、小波分析、系统辨识、优化以及控制系统等不同应用领域的工具箱。本书以 MATLAB R2008 中的小波分析工具箱为蓝本,结合工程实际中的各应用领域,由浅入深地讲解了如何应用 MATLAB 来实现小波分析。

本书各章内容安排如下:

第 1 章简要介绍了小波变换的基本理论。

第 2 章对 MATLAB 小波工具箱进行了简要介绍。

第 3 章介绍了 MATLAB 小波工具箱的图形用户接口。

第 4 章介绍了常用的小波变换函数和小波函数。

第 5 章讲述了 MATLAB 小波在信号处理中的应用,主要介绍了 MATLAB 小波在信号分解、信号重构、信号去噪、信号压缩、信号分析、信号检测和信号延拓 7 个方面的应用。

第 6 章讲述了 MATLAB 小波在图像处理中的应用,从图像分解、图像重构、图像去噪、图像压缩、图像增强、图像融合以及图像延拓等方面介绍了 MATLAB 小波在图像处理中的应用。

第 7 章介绍了 MATLAB 小波在机械故障诊断中的应用,重点以发动机故障诊断和齿轮故障诊断为例,从故障的机理以及小波的特点分析说明了 MATLAB 小波在机械故障诊断中的应用。

第 8 章介绍了 MATLAB 小波在数字水印中的应用。包括基于小波变换域的主要数字水印算法,以及 MATLAB 小波在数字水印中的应用实例。

第 9 章介绍了 MATLAB 小波在语音/生物医学信号处理中的应用,重点介绍了小波在语音信号增强中和语音信号压缩中的应用。

第 10 章介绍了 MATLAB 小波在矩阵方程求解中的应用。

第 11 章介绍了 MATLAB 提升小波变换及其应用,在介绍了 MATLAB 的提升小波变换函数后,介绍了提升小波变换在一维信号和二维信号处理中的应用。

第 12 章介绍了 MATLAB R2008 中新增的多信号小波分析及其应用。

第 13 章介绍了 Visual C++调用 MATLAB 小波实例。介绍了 VC 调用 MATLAB 函数的两种方法:VC 通过 MATLAB 引擎调用 MATLAB 函数以及 VC 调用 MATLAB 编译生成的

C/C++函数。

本书通过大量的实例对如何应用 MATLAB 进行小波分析进行讲解,力求图文并茂、深入浅出,具有很强的可操作性和可移植性。读者可以根据本书的内容迅速掌握 MATLAB R2008 小波分析工具箱的使用。

本书的例子代码均可在 <http://www.kylinx.com/books/matlabxb2/index.htm> 免费下载。

本书由周伟主编,参加本书编写工作的有张一鸣、桂林、陈燕东、张龙、吴石林、谭羽、刘晓东、李惠霞、胡春雷等。由于时间仓促以及作者本身水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请各位专家和广大读者批评指正。

编者

2010年3月

第一版前言

目前小波分析在许多工程领域中都得到了广泛的应用,成为科技工作者经常使用的工具之一。MATLAB 作为一种高性能的数值计算和可视化软件,经过各个领域专家的共同努力,现已包含信号处理、图像处理、通信、小波分析、系统辨识、优化以及控制系统等不同应用领域的工具箱。本书以 MATLAB 7.0 中的小波分析工具箱 3.0 为蓝本,结合工程实际中的各应用领域,由浅入深地讲解了如何应用 MATLAB 来实现小波分析。

与同类书籍相比,本书并没有过多拘泥于 MATLAB 小波分析工具箱中小波函数的介绍,而是更侧重于小波分析技术在具体工程实践中的应用。

本书各章内容安排如下:

第 1 章简要介绍了小波变换的基本理论。

第 2 章对 MATLAB 小波分析工具箱进行了简要介绍。

第 3 章介绍了 MATLAB 小波分析工具箱的图形用户接口。

第 4 章讲述了 MATLAB 小波在信号处理中的应用。主要介绍了 MATLAB 小波在信号分解、信号重构、信号去噪、信号压缩、信号分析和信号检测六个方面的应用。

第 5 章讲述了 MATLAB 小波在图像处理中的应用。从图像分解、图像重构、图像去噪、图像压缩、图像增强以及图像融合等方面介绍了 MATLAB 小波在图像处理中的应用。

第 6 章介绍了 MATLAB 小波在机械故障诊断中的应用。以发动机故障诊断和齿轮故障诊断为例,从故障的机理以及小波的特点重点分析了 MATLAB 小波在机械故障诊断中的应用。

第 7 章介绍了 MATLAB 小波在数字水印中的应用,包括基于小波变换域的主要数字水印算法,以及 MATLAB 小波在数字水印中的应用实例。

第 8 章介绍了 MATLAB 小波在语音信号处理中的应用。重点介绍了小波在语音信号增强和语音信号压缩中的应用。

第 9 章介绍了 MATLAB 提升小波变换及其应用。在介绍了 MATLAB 的提升小波变换函数后,介绍了提升小波变换在一维信号和二维信号处理中的应用。

第 10 章介绍了 Visual C++调用 MATLAB 小波实例。介绍了 VC 调用 MATLAB 函数的两种方法:VC 通过 MATLAB 引擎调用 MATLAB 函数以及 VC 调用 MATLAB 编译生成的 C/C++函数。

本书通过大量的实例对如何应用 MATLAB 进行小波分析进行了讲解,力求图文并茂、深入浅出,有很强的可操作性和可移植性。读者可以根据本书的内容迅速掌握 MATLAB 7.0 小波分析工具箱的使用。

本书的例子代码均可在 <http://interzym.nease.net/books/matlabxb/index.htm> 免费下载。

本书由周伟主编，参加本书编写工作的有周伟、桂林、周林、张家祥、韩超、王勇、阮坚、王鹏、邓强、高宏伟、刘东、张雄明、潘海龙、张晖、严虎等。

由于时间仓促以及作者本身水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请各位专家和广大读者批评指正。

编 者

2005 年 7 月

目 录

第 1 章 小波分析基础	1
1.1 小波变换的由来	1
1.2 Haar 小波	1
1.2.1 Haar 小波简介	2
1.2.2 基于 Haar 小波的信号分解与重构算法	3
1.3 一维连续小波变换	5
1.4 离散小波变换	7
1.5 多分辨分析与小波构造	8
1.6 小波包分析	10
第 2 章 MATLAB 小波工具箱简介	12
2.1 MATLAB 小波工具箱的小波分析函数	12
2.2 自定义小波函数	18
2.2.1 准备添加一个新的小波函数	18
2.2.2 添加一个新的小波函数	20
2.2.3 使用新的小波函数	23
2.3 面向对象设计方法	24
2.3.1 小波工具箱中的主要对象	25
2.3.2 对象的应用	29
第 3 章 小波图形用户接口	37
3.1 GUI 启动	37
3.2 GUI 主要特征	38
3.2.1 颜色设置	38
3.2.2 图形绘制的关联性	38
3.2.3 鼠标的使用	39
3.2.4 控制染色	40
3.2.5 控制颜色数目	40
3.2.6 控制染色模式	40
3.2.7 使用菜单	41
3.2.8 使用 View Axes 按钮	42
3.2.9 使用层次独立的阈值设置工具	44

3.3 一维小波分析.....	45
3.3.1 一维连续小波变换.....	45
3.3.2 一维连续复小波变换.....	46
3.3.3 一维离散小波变换.....	48
3.3.4 一维小波包变换.....	58
3.4 二维小波分析.....	62
3.4.1 二维离散小波变换.....	62
3.4.2 二维小波包变换.....	70
3.5 一维多信号小波分析.....	74
3.5.1 一维多信号分析.....	74
3.5.2 一维多变量去噪.....	80
3.5.3 多尺度主成分分析.....	83
3.6 小波构造.....	85
3.7 一维小波分析专用工具.....	87
3.7.1 一维平稳小波降噪.....	87
3.7.2 一维小波密度估计.....	90
3.7.3 一维回归估计.....	92
3.7.4 一维小波系数选择.....	95
3.7.5 一维 FBM 信号产生.....	98
3.8 二维小波分析专用工具.....	100
3.8.1 二维平稳小波降噪.....	100
3.8.2 二维小波系数选择.....	101
3.8.3 图像融合.....	103
3.9 小波显示.....	105
3.9.1 小波信息显示.....	105
3.9.2 小波包信息显示.....	107
3.10 延拓.....	109
3.10.1 信号延拓.....	109
3.10.2 图像延拓.....	111
第 4 章 小波变换函数和小波函数.....	113
4.1 小波变换函数.....	113
4.1.1 函数 biorfilt.....	113
4.1.2 函数 centfrq.....	114
4.1.3 函数 dyaddown.....	115
4.1.4 函数 dyadup.....	116
4.1.5 函数 intwave.....	118
4.1.6 函数 orthfilt.....	118
4.1.7 函数 qmf.....	120

4.1.8 函数 scal2frq	121
4.1.9 函数 wavefun	123
4.1.10 函数 wavefun2	124
4.1.11 函数 wavemngr	125
4.1.12 函数 wfilters	132
4.1.13 函数 wmaxlev	133
4.2 小波函数	134
4.2.1 函数 biorwavf	134
4.2.2 函数 cgauwavf	135
4.2.3 函数 cmorwavf	135
4.2.4 函数 coifwavf	136
4.2.5 函数 dbaux	137
4.2.6 函数 dbwavf	137
4.2.7 函数 fbspwavf	138
4.2.8 函数 gauwavf	138
4.2.9 函数 mexihat	139
4.2.10 函数 meyer	140
4.2.11 函数 morlet	141
4.2.12 函数 rbiowavf	141
4.2.13 函数 shanwavf	142
4.2.14 函数 symaux	143
4.2.15 函数 symwavf	143
第 5 章 小波变换与信号处理	145
5.1 信号分解	145
5.1.1 信号的连续小波分解	145
5.1.2 信号的离散小波分解	148
5.1.3 信号的平稳小波分解	151
5.1.4 信号的小波包分解	153
5.2 信号重构	155
5.2.1 信号的离散小波重构	155
5.2.2 信号的平稳小波重构	160
5.2.3 信号的小波包重构	161
5.3 信号去噪	163
5.3.1 信号的阈值去噪	163
5.3.2 小波去噪函数	166
5.3.3 信号去噪实例	170
5.4 信号压缩	173
5.4.1 信号压缩简述	173

5.4.2 信号压缩实例	173
5.5 信号分析	175
5.5.1 分离信号的不同成分	175
5.5.2 识别某一频率区间上的信号	178
5.5.3 识别信号的发展趋势	179
5.6 信号检测	181
5.6.1 检测信号的自相似性	181
5.6.2 信号奇异性检测	182
5.7 信号延拓	185
5.7.1 信号延拓函数	185
5.7.2 信号延拓实例	186
第6章 小波变换与图像处理	188
6.1 图像分解	188
6.1.1 图像的小波分解	188
6.1.2 图像的平稳小波分解	193
6.1.3 二维小波包分解	194
6.2 图像重构	196
6.2.1 图像的小波分解重构	196
6.2.2 图像的平稳小波重构	202
6.2.3 图像的小波包分解重构	203
6.3 图像去噪	204
6.3.1 图像阈值去噪函数	204
6.3.2 图像阈值去噪实例	205
6.4 图像压缩	208
6.4.1 图像压缩概述	208
6.4.2 图像压缩实例	209
6.5 图像增强	210
6.6 图像融合	211
6.6.1 图像融合概述	212
6.6.2 图像融合实例	212
6.7 图像延拓	214
第7章 小波变换与机械故障诊断	216
7.1 机械状态监测中的非平稳信号	216
7.2 发动机故障诊断	216
7.2.1 故障机理分析	217
7.2.2 故障检测方法	218
7.3 齿轮故障诊断	220

7.3.1 齿轮故障机理	220
7.3.2 齿轮点蚀	221
7.3.3 齿轮疲劳	225
第 8 章 小波变换与数字水印	229
8.1 数字水印技术概述	229
8.2 数字水印算法	229
8.2.1 空间域算法	230
8.2.2 变换域算法	231
8.2.3 压缩域算法	231
8.2.4 NEC 算法	232
8.2.5 生理模型算法	232
8.3 基于小波变换域的数字水印	232
8.3.1 基于小波变换域的数字水印简述	232
8.3.2 基于小波变换域的数字水印实例	234
第 9 章 小波变换与语音/生物医学信号处理	247
9.1 语音信号处理概述	247
9.2 基于小波的语音信号处理	247
9.2.1 小波在语音信号增强中的应用	248
9.2.2 小波在语音信号压缩中的应用	250
9.3 基于小波的生物医学信号处理	252
9.3.1 ECG 信号的构建仿真	252
9.3.2 基于小波变换的 ECG 信号压缩	258
9.3.3 基于小波变换的 EEG 信号多分辨率分析	260
第 10 章 小波变换与矩阵方程求解	263
10.1 小波变换快速求解矩阵方程	263
10.2 快速求解矩阵方程实例分析	265
第 11 章 提升小波变换及应用	269
11.1 提升小波变换概述	269
11.1.1 提升小波变换	269
11.1.2 提升小波逆变换	270
11.1.3 提升小波变换系数的提取或重构	271
11.2 提升小波变换应用实例	272
11.2.1 提升小波变换用于信号处理	272
11.2.2 提升小波变换用于图像处理	282

第 12 章 多信号小波分析及应用	293
12.1 一维多信号小波分析函数	293
12.1.1 一维多信号小波分解函数	293
12.1.2 一维多信号小波重构函数	295
12.1.3 一维多信号小波去噪函数	296
12.1.4 一维多信号小波压缩函数	299
12.2 一维多信号小波分析实例	301
12.2.1 一维多信号小波分解实例	301
12.2.2 一维多信号小波重构实例	307
12.2.3 一维多信号小波去噪实例	308
12.2.4 一维多信号小波压缩实例	311
第 13 章 在 VC 环境中使用小波工具箱	315
13.1 VC 调用 MATLAB 引擎	315
13.1.1 引擎库函数	315
13.1.2 mx-函数	317
13.1.3 VC 调用 MATLAB 引擎的设置	322
13.1.4 实例: 小波去噪	325
13.2 VC 调用 MATLAB 的 C/C++ 函数	329
13.2.1 设置	329
13.2.2 实例: 信号的小波分解与重构	330
附录 小波分析工具箱函数	338
FL.1 小波包算法	338
FL.2 树管理	341
FL.3 提升小波变换	350
参考文献	354

第1章 小波分析基础

目前,小波变换在许多工程领域中都得到了广泛的应用,成为科技工作者经常使用的工具之一。本章将对小波变换的基本概念进行简要的介绍。

1.1 小波变换的由来

自从1822年傅里叶发表“热传导解析理论”以来,傅里叶变换一直是传统的信号处理的基本方法。傅里叶变换的基本思想是将信号分解成许多不同频率的正弦波的叠加,即将信号从时间域转换到频率域。

傅里叶变换能够满足大多数应用的需求,但是由于傅里叶变换在转换时丢掉了时间信息,因此无法对某一时间段的频域信息或者某一频率段所对应的时间信息进行分析。即傅里叶变换具有最高的频域分辨率,但不具有时域分辨率。

傅里叶变换的这种特性在分析非平稳性信号时,表现出严重的不足。然而实际中的信号均包含大量的非平稳成分,例如偏移、趋势、突变等,它们往往反映了信号的重要特征。因此需要寻求同时具有时间分辨率和频域分辨力的分析方法。

为了研究信号在局部时间的频域特征,1946年Gabor提出了著名的Gabor变换,之后发展成为短时傅里叶变换(Short Time Fourier Transform, STFT)。其基本思想是对信号加窗,然后对窗内的信号进行傅里叶变换,因此它可以反映出信号的局部特性。STFT在实际中得到了广泛的应用。但STFT的定义决定了其窗函数的大小和形状与时间和频率无关,为固定大小和形状。

一般说来,实际中高频信号持续时间很短,而低频信号持续时间较长,因此希望能够对低频信号采用大时间窗进行分析,而对高频信号采用小时间窗进行分析。小波变换继承了STFT的思想,它的窗口大小不变,但窗口形状可以改变,是一种时间窗和频率窗都可改变的时频分析方法,即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率,因此在时频域都具有很强的表征信号局部特征的能力。

1.2 Haar小波

在小波分析中,尺度函数 ϕ 和小波函数 ψ 起着非常重要的作用,实际上信号的分析处理都是通过这两个函数生成的函数簇对信号实现分解和重构。尺度函数和小波函数之间具有

非常紧密的关系,有时人们也称尺度函数为“父”小波,称小波函数为“母”小波。小波是在一定的现代数学分析和信号处理等实际应用中发展起来的,具有较高的理论要求和工程背景,学习有一定的难度。本节将以最早、最简单的小波——Haar 小波为例,希望通过对 Haar 小波的学习能够对小波分析这种方法有所了解。

1.2.1 Haar 小波简介

定义 1 Haar 函数 $\varphi(x)$ 的定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然,对于正数(负数) k , $\varphi(x-k)$ 的图形为 $\varphi(x)$ 向右(左)平移单位 k 后的结果。假设 V_0

为所有线性组合 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x-k)$, $a_k \in \mathbb{R}$ 所构成的空间,其元素可以通过图 1.1 来表示。

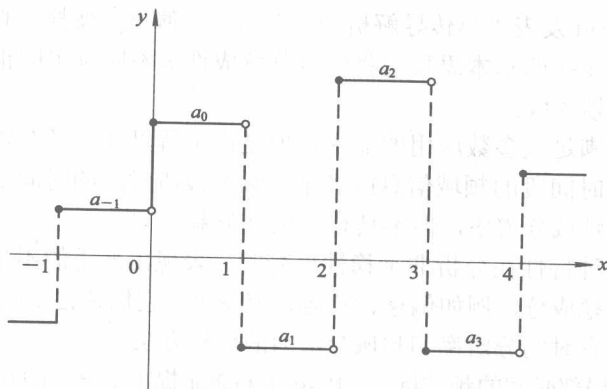


图 1.1 空间 V_0

基于 Haar 函数可以对信号的高、低频部分进行分析。由函数 $\{\dots, \varphi(2^n x + 1), \varphi(2^n x), \varphi(2^n x - 1), \varphi(2^n x - 2), \dots\}$ 生成的函数集合构成的空间 V_n 描述的是在时间区间长度为 $1/2^n$ 内取常数的信号。显然, n 越大, 表示的是信号变化越剧烈的部分; 而 n 越小, 表示的是信号变换越缓慢的部分。空间序列 V_n 具有如下性质:

(1) 单调性: 空间序列 V_n 具有下面的递增性质:

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots V_{n-1} \subset V_n \subset V_{n+1} \cdots$$

由于 $\varphi(2x) \in V_1$, $\varphi(2x) \notin V_0$, 因此上面的包含关系严格成立;

(2) 伸缩性: 对于函数 $f(x)$, 当且仅当 $f(2^n x) \in V_n$ 时, $f(x) \in V_0$;

(3) 逼近性:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

(4) 平移不变性: $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$;

(5) 正交基性质: 函数 $\{2^{n/2} \varphi(2^n x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ 构成空间 V_n 的标准正交基。

实践中,比如对于信号的去噪等典型应用,噪音常常表现为信号的高频部分,因此去噪相当于将信号中的高、低频成分分离出来。高频分量表现为变换比较快的部分,这可以通过 n 取较大值时的函数集合 $\{2^{n/2}\varphi(2^n x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ 来刻画。注意到 V_n 是至少宽度为 $1/2^n$ 的区间上取常数的简单函数组成的空间序列,在 V_n 中的信号高频部分(对应于噪声)最大可能为当且仅当在时间长度为 $1/2^n$ 内取常数值信号的部分,因此要达到去噪的目的只需要将信号分为当且仅当在时间长度为 $1/2^n$ 内取常数值信号的部分(对应空间 W_n)和至少宽度为 $1/2^{n-1}$ 的区间内为常数值的部分(对应空间 V_{n-1})。

因此,如何求解 W_n 是下一步需要解决的问题。求解的基本思想是:找到一个函数 $\psi(x)$,像函数 $\varphi(x)$ 的伸缩和平移 $\{2^{n/2}\varphi(2^n x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ 能够张成空间 V_n 一样,函数 $\psi(x)$ 的伸缩和平移 $\{2^{n/2}\psi(2^n x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ 也能张成空间 W_n 。同时要求 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 能够建立直接的联系。

定理 1 设 W_n 是由形如 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \varphi(2^n x - k)$ ($a_k \in \mathbf{R}$) 的函数所组成的线性空间,其中 a_k 含有限个非 0 项,则 W_n 构成 V_n 在 V_{n+1} 中的正交补,并且 $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ 。

定理 2 能量有限空间 $L^2(\mathbf{R})$ 可以分解为如下形式之和:

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$$

因此, $f \in L^2(\mathbf{R})$ 可以唯一地表示为

$$f = f_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k$$

其中 $f_0 \in V_0$, $\omega_k \in W_k$ 。

1.2.2 基于 Haar 小波的信号分解与重构算法

基于 Haar 小波的信号分解与重构过程可总结为如下的算法。

第一步(采样),如果待分解的是模拟信号 $f(t)$,选择 $N = 2^n$ (大于 Nyquist 速率),得到采样信号值 $a_k^n = f(k/2^n)$,其中 k 的取值保证 k/N 位于信号 $f(t)$ 发生的时间范围之内,并在每一个不小于 $1/N$ 的时间段内都能取到采样信号 $a_k^n = f(k/2^n)$,于是可以用信号

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^n \varphi(2^n x - k)$$

对连续信号 $f(t)$ 进行高精度的近似。

第二步(分解),将信号 $f_n(x)$ 逐级分解为

$$\begin{aligned} f_n(x) &= W_{n-1}(x) + W_{n-2}(x) + \dots + W_{l-1}(x) + f_{l-1}(x) \\ &= W_{n-1}(x) + W_{n-2}(x) + \dots + W_0(x) + f_0(x) \end{aligned}$$

其中

$$W_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{l-1} \psi(2^{l-1}x - k), \quad f_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{l-1} \varphi(2^{l-1}x - k)$$

系数 a_k^{l-1} 与 b_k^{l-1} 按照上标从大到小的顺序从 $l=n$ 开始直到 $l=0$ 结束, 满足

$$b_k^{l-1} = \frac{a_{2k}^l - a_{2k+1}^l}{2}, \quad a_k^{l-1} = \frac{a_{2k}^l + a_{2k+1}^l}{2}$$

第三步(信号的处理), 将分解后的信号表示成下面的形式

$$f_n(x) = \sum_{l=0}^{n-1} W_l(x) + f_0(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^l \psi(2^l x - k) \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(x - k)$$

信号处理的过程就是根据实际问题的需要对系数 b_k^l 作适当的修正。例如, 如果用于去噪的目的, 则将某个认为不可能存在的频率范围对应的系数 b_k^l 设置为 0; 而用于压缩时, 则可以根据压缩比的大小以及小波系数的取值范围, 设置适当的阈值, 当小波系数绝对值小于该阈值则令其为 0。设修正后的小波系数记为 $\tilde{b}_k^l$ 。

第四步(信号的重构), 设重构后的信号值满足

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^n \varphi(2^n x - k)$$

则上述信号值可以通过下面的递推过程得到

$$\tilde{a}^l = \tilde{L}U\tilde{a}^{l-1} + \tilde{H}U\tilde{b}^{l-1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, n$$

其中, $\tilde{a}^0$ 和 $\tilde{b}^l$ ($l=0, 1, 2, \dots, n-1$) 是根据第二步、第三步得到的修正系数。

下面举一个例子说明上面的算法。

【例 1-1】 利用 Haar 小波分解定义在时间区间 $[0, 1]$ 上的信号, 如图 1.2 所示。设采样点为 $f(k/2^8) = a_k^8, k=0, 1, 2, \dots, 2^8-1$ 。

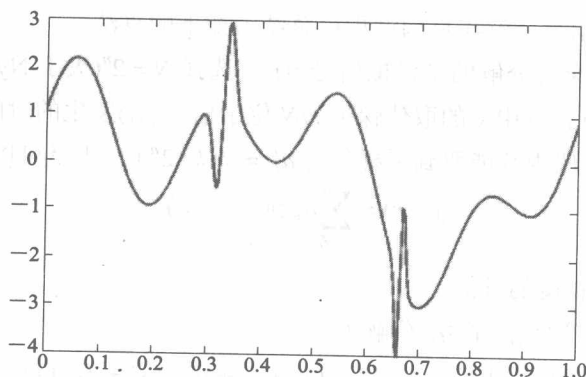


图 1.2 原始信号

按照上面的算法对信号进行分解, 得到信号在不同空间中的分量, 如图 1.3、图 1.4、图 1.5 和图 1.6 所示。