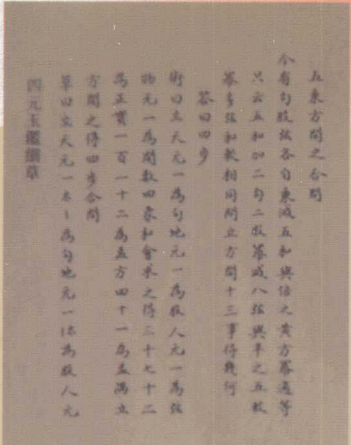
沈钦裴四元细草今译


五東方間之合問
今有句股弦各自乘減五和與倍之黃方冪遞等
只云五和加二句二股冪減八弦與半之五較
冪等弦和較相同問立方間十三事得幾何
答曰四步
術曰立天元一為句地元一為股人元一為弦
物元一為開數四象和會求之得三十七十二
為正實一百一十二為立方四十一為立
方開之得四步合問
草曰立天元一太為句地元一為股人元
四元玉鑑細草

〔清〕沈钦裴/原著
刘洪元/今译

東北大學出版社
Northeastern University Press

沈钦裴四元细草今译

〔清〕沈钦裴／原著

刘洪元／今译

东北大学出版社

·沈　阳·

内 容 提 要

四元术是元朝朱世杰提出的建立和解答多元高次方程组的方法，它代表了中国古代数学的杰出水平。本书从沈钦裴四元消法法则的统一表示入手，把沈钦裴四元细草用吴消元法的笔算形式表示出来，找到多项式方程组的一般解法。

本书适合数学史工作者、大学数学系师生及计算机专业的师生、中学数学教师及数学爱好者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

沈钦裴四元细草今译 /（清）沈钦裴原著；刘洪元译. —沈阳：东北大学出版社，2010. 4

ISBN 978-7-81102-813-3

Ⅰ. 沈… Ⅱ. ①沈… ②刘… Ⅲ. ①古典数学—中国 ②四元细草—译文 Ⅳ. O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 070914 号

出版社：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024-83687331(市场部) 83680267(社务室)

传真：024-83680180(市场部) 83680265(社务室)

E-mail：neuph@neupress.com

网址：http://www.neupress.com

印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：140mm × 203mm

插 页：2

印 张：4.875

字 数：97 千字

出版时间：2010 年 4 月第 1 版

印刷时间：2010 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑：刘乃义 王延霞

责任校对：刘 丹

封面设计：唐敏智

责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-813-3

定价：28 .00 元

前　　言

四元术是我国古代建立和解答四元高次方程组的方法，见于元朝朱世杰所著的《四元玉鉴》。清代数学家沈钦裴著有《四元玉鉴细草》。郭书春先生认为，“对《四元玉鉴》的研究，成绩最突出者当推沈钦裴、罗士琳二位”，“沈钦裴对朱世杰四元术的精辟见解，在罗士琳之上”。李兆华先生认为，“沈氏关于四元消法的解释最为可取”。本书从沈钦裴四元消法法则的统一表示入手，把沈钦裴四元细草用吴消元法的笔算形式表示出来，试图为理解中国古代数学的机械化本质提供一个新视角，为现代数学机械化思想提供可靠的数学模型，为数学史料的古为今用提供一个良好的范例。

吴文俊先生指出：“在中国古代数学史研究中，有两条需要严格遵守的原则，即

原则一：所有研究结论应该在幸存至今的原著基础上得出。

原则二：所有结论应该利用古人当时的知识、辅助工具和惯用的推理方法得出。”

《沈钦裴四元细草今译》的研究遵循了这两条原则。

对于四元消法，李俨、钱宝琮先生指出：“十分明显，在诸如上述的过程中需要用到多项式而且是多项式

的加、减、乘等运算。可惜的是，在《四元玉鉴》中没有这方面的详细记载。”对于四元消法，二位先生唯独没有提到多项式的除法运算。我认为，四元消法的三条法则就是在不同情况下多项式的除法(伪除法)运算。把四元消法用伪除法表示，这就把在四元术中需要巧思的运算化为显而易见的机械化过程。

《沈钦裴四元细草今译》的特点在于，不再拘泥于传统的“互乘对消”，而是把吴消元法应用到四元细草今译中来。在除法算式中，“互乘”就是商与除式相乘，“对消”就是从被除式中减去商与除式相乘的结果。既然是细草今译，则要求筹算算式和吴消元法的笔算算法的消元次序、中间步骤、最后结果完全相同。令人称奇的是，虽然思考方法截然不同，但是两者的结果却完全一致。需要指出的是，《沈钦裴四元细草今译》中方程组的解法，只是若干解法中的一种，读者可以根据自己的习惯，重新确定消元次序。但有一点是肯定的，最后的答案一定是正确的。

《四元玉鉴》表面上看是习题集，实际上却有着深刻的内涵。朱世杰、沈钦裴在使用四元术的时候，未必追求理论上的完备，但是我们完全可以在初等代数学的基础上，赋予四元消法以坚实的理论基础，让四元消法这颗埋藏在泥土中的珍珠，焕发出耀眼的光芒。详细论述见本书末“中国古代数学的瑰宝——四元消法”。

古人在多项式方程和多项式的表述上似乎没有区别，并且没有产生歧义。为了符合今人的习惯，只在开始建

立方程组和最后解方程时用方程表述，中间消元过程则用多项式描述。本书在写作过程中，在四元消法的表述形式上进行了探索性的思考，并冒着创新与谬误并存的风险，借此机会就教于同行。一孔之见，难免挂一漏万，欢迎批评指正。

刘洪元

2009年7月1日

《觀我生室匯稿》。

朱世傑《四元玉鑑》原術過於簡括，祖頤的提示亦極籠統，倘無細草，讀者很難理解。沈、羅二氏細草都能以平易之語言，闡述朱氏造術之理。羅氏細草成書後即刊行，影響較大，成爲研究《四元玉鑑》的必讀書籍。相反，先成書的沈氏細草一直未能付梓，影響不大，甚至遭到貶抑。諸可寶《疇人傳三編》也提到沈欽裴「算補《玉鑑》細草四册」，承認「四象朝元第三、第五兩問，羅草方廉隅諸數，皆背原術，無說處之。相傳訓導（指沈欽裴）所演，獨爲吻合，此其勝者」，然總的評價却是「與羅茗香氏大同小異，而詳實不如」。而實際上，根據錢寶琮、杜石然的研究，羅士琳細草對四元消法的解釋及對各種級數的解釋，都有欠妥之處，未能盡合朱世傑原意，而沈欽裴對《四元玉鑑》這兩項最重要的成就，都有很好的理解，在某些方面遠遠超過了羅士琳。比如對朱世傑「互隱通分相消」的理解，羅氏採取徧乘之後再相消，而不是待消一行不乘，與朱氏原意不合；而沈欽裴的解釋既有「互隱」的意義，又頗似通分程序中的「母互乘子」，符合朱氏「互隱通分」的原意。關於「剔而消之」中的「剔」，沈、羅二氏都理解爲將全式剔爲二，是正確的，但對其中的「消」，羅士琳的理解相當於代入法，去朱術遠矣；而沈欽裴的方法是與「互隱通分」相通相承的方法，切合朱氏原意。再如「如象招數」第四問，羅士琳没有利用原有求兵時所立諸差，更立新的差數表，從而無法理解朱氏原草，進而懷疑「原術傳寫有誤」；沈欽裴則理解了朱氏原術，並給出了正確的細草。總之，沈欽裴對朱世傑四元術和垜積術的精闢見解，都在羅士琳之上（錢寶琮：《中國數學史》、杜石然：《朱世傑研究》）。有鑒於此，加之羅氏細草成書後百餘年間多次翻刻、重印，謹依李儼原藏北京圖書館抄本的轉抄本影印沈欽裴《四元玉鑑細草》，以饗讀者。

郭书春在《四元玉鉴细草提要》中，对沈钦裴四元消法的评介

益四廉八為正隅五乘方開之合問

草曰立天元一太丨為勾地元一丨太為股人元一太丨為弦物元一丨太為開數四象和會求之得今式 云式 三元之式 物元之式 四式和會消而別之式皆物易天位得前式 後式 左式 右式 内二行得 外二行得 内外相消四十約之得開方式 立方開之得二十步置此式別以立方式 乘之得

五乘方開之合問

今有勾股弦各自乘減五和與倍之黃方冪適等只云五和加二勾二股冪減八弦與半之五較冪多弦和較相同問立方開十三事得幾何

荅曰四步

術曰立天元一為勾地元一為股人元一為弦物元一為開數四象和會求之得三十七十二為正實一百一十二為益方四十一為益隅立方開之得四步合問

草曰立天元一太丨為勾地元一丨太為股人元一太丨為弦物元一丨太為開數四象和會求之得今式 云式 三元之式 物元之式 四式和會消而別之式皆物易天位得前式 別前式後式相消左得 右得 内二行相乘得 外二行相乘得式 内外相消八十四約之得開方式 五乘方開之得四步按此五乘方式是以四十八乘立方積六十四為正實併四十八六十四為益二廉今以天元再除益二廉為益方是以七乘平方積一十六為益方七減四十八餘四十一為益隅再乘天元加入益方又以天元乘之是亦以四十八乘立方積六十四也故變五乘方式為立方式 開得四步合問

沈钦裴四元细草：四象朝元4、5

目　录

吴消元法与四元术*

吴消元法是指吴文俊先生创立的用电子计算机解多元高次方程组的方法。四元术是我国古代建立和解答四元高次方程组的方法,见于元朝朱世杰所著的《四元玉鉴》。清代数学家沈钦裴著有《四元玉鉴细草》，李兆华先生认为，沈氏关于四元消法的解释最为可取。吴文俊先生称所创立的“吴消元法”借鉴了中国古代解方程组的思想,尤其是朱世杰四元术中可机械执行的消元法思想。关于吴消元法在技术上与四元术之间是如何建立联系的，本章作以下探讨。

（一） 从初等数学的角度看吴消元法

吴文俊先生提出的用电子计算机解多项式方程组的方法被国际上誉为吴消元法。吴消元法的核心是对多项式约化求余式,把所给多项式方程组(PS)=0:

$$
\begin{aligned}
&P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\
&P_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\
&\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\
&P_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,
\end{aligned}
$$

化为三角阵(CS)=0 的形式:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1)=0,\\
&f_2(x_1,x_2)=0,\\
&\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\
&f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0。
\end{aligned}
$$

进而利用所掌握的各种方法，逐个地依次解出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

---

* 原载《数学的实践与认识》2007 年第 8 期。

上面的运算在吴消元法中叫整序，实际上就是四元术里的消元。下面说明整序(消元)的步骤：

(1) 从一多项式组 PS 出发，找出一个变量少、主变元次数低的多项式确定为基列 A_1。

(2) 将 PS 的 A_1 之外的多项式对基列 A_1 约化，得到不含主变元的余式，由诸余式组成多项式组 PS_1。

(3) 再取 PS_1 的一个基列 A_2，重复步骤 1 和步骤 2，依次得 PS_2，PS_3，…，若 PS_k 有一基列 A_k，使得 A_k 以外的多项式对于 A_k 的余式均为 0，则称 A_k 为 PS 的特征列。按上述步骤进行有限次后，或得到一个特征列，或得到一个与 PS 有相同零点集的仅含参变量的多项式。

(4) 由基列 A_1，A_2，…，特征列 A_k 组成升列(CS)。

在实施多项式整序（消元）的过程中，多次应用伪除法（除法），下面介绍伪除法有关的问题。多项式 Q 与 R 满足下列关系：

$$I^qG=QF+R$$

上述表达式为伪余公式，其中，Q 为 G 对 F 关于 x_k 的伪商，R 为 G 对 F 关于 x_k 的伪余式；I^q 为避免出现分式对 G 乘的因式。通过用 F 对 G（关于x_k）作伪除获得 Q 与 R 的过程称为伪约化。它是许多算法的基础。如果 I^q=1，就成为大家熟知的多项式除法。式中的多项式 Q 和 R 由 F 与 G 唯一确定。

下面给出用做演示伪除过程的简单例子。

例 1 考虑多项式 $F=xy^2+1$，$G=2y^3-y^2+x^2y$，关于 y，相应的 R 和 Q 可如下计算：

$$
\begin{array}{r|ll}
 & 2y-1 & =Q \\
\cline{2-3}
F=xy^2+1 & 2y^3-y^2+x^2y & G \\
 & 2xy^3-xy^2+x^3y & xG \\
 & 2xy^3+2y & 2yF \\
\cline{2-3}
 & \quad -xy^2+x^3y-2y & R_1 \\
 & \quad -xy^2-1 & -F \\
\cline{2-3}
 & \qquad\quad x^3y-2y+1 & =R_2
\end{array}
$$

由此即得　$xG=(2y-1)F+x^3y-2y+1$。

为了避免分数系数，在做除法时，可以用一个不等于 0 的数或因式乘被除式，而且不仅在每一次除法开始时可以这样做，就是在进行除法的过程中也可以这样做，每次求得的余式与正确的余式只差一个零次因式。

注意到 $F^qG=QF+R$ 是恒等式。在 $F^qG=QF+R$ 中，如果 $G=0$，$F=0$，则必有 $R=0$。这表明，多项式方程和它们的余式方程是同解方程。

为了便于叙述，不妨把伪除法(除法)这类通过多项式约化求余式的运算叫做除法变换。除法变换一词出自《范氏高等代数学》。具体运算可参考中学的多项式除以多项式的竖式演算，高等代数中的辗转相除和本书的除法变换是相通的。

在实际中我们经常遇到多变量的多项式，在作除法变换时，可指定一主变元。

例 2　$2x+y$ 除 $4x^2+6xy+y^2$。

(1) 以 x 为主变元，得

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+2y \\
\cline{2-2}
2x+y & 4x^2+6xy+y^2 \\
 & 4x^2+2xy \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4xy+y^2 \\
 & \qquad 4xy+2y^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -y^2
\end{array}
$$

即商式 $Q=2x+2y$，余式 $R=-y^2$。

(2) 以 y 为主变元，得

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & \quad y+4x \\
y+2x \,\big) & \overline{\,y^2+6xy+4x^2} \\
 & \underline{\,y^2+2xy\quad\quad} \\
 & \quad\quad 4xy+4x^2 \\
 & \quad\quad \underline{4xy+8x^2} \\
 & \quad\quad\quad\quad -4x^2
\end{array}
$$

即商式 $Q=y+4x$，余式 $R=-4x^2$。

一个非常有意义的事实是，上面的例题通过除法变换都消去了主变元。

科学上许多伟大的发现与创造，基本思想往往朴实无华，甚至看来是平凡的。吴消元法的基本出发点也是十分朴素的思想：通过多项式除法达到消元的目的。这是区别于代入消元、加减消元的一种新的消元方法。这种方法的优点是：在每个循环中，未知数的次数都严格下降，余式越来越简单，解多项式方程组十分有效。

（二） 沈钦裴四元消法法则的统一表示

李兆华先生指出，四元术的关键是四元消法。四元消法大致分为“剔而消之”“互隐通分相消”“内外行相乘相消”，清代沈钦裴的《四元玉鉴细草》、罗士琳的《四元玉鉴细草》与戴煦的《四元玉鉴细草》均为系统研究《四元玉鉴》之作，且各有卓见。总括三家所见略有不同可知，四元消法即重复使用互乘对消运算的逐步消元法。依沈钦裴之见，“剔而消之”“互隐通分相消”“内外行相乘相消”均系互乘对消。现在的问题是，怎样把这三条法则归结为“互乘对消”呢？

下面研究沈氏四元消法和除法变换的内在联系，关于沈氏四元消法的解释，引自李兆华先生的文章《朱世杰〈四元玉鉴〉研究》(2004)。根据所给的多项式列出伪除法算式，大家注意体会四元

消法的“互乘”“对消”在伪除法算式中的出现形式，以及两种方法的结果一致性。

1. 关于“内外行相乘相消”

设左式、右式为

$$\begin{cases} a_0y+a_1=0, \\ b_0y+b_1=0。\end{cases}$$

其中，a_i，b_i 是关于 x 的多项式，$i=0$，1。“内外行相乘相消”，沈氏的解释是

$$a_0b_1-b_0a_1=0,$$

此即开方式。

现在将其写成伪除法算式：

$$\begin{array}{r|l} & b_0 \\ \hline a_0y+a_1 & b_0y\ +b_1 \\ & a_0b_0y+a_0b_1 \\ & \underline{b_0a_0y+b_0a_1} \\ & \quad R=a_0b_1-b_0a_1 \end{array}$$

2. 关于“互隐通分相消”

又设前式、后式为

$$\begin{cases} a_0y^2+a_1y+a_2=0, & (1) \\ b_0y^2+b_1y+b_2=0。 & (2) \end{cases}$$

其中，a_i，b_i 是关于 x 的多项式，$i=0$，1，2。“互隐通分相消”，若消去首项，沈氏的解释是

$$a_0(b_1y+b_2)-b_0(a_1y+a_2)=0,$$

即

$$(a_0b_1-b_0a_1)y+(a_0b_2-b_0a_2)=0。\tag{3}$$

以 $y\times(3)$、(1)或(2)配合，同法可得另一关于 y 的一次式，即得两个一次式，则化为左式、右式。

现在将其写成伪除法算式：

$$
\begin{array}{lll}
(1)\quad a_0y^2+a_1y+a_2 & \overline{\big)\, b_0y^2+b_1y+b_2} \ \ b_0 & (2)\\
 & a_0b_0y^2+a_0b_1y+a_0b_2 & \\
 & \underline{a_0b_0y^2+b_0a_1y+b_0a_2} & \\
 & R=(a_0b_1-b_0a_1)y+(a_0b_2-b_0a_2) & (3)
\end{array}
$$

3. 关于“剔而消之”

再设今式、云式、三元之式为

$$
\begin{cases}
a_0y+a_1=0, & (4)\\
b_0y^2+b_1y+b_2=0, & (5)\\
c_0y^2+c_1y+c_2=0。 & (6)
\end{cases}
$$

其中，a_i，b_i，c_i 是关于 x，z 的多项式，$i=0$，1，2。“剔而消之”，若消去首项，沈氏的解释是，由式(5)和式(6)得

$$b_0(c_1y+c_2)-c_0(b_1y+b_2)=0,$$

即

$$(b_0c_1-c_0b_1)y+(b_0c_2-c_0b_2)=0。\tag{7}$$

由式(7)和式(4)得

$$a_0(b_0c_2-c_0b_2)-(b_0c_1-c_0b_1)a_1=0。\tag{8}$$

此时 y 已消去。同法，由 $y\times(4)$、(5)或(6)消去 y^2，得关于 y 的一次式。以此式与式(4)联立即可消去 y，即得二元组，则化为前式、后式。

现在我们写成伪除法的形式：

$$
\begin{array}{lll}
(5)\quad b_0y^2+b_1y+b_2 & \overline{\big)\, c_0y^2+c_1y+c_2} \ \ c_0 & (6)\\
 & b_0c_0y^2+b_0c_1y+b_0c_2 & \\
 & \underline{b_0c_0y^2+c_0b_1y+c_0b_2} & \\
 & R=(b_0c_1-c_0b_1)y+(b_0c_2-c_0b_2) & (7)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(4) & & (b_0c_1-c_0b_1) & \\
 & a_0y+a_1 \big) & \overline{(b_0c_1-c_0b_1)y+(b_0c_2-c_0b_2)} & (7) \\
 & & a_0(b_0c_1-c_0b_1)y+a_0(b_0c_2-c_0b_2) & \\
 & & \underline{a_0(b_0c_1-c_0b_1)y+(b_0c_1-c_0b_1)a_1} & \\
 & & R=a_0(b_0c_2-c_0b_2)-(b_0c_1-c_0b_1)a_1 & (8)
\end{array}
$$

综上所述，四元消法的三条法则都可以写成伪除法（或除法）的形式，可以肯定地说，四元消法的核心算法就是除法变换。

对于四元消法，李俨、钱宝琮先生指出：“十分明显，在诸如上述的过程中需要用到多项式而且是多项式的加、减、乘等运算。可惜的是，在《四元玉鉴》中没有这方面的详细记载。”对于四元消法，二位先生唯独没有提到多项式的除法运算。本书认为，四元消法的三条法则就是在不同情况下多项式的除法（伪除法）运算，沈钦裴四元消法的“互乘对消”就是多项式乘法及减法所合成的运算——除法运算，具体讲，在除法算式中“互乘”就是商与除式相乘，“对消”就是从被除式中减去商与除式相乘的结果。四元消法的三条法则可以用一种运算——除法运算——来表示。把四元消法用除法变换来概括，充分体现了四元消法的机械化本质，这就把在四元术中需要巧思的运算化为显而易见的机械化过程。

（三） 吴消元法与四元消法解题对比

例 3 四象会元

今有股乘五较与弦幂加勾乘弦等，只云勾除五和与股幂减勾弦较同，问黄方带勾股弦共几何？

答曰：一十四步。

下表中，左边是四元术细草。四元术细草是在有方格的算板上用算筹进行演算，为了便于理解，下面把方格中的数字用阿拉伯数字表示。右边是把相应的四元消法用除法变换来表示，即吴消元法的笔算算法形式。

<table>
<tr><th></th><th>四元术细草</th><th>吴消元法的笔算算法</th></tr>
<tr><td>1</td><td>草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦，物元一为开数。四象和会求之。
求得今式
<table><tr><td>−2</td><td>(0)</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr></table>，
求得云式
<table><tr><td></td><td>4</td><td>(0)</td><td>4</td></tr><tr><td>−1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td>−1</td><td></td></tr></table>，
求得三元之式
<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>(0)</td><td>0</td><td>−1</td></tr><tr><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>，
求得物元之式
<table><tr><td></td><td>−1</td></tr><tr><td>2</td><td>(0)</td></tr><tr><td></td><td>2</td></tr></table>。</td><td>解：设勾为 x，股为 y，弦为 z，所求数为 w。依题意得方程组：
$$\begin{cases}-2y+x+z=0\\-xy^2+4y+2x-x^2+4z+xz=0\\y^2+x^2-z^2=0\\2y+2x-w=0\end{cases}$$
写成多项式，取 x 为主变元，
$f_1=x-2y+z$
$f_2=-x^2+(-y^2+z+2)x+4y+4z$
$f_3=x^2+y^2-z^2$
$f_4=2x+2y-w$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>倍今式与物元之式相消得上位
<table><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>−6</td><td>(0)</td><td>2</td></tr></table>，</td><td>$f_4 \div f_1$，得余式
$R_1=-2z+6y-w$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>云式与三元之式相消得
<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>(0)</td><td>4</td><td>−1</td></tr><tr><td>−1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr></table>，</td><td>$f_2 \div f_3$，得余式
$R_2=2x+4y+(-x+1)y^2+4z+xz-z^2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>又以物元之式消之得中位
<table><tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td>−2</td><td></td><td>−1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>−2</td><td>−2</td><td>−4</td><td>(0)</td><td></td><td>−8</td><td>2</td></tr></table>。</td><td>$R_2 \div f_4$，得余式
$R_3=-2z^2+(-2y+w+8)z+2y^3+2y^2+4y-y^2w+2w$</td></tr>
</table>