数学教学法

中学现代数学原理

孙克忠 编著

辽宁省数学会
辽宁省数学教研会

数 学 教 学 法

中学现代数学原理

（2）

孙 克 忠 编著

辽 宁 省 数 学 会

辽宁省数学教研会

1980年 沈 阳

内 容 提 要

这是本书的第二册。其主要内容是：线性方程组教学、集合与教学、微积分初步，概率统计，逻辑代数教学和公理化体系。

为便于教学和阅读，本书写成各自独立成章形式，并配有较多的例题与图形，实物照片等。

本册书可作高师数学系“中学现代数学原理”课或教材教法课教学参考书，亦可供中学数学教师教学参考用和数学系学生课外读物。

数 学 教 学 法

第 二 册

孙 克 忠 编著

辽宁省数学会
辽宁省数学教研会 联合出版

（辽宁大学数学楼）

沈阳市第二印刷厂印刷

内 部 发 行

1973年6月第一版·1979年5月第二稿

字数 250 千

目　　录

第 三 篇

中学现代数学原理

内容．线性方程组、集合初步、微积分、概率统计、逻辑代数和公理化体系．在这篇我们对这些内容的结构、原理、教学中应注意问题进行了分析．希望它能对教师进行现代数学教学有所帮助．中学现代数学原理是处于现代数学与教学法过渡阶段．关于这些课程的教学法方面的讨论必须建立在对其原理进行深刻分析基础上才能进行．因此在这部分用较多文字谈本身内容．在此基础上进行了教学法的分析．

第十一章　线性方程组教学

线性方程组主要解决以下三个问题，在中学阶段可解决前二个问题．

1．给出判定线性方程组有没有解的方法．

2．若有解的话是有唯一解还是无穷多解，如何求解？

3．如果是无穷多解，那么这些解的内部结构怎样？

§11·1　关于线性方程组的一些基本概念

未知数的最高次数是一次的方程叫一次方程，含有n个未知数的一次方程叫n元一次方程．中学阶段主要学习一元一次方程、二元一次方程，三元一次方程．一元一次方程的函数图象是一条直线，故一次方程也称为线性方程．它对应于函数中的线性函数．

一元一次方程　$ax+b=0$ 当$a\neq0$时，有唯一解．

二元一次方程　$ax+by+c=0$　$a\neq0$，$b\neq0$则有无穷多解．

因为任给$y=y_0$ 则方程变为

$$ax+by_0+c=ax+(by_0+c)=0$$

一元一次方程，从而可求出x值记为x_0，则(x_0,y_0)为其解。由于y_0的任意性故此方程有无穷多组解。同理三元一次方程也有无穷多解，因为任给y_0、z_0都可以求出x_0使(x_0,y_0,z_0)为其解，同样可推广到n元一次方程。

若干个线性方程的联立叫线性方程组或一次方程组。这里并不要求未知数的个数一定等于方程的个数。在中学则研究最简单情形即方程个数等于未知数个数的方程，所以在教科书中所说二元一次方程组都是指二个二元一次方程组成的方程组，三元一次方程组都是指由三个三元一次方程组成的方程组。

在教学中应该注意的是，方程组解的定义本身并没有给出解的求法。有的学生认为，要求线性方程组的解只要把每个方程的解求出来，找出它们公共部分就可以了，这是办不到的。因为n元一次方程在$n\neq1$时有无穷多解，这些解是永远也求不完的，因此用这种办法找公共部分就更谈不到了。

若两个方程组解集合相等，则称之为同解方程组（或等价方程组）。例如，

$$\text{I}\begin{cases}2x+\ \ y=5\\3x+4y=10\end{cases}\quad 与\ \text{II}\begin{cases}-2x-\ \ y=-5\\\ \ \ \ x+3y=5\end{cases}$$

等价。因为I的解集合是{1，2}，同时它也是II的解集。

矛盾方程组：若方程组的解集合是空集合，则称此方程组为矛盾方程组。

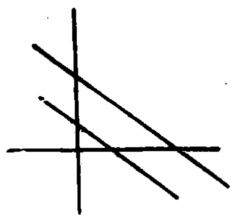
相容方程组：若方程组解集合不空，则称此方程组为相容方程组。

有定的方程组：若方程组有且只有唯一一组解，则称此方程为有定的。

不定的方程组：若方程组有无穷多组解，则称此方程组是不定的。

对于有定和不定方程组的定义学生往往提出这样的问题：方程组的解是否可能既不唯一又不是无穷多，只是有限个呢？对于这类问题可以做如下解释，用几何观点看二条直线怎么能有且只有有限个（二个以上）交点呢？显然这是荒谬的，而一个二元线性方程相当于一条直线，其方程组的解就是两直线的交点，二相交直线要么重合，要么只有一个交点，不能有另外情况，就解析几何的知识就一目了然了。

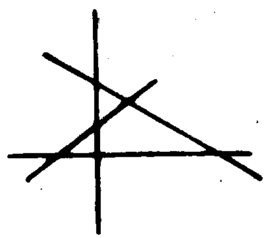
$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$$



11—1

是矛盾方程两直线平行。

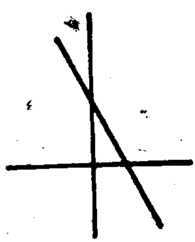
$$\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+\ \ y=1 \end{cases}$$



11－2

是有定的两直线相交。

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=2 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$$



11—3

是不定的两直线重合。

§11·2 消元法解线性方程组

解新方程的基本方法是把方程变形，变成已经会解的方程。比如

要解二元一次方程组它对学生来讲是个新知识，它比一元一次方程多一个未知元，于是就要想办法消于一个未知元，把二元一次方程组化成一元一次方程来解。

一、代入消元法.

例.

$$\begin{cases} x+2y=3 & (1) \\ 2x-\ y=1 & (2) \end{cases}$$

解. （1）中未知数x的系数是1，故由（1）用y表示x很容易．于是有

$$x=3-2y \qquad (3)$$

把（3）代入（2）得

$$2(3-2y)-y=1$$

整理得 $\quad -5y+5=0$

解之 $\quad y=1 \qquad (4)$

把（4）代入（1）、（2）或（3），因（3）简单故代入（3）得 $\quad x=3-2\times1=1$

故此方程组的解为

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

这种代入消元法的理论根据是什么？也就是为什么这样解方程而能保持新方程与原方程同解呢？这在§9.9已经证明了．在教学中，教师应指出在什么情况下用代入消元法，当方程中有一个未知数的系数是1时，就用其它未知量表示这个未知量，得整系数多项式而不产生分数系数，计算起来很方便，如上一例，当然这不是什么原则问题．学生在学习代入消元法时，有时谁用谁来表示，不知往那个方程里代入，一般选取系数为1的，这样一个未知量可以立即用另一个未知量表示，然后代入另外一个方程而不能代入原方程，这是教学中应该注意的问题。

二、加减消元法

从一个方程中减去另一个方程的若干倍得到的新方程与原方程组中任何一个联立得到的新方程组与原方程组同解。在这个定理保证之下可用加减消元法解方程组。

例.

$$\begin{cases} x+2y=5 & (1) \\ x+3y=7 & (2) \end{cases}$$

解. x 的系数相同，用加减消元法，从（2）减去（1）得：

$$\begin{array}{r} x+3y=7 \\ -)\,x+2y=5 \\ \hline y=2 \end{array} \qquad (3)$$

把（3）代入（2）或（1）（那个好算往那个里代入）得

$$x=5-2\times2=1$$

即

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

例.

$$\begin{cases} 2x-3y=-3 & (1) \\ 3x+3y=13 & (2) \end{cases}$$

解. 用加减消元法

（1）+（2）得

$$\begin{array}{r} 2x-3y=-3 \\ +)\,3x+3y=13 \\ \hline 5x\qquad=10 \end{array}$$

解之 $x=2$

代入（2）得

$$y=\frac{7}{3}$$

即解为

$$\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

由上两例可以看出，如果 x 的系数相同或差一符号，或 y 的系数

相同或差一符号时，一般用加减消元法方便

例.
$$\begin{cases}2x+8y=48 & (1)\\ 3x+2y=22 & (2)\end{cases}$$

这个题与前二题不一样，它不能通过直接加或减消去一个未知数得到一个只有一个未知数的方程。这里只要把（2）×4或（1）×3、（2）×2即可得到未知数系数相同的二个方程，从而用加减消元法解之。

例.
$$\begin{cases}3x+\ y=2 & (1)\\ 6x+2y=1 & (2)\end{cases}$$

解. 用代入消元法由（1）得

$$y=2-3x \qquad (3)$$

（3）代入（2）得

$$6x+2(2-3x)=1$$

整理得 $4=1$

而原方程组与

$$\begin{cases}y=2-3x\\ 4=1\end{cases}$$

同解，任何x、y都不满足 4 = 1，此方程组解集交集是空集，无解。

例.
$$\begin{cases}3x+4y=2 & (1)\\ 6x+8y=4 & (2)\end{cases}$$

解. 用代入消元法

（2）－（1）×2得

$$0=0$$

而此方程与（1）或（2）联立后的方程组与原方程组同解

$$\begin{cases}3x+4y=2 & (3)\\ 0=0 & (4)\end{cases}$$

对（4）任何x、y都满足，而任给x值x_0，可求出y_0，

$$3x_0+4y=2$$

$$y=\frac{2-3x_0}{4}$$

故

$$\begin{cases}x=x_0\\ y=\dfrac{2-3x_0}{4}\end{cases}.$$

是此方程组的解。其中 x_0 为任意数，而且凡是此方程组的解都有上述形式。由此可见，一个方程组若有无穷多组解，那么这一堆解也绝不是杂乱无章的而是有一定规律的。上题中如果用 t 代替 x_0 表示变量，那么此方程组的解是

$$\left(t,\frac{1}{2}-\frac{3}{4}t\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)+t\left(1,-\frac{3}{4}\right)$$

其中 $(0,\frac{1}{2})$是$3x+4y=2$的一个特殊解，而$(1,-\frac{3}{4})$ 是相应齐次方程的一个特殊解。原方程组的解等于原方程组的一个特殊解加上相应齐次方程的特殊解乘一变数 t 。

代入消元法与加减消元法也适用于多元方程。

例，

$$\begin{cases}x+y-z=1 & (1)\\ 8x+3y-6z=1 & (2)\\ 3z-4x+y=1 & (3)\end{cases}$$

解。由（1）很容易把 z 用x、y表示，故考虑消去z。由（1）得

$$z=x+y-1 \qquad (4)$$

把（4）代入（2）式得

$$8x+3y-6(x+y-1)=1$$

整理得

$$2x-3y=-5 \qquad (5)$$

把（4）代入（3）得：

$$3(x+y-1)-4x-y=1$$

整理得

$$2y-x=4 \qquad (6)$$

（6）×2＋（5）得

$$y=3$$

于是

$$x=2$$

$$z=4$$

故原方程组的解为

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

从这个题解法中，我们看到代入消元法与加减消元法交替使用，那个方法对解题方便就用那个方法。在教学中要让学生灵活应用，结合算题具体分析用什么方法好。

例.

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 & (1) \\ 2x+4y+\ \ z=7 & (2) \\ 3x+2y+9z=14 & (3) \end{cases}$$

解. 在解之前观察一下，发现方程（1）与（3）x、z 的系数成比例，因此只要（3）减去（1）的 3 倍就可以解出 y 来，然后再求出x、z。

§11·3 行 列 式

行列式是解线性方程组的重要工具。教学中行列式的引入方法是用加减消元法解方程组求出 x、y 的表达式，以此式的分母定义行列式的概念。在行列式教学中，学生对行列式的概念不清，好象认为行列式是个式子或是个表，其实质行列式最关键是它的值，构成行列式的元素可以是数或字母，取一些值时它的值是多少？这是行列式的本质。行列式的性质是为计算行列式用的，在中学阶段行列式的性质只是就三阶情况证明，对任意阶行列式证明不做要求，它可以用数学归纳法证明，也可以从定义出发证明，还有用其它性质证明的，任何一本高等

代数书上都有它的详细证明。讲完行列式的性质之后，教师可留必要习题，以巩固所学知识，但不必留更多的烦杂的行列式的计算，实践证明是不必要的，目前它处于减弱地位。

二阶行列式概念的引入与二元一次方程组的讨论

用加减消元法解二元一次方程组。

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

为消去y只须

(1)$\times b_2$、(2)$\times b_1$得

$$\begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 & (3) \\ a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1 & (4) \end{cases}$$

(3)-(4)得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \qquad (5)$$

解(5)

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (6)$$

用同样办法可求出y

$$y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (7)$$

由(6)、(7)看出当$a_1b_2-a_2b_1\neq0$方程组有唯一解。

$$a_1b_2-a_2b_1\neq0 \rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

若$a_1b_2-a_2b_1=0$则可分两种情形

(i)$c_1b_2-c_2b_1\neq0$时

则x无意义，即方程组无解。

$$c_1b_2-c_2b_1\neq0\longleftrightarrow\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \qquad (8)$$

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \qquad (9)$$

由（8）、（9）知

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

此时（7）式无意义，故y不存在

由此知 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$时

方程组无解。

(ii)当$c_1b_2-c_2b_1=0$时

则x可为任何值都满足

$$x\cdot(a_1b_2-a_2b_1)=c_1b_2-c_2b_1$$

由

$$c_1b_2-c_2b_1=0 \text{ 且 } a_1b_2-a_2b_1=0$$

得 $c_2a_1-c_1a_2=0$

故对任何y有

$$y\cdot(a_1b_2-a_2b_1)=c_2a_1-c_1a_2$$

于是原方程组有无穷多解。这种方程为不定方程。

即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$时方程组有无穷多解。

综上讨论可如下分类：

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \text{方程组有且只有唯一解} \\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \begin{cases} \frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \text{方程组无解} \\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \text{方程组有无穷多解。} \end{cases} \end{cases}$$

有了这个表二元一次方程组的讨论全部解决，这时让学生回忆一元一次、一元二次方程讨论是有益处的，二者完全类似。这个表有三

方面作用。

（1）任给二元一次方程可以不用求出解来，就能判定解的情况。数学上称之为定性分析。

（2）教师用此表可以很方便的自编方程组习题，并可以保证编出来的习题只有唯一解，还是无解或有无穷多组解，而不必翻教科书或教案上的习题，因为这些条件是充分且必要的。

（3）由此引出行列式的概念，因为这里出现三组四个数的多项式都具有 $ad-bc$ 形式，为便于记忆，我们用一个符号表示。这个符号是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

它代表a、b、c、d的积的代数和，这个数完全由a、b、c、d的值决定。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

称为二阶行列式。

为巩固二阶行列式定义，可从随便给四个数求其行列式。注意学生对行列式符号| |误认为也是绝对值，这只要给出几个值取负数即可避免发生。$|-3|$若是行列式，则$|-3|=-3$，若是绝对值，则$|-3|=3$。

有了二阶行列式的概念，二元一次线性方程组的解立刻变的更整齐了。

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

同时可以看出未知数x、y可完全由它的系数和常数项来决定。其分母是由x、y的系数组成的系数行列式，而分子是把分母行列式中所求未知数的系数换成了常数项。这不是偶然现象，这种思想进一步发展，由瑞士数学家完成著名的克莱姆法则解线性方程组，它适用于系数阵