东北师范大学函授講义

算术

遼寧人民出版社

东北师范大学函授講义

算　　　術

东北师范大学函授教育处編
刘孟德編譯
朱靜航校閱

遼寧人民出版社
1956 沈陽

算　術

东北師範大學函授教育处編

刘孟德編譯

朱靜航校閱

☆

遼寧人民出版社出版（瀋陽市軍署街23號）

瀋陽市書刊出版業營業許可證文出字第1號

沈陽市第一印刷廠印刷　新華書店沈陽發行所發行

787×1092粍$\frac{1}{32}$·$10\frac{5}{8}$　印張·260,000字　印數：60,040—80,048

1955年9月第1版　1956年7月第2次印刷

統一書號：7090·12

定價（6）0,85元

前　　言

本書原是東北師範大學數學函授專修班的講義．它主要是根據蘇聯 Б. А. Тулинов 和 Я. Ф. Чекмарев 著的師範學校所用的算術，並結合我國實際而編譯的．兩年來，經過東北各地區的函授學員及教師進修學院試用的結果，大家一致認爲它可以作爲初中算術教師教學工作的參考．

當編譯這本書的時候，我系各室許多教師曾給予協助，並提出了很多寶貴意見；試用當中，又有許多函授學員來信和進修學院的老師提出批評，根據他們的意見又重新加以修改．在此，謹向這些同志致謝．

由於個人學識有限，時間又很倉促，錯誤之處，仍在所難免；希望讀者們多提意見，以便再版時修改．

最後，本書原稿經我系系主任朱静航同志校閱，並提出許多指導性意見，在這裏一併致謝．

編　譯　者

一九五四年十二月三十日於東北師範大學數學系

目　錄

前　言

第一篇　整　數

第一章　自然數（正整數）概念

第二章　進位制

第三章　加　法

第四章　減　　　法

第五章　乘　　　法

第六章　除　　　法

第七章　和、差、積、商的變化

第八章　度量、米突制

第二篇　倍　　數

第九章　倍數基本定理

第十章　倍數的性質

第十一章 若干個數的最大公約數

第十二章 最小公倍數

第十三章 質數定理

第十四章 數的分解

第十五章 利用數的分解求已知數的最大公約數及最小公倍數

第三篇 分 數

第十六章 普通分數

第十七章 分數運算法

第十八章 小 數

第十九章　小數和普通分數

第二十章　近似計算

第二十一章　比和比例

第二十二章　比例理論的應用

第一篇 整　數

第一章　自然數(正整數)概念

§1. 算術研究的對象

算術是研究數、數的性質及其運算的科學，因之算術的主要任務在於確定數的概念，發展數的概念，並研究數與數間的關係及其運算性質等. 關於數的研究是現代數學中最重要的部分，同時也是比較困難的部分，本書僅能就有關算術的一些基本問題作簡單的敘述. 關於正的整數與分數這些問題嚴格的及完善的敘述，就遠超出本書的範圍了.

關於數的相互關係及其運算性質的研究，不僅對於某些特殊數而且對於任意數也是有效的. 因此對這些問題的研究是具有重大意義和價值的.

在算術裏爲了研究這些一般的關係，我們常利用拉丁字母 a、b、c …來表示數. 例如，在等式

$$a+b=16$$

中，字母a及b表示着某些數值，如a＝14，b＝2等.

又如在等式

$$a+b=b+a$$

中，字母a及b表示着任意數，也就是說a及b看成任意數時，這個等式都是正確的，當然也包含着 a＝14，b＝2 的情形在內. 不過第一個等式不能表示數的一般的性質，而第二個等式就可以表示着一切數(整數及分數)的一般性質，那就是："和數"不因加數的順序的變更而變更.

今後對於一切數的一般性質的研究，我們將採取字母表示法.

§2. 自然數列及其性質

一、二、三、四、五、…等等這樣數°下去的每個數叫**正整數**，也叫自

然數. 自然數的概念導源於"集合"概念. "集合"就是指着圍繞在我們周圍具有某種特徵的一些單獨物體的總和,例如:一堆蘋果,一羣人,一雙手的五個手指,一班學生,甚至於一枝筆,都是一個集合. 組成集合的單獨物體稱爲集合的元素. 某集合中的元素的個數如果是有限個,則此集合稱爲**有限集合**;如果是無限個,則此集合稱爲**無限集合**.

"一"可稱爲數的**單位**. 任意一個自然數我們可以把它看成是由一個或某些個單位所組成的集合. 因爲,爲了組成一個任意集合,我們可以先取一個單獨的元素組成一個集合,由於計算這個集合所含的元素的個數,便得出自然數一(或稱單位). 把該集合中再加入一個元素,則其中元素的個數,便是由單位加單位而得,這樣便得出自然數二;若再重新於該集合中加入一個元素,則集合裏元素的個數,便是由單位加單位再加單位而成,從而得出自然數三,如此類推;我們便可以得出自然數一、二、三、四、五、六、…等等. 很明顯,由以上所述,我們每次把數一(單位)加到一個已知的數上,便構成一個數列(集合)一、二、三、四、…,這種數列稱爲**自然數列**. 這個數列是一個無限數列,因爲我們可以使其中任何一個數上添加一個單位,便可得出它後面繼續的一個新數. 例如將三加上一個單位便得出後面的數四,等等.

自然數列的集合,有下列的特性,即它們的元素(數)是嚴格的依照一定的順序排起來的. 因此我們可以知道某一個元素位於另一個元素的前邊,或某一個位於另一個的後邊,及某一個是開始的元素. 這種集合及與此相類似的集合統稱爲**整序集合**. 例如某班學生按身體的高矮而編排的座次,便是一個整序集合.

由以上所述,可知自然數列中每一個數都有它一個固定的位置. 因之自然數除了表示集合裏的數量外,在計算過程上,它又可以表示着某整序集合裏的已知元素所佔有的位置的順序數(有序數). 從順序數的觀點,我們又可以得出在自然數列裏,(a)兩相等的數是自然數列的同一數;(b)若一數位於另一數的後面,則該數就大於另一數,反之,若一數位於另一數的前面,則該數就小於另一數.

下述公理表示着自然數列的性質:

(1) 一(單位)是自然數;

(2) 接續於每個自然數後面的後續數,有一個且只有一個;

（3） 兩個自然數的後面，如有同一個後續數，則該兩數相等；

（4） 自然數一的前面不存在任何數；

（5） 已知某一個性質，對於自然數一是眞實的；若是它對於某一個自然數是眞實的，而且它對於該數的後續數也是眞實的，則此性質對於一切自然數都是眞實的.

§ 3. 數的起源、數°數公理、數°數過程

我們知道，位置概念是與自然數有着密切的聯系的. 設將一些物體排列成一定的順序，而令其中的一個物體與數一相對應，並稱它爲第一；令次一物體與數二相對應，並稱它爲第二；再次一物體與數三相對應，並稱它爲第三，等等；如此繼續的使各個物體與數1,2,3,4,…相對應，這樣就產生了數°(這裏所說的數是我們習慣上所謂數物體的數°字). 當數°至該集合的最後元素時，則與此元素相對應的數，就是該集合所含元素的個數.很明顯，這樣數°的結果是與數的順序無關的.例如，我們數°教室裏的學生數，無論按何種順序來數°，如按姓氏的排列來數°，按年齡的大小來數°，或按座位的前後來數°，其最後所得的結果都是相同的，這種特性稱爲**數°數公理**.

在數°集合元素的個數時，無論我們按什麼樣的順序，把其中的一切元素取出，使其逐次與自然數列中的數相對應，最後必定得到與已知集合元素個數相同的一個集合. 像這樣的計算方法，只有在人類的文化發展到相當高的階段時，才能逐漸的得到. 譬如我國古代的結繩記事，大事結大結，小事結小結，逐漸的變爲一件事結一個結，兩件事結兩個結，就充分說明了這一點.

如果兩個集合間的元素成一一對應，則此兩集合稱爲**等價**. 所謂一一對應，就是一個集合中每一個元素都可以與第二個集合中的唯一的一個元素相對應；反之，第二個集合中的每一個元素，也都可以與第一個集合中的唯一的一個元素相對應. 對於兩個集合成等價的判定，不一定能產生數°的關係；因爲等價集合的判定，只要確定出元素成對應就够了. 我們從等價集合的研究中所得出來的結論，應用在與此集合成等價的其他集合上，也是有效的.

在實施算術運算時，我們一般都是利用具體的且是以往經驗所得

來的集合：如手指、石塊、算籌、算珠等，作爲等價集合類的代表集合，在這種意義上並可作爲數的實際代理者．事實上，因爲等價集合類的標記，是屬於該類中任何集合的．如果所研究的集合，與所選出的標準集合之間，有一一對應關係，則所研究的集合可以用標準集合（如手指的集合、石塊的集合、算籌的集合、算珠的集合等）來代表．在選擇作爲等價集合類的代表的標準集合時，應以易解性、習慣性、不變性、熟習性爲基準．

如以手指：大指、食指、中指、無名指、小指作爲元素的標準集合就是一個例子．

很明顯，如果某集合以"小指"爲標記，意即該集合是屬於以自然數5爲標記的集合類中的集合，因之，數5就稱爲"小指"．這種利用物體名稱，作爲計算時的名稱，是在數的最初發展階段就已經出現了的．例如，我國的"一"就是"余"，"二"就是"爾"的假借．

後來隨着時間的進展，這些名稱逐漸喪失了它的原始意義，在計算上也開始使用某些自然數的名稱．同時隨着文化的不斷發展，人類常常遇到的或所要研究的集合，比所使用的標準集合還要大，因之爲了確定一一對應關係，就必然要選擇一個新的標準集合——無限自然數列．這種數列的數是一個跟着一個並確定在一定的順序位置上的，而且是用來作爲標記及比較集合之價的數字的符號系統．

這樣一來，數°數的過程就歸結於：在所要研究的集合的元素，與在此時起着標準集合的作用的自然數列的數之間，建立起一一對應關係．數°數過程的最初階段，就是在於確立所要研究的集合與某標準集合之間的一一對應關係．

原始民族在數°數過程的初期，他們是採取很熟習的某一定集合的部分集合作爲標準集合，後來由於研究較大價的集合的必要性，才使該集合逐步擴大．他們最初所採用的標準集合的元素，多半是一隻手、兩隻手、脚、手腕及肘等．

由於標準集合元素順序的不變性，故人們就把在數°數時最後所用的標準集合的元素的名稱，來作爲所要研究的集合的標記．我們特用下面的例子來說明：

假設要計算某班學生的人數，我們就事先把他們排成一列，並使他

們逐次的由一開始呼出自己的號數，每人繼其前一人所呼出的號數而呼出自己的號數，這樣每個學生就得到一個號數．假設30是最後一個人所呼出的號數，由此可知全班有30個學生．每一個學生與30個數中的一數相對應，也就是說學生集合與數字集合成等價．如果我們從另外的集合，如學生的帽子、學生的鋼筆來數°，其數°的結果也是到30爲止，則這些集合與由1至30的三十個數的集合等價．顯然這一些集合都是彼此成等價的．因之我們就確定該等價集合的標記爲30.

總之，確定兩集合之價相等(等價)的原始方法和晚近的方法，對於數°物體來說，都存在着同一的原則，那就是使集合成一一對應的關係.

§4. 零

由以上所述，可知自然數是回答這樣的問題：已知集合中含有若干個元素．我們可以說最小價的集合中含有一個元素.

如果集合中一個元素也沒有，便引導出空集合的概念．譬如說一個學生也沒有的小組，或者一個錢也沒有的錢包(它是空的)，這些都是關於空集合的問題．在這種情形下，若回答"集合中有若干個元素"的問題，我們就說是零．所以零也是數，它是空集合類的標記.

顯然的，0與自然數沒有關係，也不能從自然數列中得到它．但是理論上總希望將0放入自然數列內，並適當的將0放在1的前面，寫爲0、1、2、3、4、…，這是有益的，通常稱它爲擴大自然數列.

關於擴大自然數列中的頭一個元素是0而不是1這件事，是沒有理論方面的原則作爲根據的.

§5. 自然數的性質

自然數列中的一切數都有下列性質，它是不加證明而被採用的眞理：

1）反射性：一切自然數的自身相等($a=a$)；

2）對稱性：若自然數a等於自然數b，則b亦等於a；

3）傳遞性：若自然數a等於自然數b，而自然數b等於自然數c，則a等於c.

第二章　進　位　制

§ 6. 進位制的概念

上一章裏已經講過，由於數°物體的數目，而產生自然數。自然數的表示方法，世界各國通常都採用十進位制，即低位上的十個單位組成高位上的一個單位，"十"特名爲**基礎數**．又進位制是依照基礎數的不同，以確定其專門名稱．例如：以數12爲基礎數的進位制，就稱爲十二進位制；以數2爲基礎數的進位制，就稱爲二進位制．應用進位制所表示的數，就稱爲**進位數**．一切進位制的基本原則是：**某個確定的單位數組成次高位上的一個新的單位，此確定的單位數就是進位制的基礎數．**

多數民族，在有文化的初期，由於實際生活的需要，都或多或少的創造出一個比較完整的進位制；但是用專門數碼來表示數的書寫方法，却產生的很晚；甚至於像古代希臘及羅馬那些有高度文化的民族裏，用數碼來表示數的書寫方法也是極不完整的．直到紀元初年，印度人才初步的應用了幾個數碼，並利用一定的進位制來表示數．他們首先提出了**符號的位置意義**，即在一已知數中，同一符號因其所處位置的不同而有不同的意義．這一天才的思想，解決了數的表示法和寫法．

當我們採用某數k作爲數的進位制的基礎數時，在計算上就要用到下面各列的數：

1）$1, 2, 3, 4, 5, \cdots, (k-1)$；

2）$k, 2k, 3k, 4k, 5k, \cdots, (k-1)k$；

3）$k^2, 2k^2, 3k^2, 4k^2, 5k^2, \cdots, (k-1)k^2$；

…………………………………………

$(n+1)$　$k^n, 2k^n, 3k^n, 4k^n, 5k^n, \cdots, (k-1)k^n$．

這樣，在以k爲基礎數的進位制中，任何一個數N，都可以用下列和的形式來表示：

$$N=a_n\cdot k^n+a_{n-1}\cdot k^{n-1}+\cdots+a_3\cdot k^3+a_2\cdot k^2+a_1\cdot k+a_0,$$

而$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots a_{n-1}, a_n$各爲表示數0至$k-1$間的數．

例如：以7爲基礎數的進位制，則任何自然數N，就可以用和的形式表示爲：

$$N=a_n\cdot 7^n+a_{n-1}\cdot 7^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 7^2+a_1\cdot 7+a_0,$$

而a_0，a_1，a_2，…，a_{n-1}，a_n各爲表示數0，1，2，3，4，5，6的符號.

當着單位的數目等於基礎數時，它就可組成爲高位（第二位）上的一個單位．故對於任何種（以符號位置意義爲基礎）的進位制，基礎數可以用單位後帶零的符號來表示．而一數以某種進位制表示時，這種進位制的基礎數不必再有特殊的符號．

用0及表示數1至9的符號和位置意義的進位制，首先出現於印度，大約在第八世紀才傳入阿拉伯，阿拉伯人又於第九世紀傳入歐洲．因爲它是以10爲基礎數，特稱爲**十進位制**．

§7. 十進位制的讀法

最初的十個數，有互不相關的十個獨立名稱：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十．而數10是進位制的基礎數，並用之來表示新的計算單位．這樣就大大地簡化了大數的口述與書寫的方式．

十進位制記數法的主要規則：

（1） 任何位上的十個單位，組成次高位上的一個單位．

（2） 由一開始數° 起，最初所得的九個數，是屬於第一位（或末位），特稱爲個位數．十就是第二位上的一個單位．故

第1位上的單位稱爲個，

第2位上的單位稱爲十，

第3位上的單位稱爲百，

第4位上的單位稱爲千，

第5位上的單位稱爲萬，

第6位上的單位稱爲十萬，

第7位上的單位稱爲百萬，

第8位上的單位稱爲千萬，

第9位上的單位稱爲億，

第10位上的單位稱爲十億，

第11位上的單位稱爲百億，