数学课程与教学论丛书 1

丛书主编 赵焕光

相识数学逻辑

黄忠裕 赵焕光 著

科学出版社
www.sciencep.com

数学课程与教学论丛书 1

相识数学逻辑

黄忠裕 赵焕光 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从人文的视野、逻辑的观点、数学的特色人手，用通俗的语言、生动的例子(包括小故事)，介绍以中学数学知识为主要载体的数学中的逻辑基础知识，以及逻辑在数学中的应用. 主要内容包括：逻辑中的概念与数学概念、逻辑中的命题与数学命题、逻辑中的推理与数学推理、逻辑中的论证与数学证明，最后一部分简介逻辑规律、逻辑缺口及辩证逻辑等相关知识.

本书适合数学教育专业硕士生、数学应用专业硕士生、大学数学系在读本科生、中学智优生、中学数学教师、高校相关专业的数学教师阅读参考，也可作为数学教育硕士专业及数学师范本科高年级相关课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

相识数学逻辑/黄忠裕，赵焕光著. —北京：科学出版社，2010
(数学课程与教学论丛书；1)
ISBN 978-7-03-028711-3
I. 相… II. ①黄… ②赵… III. 数理逻辑 IV. ①O141
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 161674 号

责任编辑：王丽平 唐保军／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：15 3/4
印数：1—3 000 字数：307 000

定价：38.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

众所周知, 数学与逻辑都标榜自己是最严密的科学, 或者说, 两者都认为自己是最"讲道理"的科学. 这种观点, 也许存在较大争议. 但是, 数学常常把逻辑的严密性作为自己的生命源泉, 逻辑也常常把数学证明的严密性作为自己的强大支撑, 两者形影相依、互不相离却是不争的事实. 逻辑对数学无疑是非常重要的, 没有逻辑就会让数学陷入"是非之地"; 但数学又不能太拘泥于逻辑, 只有逻辑的数学往往会很"呆板".

以撰写数学和经济学参考书闻名的日本教育家细野真宏认为, 学习数学的意义是"培养逻辑思考的能力". 日本著名数学教育学家小仓金之助则认为数学教育的意义在于"开发科学的精神", 科学精神最核心的部分就是"求真", 数学科学的求真就体现在逻辑证明上. 因此, 数学学习与数学教育都离不开逻辑精神元素的培育, 当然仅仅强调逻辑能力的培养, 对于数学教育来说是远远不够的. 我们认为, 数学教育应该在"讲逻辑"与"讲创造"之间寻找合理的平衡点. 本书作者基于"布道"的想法, 面向中学数学教师宣传逻辑的精神, 以尽我们的一点微薄之力, 同时也为提高数学课程与教学论硕士研究生及师范本科毕业生的数学逻辑修养作一些尝试. 如果学子或者同仁能从本书中得到一点有益借鉴, 那么我们就能为自己的辛勤付出而感到万分欣慰.

在第 1 章里, 我们把逻辑中的概念与数学中的概念融合在一起介绍. 包括概念浅说、概念分类、概念关系、定义概说、概念划分、概念限制与概括. 我们认为, 在这一章中出现的逻辑故事《一物三吃》、《丰子恺画画不要脸》、《公孙龙诡论: "白马非马"》、《"给"不行, "拿"可以》、《生死一知己, 存亡两妇人》、《柏拉图的人》、《卓别林不吃"美国鸭"》对理解概念的相关话题是有帮助的. 第 2 章包括三部分: 逻辑命题概说、数学命题概说和逻辑代数基础. 逻辑代数的基础部分已进入新课改后的高中数学课程, 逻辑代数还与电路设计密切相关, 有兴趣的读者不妨一读. 这一章中的逻辑故事《巧媳妇智斗刁知府》、《名落孙山》、《张齐贤巧断分财不均案》、《阿凡提凭智慧化险为夷》及逻辑代数的背景介绍, 我们认为值得向读者推荐. 在第 3 章中, 我们将逻辑中的推理与数学中的推理融合在一起介绍, 这是全书篇幅最长的一章, 主要内容包括推理概说及演绎推理、归纳推理、类比推理三大推理. 这一章中的逻辑小故事《商纣王的象牙筷子》、《狗和海螺》、《某公请客》、《马克·吐温的道歉声明》、《铁齿铜牙纪晓岚》、《聪明知县巧断案》、《土耳其商人找助手》、《郑人买履》、《少年哈利森》、《围魏救赵》、《孙思邈巧治脚气病》、《增兵

减灶》、《鲁班发明锯子的故事》、《邹忌比美》、《东施效颦》对更好地理解推理是有益的. 本书第 4 章的重心是数学证明的基本理论, 包括数学证明概说、间接证明与反驳、分析法与综合法以及数学归纳法. 我们认为, 这一章中的逻辑小故事《胸中有圣人》、《欧拉用数学证明神存在》、《数学证明会让人饿肚子》、《一个鸡蛋的家当》、《超人的轶事》、《赫尔岑的幽默》、《杀老和尚会变成老和尚吗?》、《李白是西域胡人?》等对更好地理解数学证明的意义也是有帮助的. 本书第 5 章分三部分: 逻辑规律、逻辑缺口及辩证逻辑. 本章偏重于"理论", 如果仅从"效用"的角度看, 不读也无妨. 我们也认为, 本章中能解读逻辑规律的趣味小故事《人的头上能长出角》、《进化论辩论》、《祁黄羊荐贤》、《蟠桃献寿》、《孔子因人而答》、《兔子感冒》以及二难推理趣味小故事《鳄鱼承诺》、《岛国古怪法律》与《班婕妤巧语避祸》值得向读者推荐.

本书的写作思路及整体构思由两位作者共同商讨确定, 黄忠裕提供初稿, 由赵焕光作若干调整并完成修改稿. 赵焕光的妻子钱亦青女士任劳任怨, 对书稿的文字打印及电脑排版付出很多的时间, 倾注大量精力, 本书作者在此对她表示万分的感谢!

我国著名数学教育家张奠宙教授、浙江省原数学普委会主任王祖樾教授对本书的初稿提出了许多宝贵的修改建议; 我们的同事应裕林副教授、方均斌副教授也提出许多有益的建议; 我们的研究生李群芳、常改利、郭志辉、严晓秋也在书稿的文字修改方面帮了许多忙; 本书的出版得到浙江省教师教育基地温州大学建设点、温州大学数学与信息科学学院、温州大学数学课程与教学论团队出版经费资助; 在此一并表示感谢!

温州大学数学学院
黄忠裕　赵焕光
2010 年 6 月

目　录

第1章　数 学 概 念

按照认识论的观点, 人类依靠思维认识世界. 概念是思维的细胞, 没有概念, 思维无法进行. 在日常活动中, 人们交流思想需要运用概念. 同样, 人们理解数学、运用数学、交流数学思想需要运用数学概念. 数学概念是构成数学知识体系的基础, 没有数学概念, 庞大的数学知识体系就无法构成. 数学概念要明确, 如果数学概念不明确, 人们在数学活动中就无所适从. 明确数学概念就是明确数学概念的内涵与外延, 明确数学概念的主要逻辑方法有定义、划分、限制与概括. 本章将讨论与概念相关的基本话题.

1.1　数学概念浅说

引子　一物三吃

有一天, 国王将一个铜板给他的仆人, 限他在三天之内买回一件"一物三吃"的食品, 如果买不回来, 就要杀他的头. 两天过去了, 东西还没有买到. 仆人拿着铜板坐在街上的角落里正发愁. 这时阿凡提正好路过此地, 他走上去问他为什么愁眉苦脸. 仆人说: "你看, 天下哪有这样的道理! 国王给我一个铜板, 限我三天之内给他买一个'一物三吃'的食品, 我到处打听, 谁也不知道哪儿有这种东西. 今天已经是第三天了, 太阳下山之前要是买不着, 我就活不成了!" 说着说着就"呜呜"地哭了起来. 阿凡提听了以后, 满有把握地说: "别害怕! 不就买'一物三吃'的东西吗? 我帮助你去买." 然后拉着仆人在街上买了只哈密瓜, 便一起去见国王. 国王一看仆人捧着一只普普通通的哈密瓜, 龙颜大怒, 立即叫刽子手来砍仆人的头. 阿凡提走上前, 说道: "陛下, 请慢点下令! 您的仆人已经满足了您的要求. 这哈密瓜就是你所要的'一物三吃'的食品. 第一, 瓜瓤, 您可以吃; 第二, 瓜皮, 羊可以吃; 第三, 瓜子, 鸡可以吃." 国王一听, 虽然不符合自己的本意, 但是阿凡提所说的话, 句句都合乎情理, 于是就放了仆人.

评注: 在这个小故事中, 国王所说的"一物三吃"的食品是一个意义不明确的概念. 他可以指一种食品有三种吃法; 也可以指一种食品本身是由三个可吃的部分组成; 还可以指一种食品可以由三种动物来把它吃掉; 等等. 阿凡提就是利用国王使用"一物三吃"概念上的含混, 用一只极平常的哈密瓜, 做出了合乎"一物三吃"要求的解释. 在日常生活中, 人们讨论任何事情的前提是概念要明确. 如果概念不

明确, 就会发生一些非常搞笑的事情. 在这一节中, 我们将讨论如何明确概念的话题.

1.1.1 数学概念界定

按照形式逻辑的观点, 概念是反映事物本质属性的思维形式. 按照数学哲学的观点, 数学概念是反映并确定数学对象 (现实世界与可能世界中的空间形式与数量关系) 的本质属性的思维形式. 数学概念是数学思维形式在一般意义上不再进行分解的基本单位、基本元素或“砖瓦材料”.

在现实世界中有许许多多的事物, 它们有各种各样的性质 (颜色、硬度、长度等), 而且每件事物与其他事物具有这样那样的关系 (如大小、包含于等), 通常把有关事物的性质与关系, 称作事物的属性. 属性分为本质属性和非本质属性. 本质属性是决定一事物之所以成为该事物, 并与其他事物相区别的属性; 不是一事物所独有的属性, 称其为非本质属性. 比如在几何学中, “*由一个公共端点的两条射线组成的图形*”是 “角” 这个事物所独有的属性, 由这个属性把 “角” 和其他几何图形区别开来, 而位置的不同则不是 “角” 所独有的, 因而不是 “角” 的本质属性. 又如 “能用语言表达思维” 是人的本质属性, “有生命体征” 不是人的本质属性.

1.1.2 数学概念特征

在普通逻辑学中, 一个概念的本质属性的全体, 叫做概念的内涵, 通常也叫做概念的含义; 一个概念所概括或涉及的具体对象的全体, 叫做概念的外延, 通常也叫做概念的适用范围. 概念的内涵与外延, 是概念的两个重要特征, 它们分别代表概念质与量的两个方面. 内涵是质, 外延是量. 内涵规定了外延, 因为只有相同本质属性的事物, 才是这一概念所反映的事物; 反之, 外延也限制了内涵, 因为只有从概念所反映的事物中才能概括出共同的本质属性, 即这一概念的内涵. 因此, 人们运用概念认识事物时, 既不能忘记概念的内涵 (本质) 也不能忘记概念的外延 (对象). 概念的内涵有多少、深浅之分, 概念的外延有大小、广狭 (宽窄) 之分. 概念内涵的多少决定了概念外延的大小, 概念的内涵与外延存在着一种反变关系:

如果概念的内涵增加, 那么它的外延就缩小; 反之, 如果概念的内涵减少, 那么它的外延就扩大.

以上论述完全适用于数学概念. 例如, 平面几何中的多边形的内涵包括两个本质属性: ①若干条线段首尾连接; ②封闭图形. 四边形的内涵包括两个本质属性: ①多边形 (包括多边形的全部内涵); ②有四条边. 平行四边形的内涵包括两个本质属性: ①四边形 (包括四边形的全部内涵); ②两组对边分别平行. 矩形的内涵中包括两个本质属性: ①平行四边形 (包括平行四边形的全部内涵); ②有一个内角是直角. 由此可以看到:

{多边形的内涵}⊂{四边形的内涵}⊂{平行四边形的内涵}⊂{矩形的内涵}.

{矩形}⊂{平行四边形}⊂{四边形}⊂{多边形}.

大家知道, 在日常生活中, 谈论任何事情, 都必须首先做到概念明确. 所谓概念明确, 实际上就是指明确概念的内涵与外延. 这就是说, 只有当完全掌握了某一概念的内涵与外延, 才称这个概念是明确的. 因此, 掌握一个概念的内涵与外延的程度, 就是衡量人们对这个概念明确到什么程度的标准. 如果一个人对他所使用的概念不明确, 那么他就谈不上准确地使用这个概念. 其实, 在现实社会里, 有些不必要的争论就是由于概念不明确造成的. 以下这则笑话就是如此:

某位数学老师总是因为一名学生的不断提问而不能正常进行教学. 有一天, 这位老师做了一个决定, 走进教室后对那名学生说: "每堂课总是因为你而影响上课. 从今往后, 每堂课只允许你提两个问题."

于是, 这名学生问道: "只能提两个问题吗?"

老师回答说: "现在还剩一个问题了."

显然, 老师这里的 "问题", 指的是所有问题, 而学生对 "问题" 的理解, 指的是数学问题, 各说各的, 就闹出笑话来了.

另外, 一般人都很容易犯概念模糊的逻辑错误. 例如, 有一篇报道这么写道: "这次火灾造成的经济损失, 相当于全厂工人创造的全部产值的两倍." 这里的 "全部产值的两倍" 是一个模糊不清的概念. 到底是 "全年的全部产值的两倍", 还是 "全月(或者一天) 的部分产值的两倍" 没有清楚交代, 也就是说, 这里概念的内涵与外延都是不清楚的, 因而人们就无法准确明白其含义.

同样道理, 数学概念明确对于讨论数学问题是至关重要的. 数学家的看家本领, 就是能把概念弄清楚. 碰到一个数学问题, 数学家最常用的办法是先问一个 "是什么". 这与哲学研究有很大差异. 哲学对具体的东西作抽象的研究. 哲学研究世界上一切事物共同的普遍的规律, 研究人如何认识世界, 研究概念的意义. 这些被研究的东西是具体的, 一般人都可以想象, 可以把握. 但是数学是对抽象的东西作具体的研究. 数学研究的东西使人难以想象, 高维空间、非欧几何、超限数、豪斯道夫怪球, 达到高度抽象. 不是内行, 很难理解. 可是哲学命题却使人难以把握其确切含义. 比如, 哲学家常常说 "存在". 什么是存在? 使用存在这个概念要服从什么准则? 谁也没有清楚地阐述过. 又比如, 哲学家常常说 "事物", 什么叫 "事物"? 如何运用 "事物" 这个概念? 也没有界说. 哲学家的有些命题, 只可意会, 不可言传. 比如 "世界是物质的". 这是一条十分重要的哲学命题. 从常识出发, 人人能理解, 而且它是与科学的发现始终一致的. 但是如果从宇宙上追究, 那么究竟什么叫 "物质"? 如何证明世界是物质的? 这些都是很难回答的. 无论科学有了什么新发现, 也不可能否定这个基本命题. 它给人以启示, 给人以指导, 但你又抓不住它的具体内容.

数学研究的对象虽然抽象, 但是可以作具体的研究, 而且只能作具体研究. 数

学中的许多概念, 可以言传而不可意会. 用符号、语言, 一步一步可以讲得很严格, 很具体, 至于它究竟是什么, 由于抽象的次数太多了, 头脑中已难以想象. 可是概念在推理、论证中, 却决不含糊.

西方现代哲学热衷于把概念精确化, 这似乎是受了数学的影响. 但是, 哲学的本质是不精确的, 因为哲学的对象是科学的未知领域. 如果哲学像数学那样精确严格, 哲学也就成了数学的一部分, 不再是哲学了. 模糊的哲学与精确的数学, 它们构成了人类的望远镜与显微镜.

1.1.3 数学概念表达

按照普通逻辑学的观点, 任何一个概念都必须借助词语来表达. 概念是人们对一类事物的本质有了科学认识之后的概括. 因此, 人们可以理解它、描述它, 却无法感知它, 也就是说不能直接看到或摸到概念. 一个人要把头脑中的概念传达给别人, 必须借助于有声 (口头) 的或有形 (书面) 的词语. 表达事物概念的词语是描述该事物的声音或笔画的符号, 这种声音或符号之所以能表述事物, 就是由于人们的头脑中有相应的概念. 概念与表达概念的词语是相互依存的, 概念是其所表达词语的思想内容, 而词语则是概念的一种表达方式. 表达概念的词语通常超越了感知的直接性、形象性, 具有概念的概括性、抽象性、超越时空性, 于是有其巨大的能动性, 因而成了人们认识世界的得力工具.

在数学学科中, 凡常用的数学概念, 都有一个相应的词语表达它. 从严格的逻辑意义上说, 在还没有形成关于某类数学对象的概念时, 表达数学对象的词语作为一种语言识记信息, 称其为数学名词; 在形成某类数学对象的概念之际或其后, 识记数学对象的词语叫做数学概词, 也叫概念所反映的客观对象的名称. 通常将数学名称与数学概词混用, 人们在提及某个数学概念时, 只需指出其名称即可, 如自然数、函数、方程、行列式、对数、微分、定积分等.

在数学学科中, 通常还用数学学科专用的一种书面语言 (即数学符号) 表达数学概念. 如果说概念的名称是概念内涵集中概括的语言表达形式或语言结晶的话, 那么概念的符号便是概念名称在书面形式上的再度概括与集中, 它使概念内涵的书面表达找到了一种更加理想化的简明形式. 例如, 日常用语中"两个数 x, y 的平方和不超过 1"用数学符号"$x^2+y^2\leqslant 1$"既简单又明了. 大量的数学概念是用数学符号表示的. 在中学数学中, 就数学概念符号而言, 通常分以下四类:

(1) 表示数学具体概念的具体符号, 如 $\Delta, \odot, \pi, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \sin 30^\circ$ 等;

(2) 表示数学运算过程概念的运算符号, 如 $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }, !$ 等;

(3) 表示数学关系概念的关系符号, 如 $=, \neq, \equiv, \backsim, \Leftrightarrow, >, <$ 等;

(4) 不表示任何概念, 只在数学符号的组合、使用中起决定顺序或连接转折作用的辅助符号, 如 $\because, \therefore, \in, \{, \}$ 等.

此外, 表示数学概念的数学符号还可以按“结构”分为单一符号与复合符号. 例如, $\alpha, \Delta, \tan, +$ 等符号不能再进行分解, 称其为单一符号; 又如 $[a, b]$, $\sin 30^\circ$, $\tan\alpha$, $|a|$ 等符号由单一符号根据数学意义组合而成, 故可按意义进行分解, 称其为复合符号.

在数学科学中, 在确定的范围内, 数学概念与数学名称 (或数学符号) 通常是一一对应的, 不会出现混淆的情况. 然而在日常生活中, 概念与词语并不是一一对应的, 同一个概念可以用不同的词语来表达. 例如, “死” 是一种生理现象, 在汉语言中就有多种委婉的说法, 如用一个字表达有 “亡”、“故” 等; 用两个字表达有 “断气”、“长眠”、“逝世” 等, 用三个字表达有 “回老家”、“上西天”、“见阎王” 等, 用四个字表达有 “与世长辞”、“驾鹤西去”、“百年之后” 等说法. 另外, 同一个词语可以表示不同的概念. 通常意义下的 “大海” 的 “海” 字, 在内陆城市北京就有许多许多地方称为 “海”, 比如 “中南海”、“北海”、“什刹海”, 这里的 “海” 是蒙古语 “海子”(即花园) 的简称; 又如竞选中的 “海选” 等. 还有 “酷” 的本意是残酷, 现在社会上流行的 “酷” 却有英俊、潇洒、时尚的意思.

1.1.4 数学概念产生与发展的途径

数学概念产生与发展的途径有以下两条.

1. 直接从客观世界的现实模型中抽象概括出来

“抽象” 这个词源自拉丁文 abstractio, 它的原意是排除、抽出. 在日常生活中, 人们常常把抽象事物理解为不能为人们的感官所直接把握的东西. 因此, “抽象” 含有看不见摸不着之意. 在科学研究中, “抽象” 是指透过现象抽取事物本质的一种科学方法. 在数学中, 抽象就是指从研究对象或者向研究问题中抽取数量关系或空间形式而舍弃其他属性, 对其进行考察研究的逻辑思维方法.

在逻辑学中, 概括就是指从认识个别事物的特殊本质到同类事物的共同本质的一种逻辑方法. 抽象与概括紧密联系, 抽象可以只涉及一个对象, 概括则往往研究一类对象, 在对许多个对象的考察中寻找出共同的规律.

在数学中, 常常把抽象概括看成是一个统一的、不可分割的过程. 抽象概括是形成数学概念的一种数学逻辑方法. 数学中有许多概念的形成过程大致都是: 对一类事物的多个对象进行观察和分析, 抽象出每个对象的各种属性, 再通过归纳整理, 概括出各个对象的共同属性加以表述. 比如, 小学生形成长方形概念的过程中, 通常是通过观察课本的表面、课堂的表面、黑板的表面、地板的表面、玻璃窗的表面、象棋盘的表面等, 经过分析、比较可以抽象出颜色不同 (彩色、红色、黑色、灰色、无色等)、材料不同 (纸、木材、水泥、玻璃、塑料等)、大小不同诸多方面, 然后再通过归纳整理, 概括出所考察的对象所具有的共同点, 它们都是由四条边围成的封闭图形, 其对边相等, 而且它们都有四个角, 每个角都是直角, 从而形成长方形概

念. 又如, 自然数概念是从事物的计数过程中抽象概念得出的. 几何学中的点、线、面、体、平行、垂直等概念也是从形状及位置关系抽象概括出来的. 我们所熟悉的二次函数 $y=x^2/2$, 它是自由落体运动 (高度与时间)、匀加速运动 (距离与时间)、机械能 (动能与速度) 和热电学 (热量与电流强度) 等多种现象中变量之间关系的抽象概括.

2. 源自数学内部需要通过再抽象与理想化的数学方法创造出来

许多数学概念都是在抽象的数学概念的基础上经过多次复杂的抽象概括过程形成的. 比如 "复数" 的概念是在实数概念基础上产生的, "实数" 的概念是在有理数概念的基础上产生的, 又如数 "e" 的概念是由极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(1/n))^n$ 来揭示的. 有些数学概念源自数学理论研究的需要, 经过思维加工把客观事物的属性理想化、纯粹化得来. 比如, 高等数学中的无穷远点、无穷大等. 还有一些数学概念源自解决数学内部矛盾的需要, 被 "形式化" 地引进来, 如 "虚数" 的概念, 历史上最初是由克服求解形如 $x^2+1=0$ 的方程中所出现的矛盾的需要, 虚数被 "形式化" 地引进来的. 随着数学知识宝库的不断扩大与发展, 形成数学概念的第二种方法将会越来越重要.

按照认识论的观点, 概念的形成需要一个历史过程, 随着事物的变化, 概念自身也是发展变化的. 一些概念在事物的变化和发展过程中, 反映对象的本质属性并没有发生根本变化, 但是随着人类认识的发展, 对概念的认识变得丰富、深刻. 人类建立起来的理论不断完善、科学技术不断进步, 事物的本质被揭示的可能性越大. 这样, 反映事物本质属性的概念随之发展, 因此, 概念具有发展性.

数学概念也是突出地表现为它的发展性. 数学中有不少概念, 特别是较原始的概念, 在揭示它的本质过程中, 往往要经历漫长的历史过程. 例如, 自然数概念, 从人类认识数开始, 直至集合论建立之后, 才由意大利数学家皮亚诺 (G.Peano) 于 1889 年用公理化形式给出了它的精确定义.

又如, 函数概念是随着数学的发展而发展的:

函数概念在 17 世纪已经引入, 牛顿在《自然哲学的数学原理》中提出的 "生成量" 就是函数概念的雏形. 最初, 函数是表示代数上的幂 $(x^1,x^2,x^3,\cdots)$. 其后莱布尼茨用 "函数" 表示随曲线的变化而改变的几何量. 进入 18 世纪, 莱布尼茨的学生瑞士数学家约翰 · 伯努利 (J.Bernoulli, 1667~1748) 把函数定义为 "由变数和常数所构成的任一式子", 强调函数要用公式表示. 其后, 瑞士数学家欧拉 (L.Euler, 1707~1783) 又将这个定义更加明朗化, 指出 "变量的函数是一个由该变量与一些常数以任何方式组成的解析表达式". 这样描述的对象不限于 "幂" 或 "几何量", 但还局限于一定要用解析表达式表示. 后来, 数学家认为这不是判断函数的标准. 只要一些变量变化, 另一些变量随着变化就可以有一种依赖关系. 所以, 1755 年, 欧拉又

在给出的另一定义中指出"如果某些变量, 以这样一种方式依赖于另一些变量, 即当后面的变量变化时, 前面的这些量也随之变化, 则将前面的变量称为后面的变量的函数". 这一定义中揭示了变量间的相依变化关系, 充分体现了"变化"、"运动"的观点. 后来, 随着运算的多样化, 新的函数表达式的出现, 特别是 1822 年法国数学家傅里叶 (Fourier) 发现了一些不连续曲线可以用一个三角级数的形式表示, 这一事实, 突破了函数就是解析式的局限, 推动了对函数本质的认识, 将过去函数概念中用曲线 (连续或不连续) 表达、用一个解析式表达、用多个解析式表达的方式都统一起来. 这个时期法国数学家柯西 (Cauchy) 引进了新的定义: "当变量之间这样联系起来的时候, 即给定了这些变量中的一个值, 就可以决定所有其他变量的值的时候, 人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的, 这时, 这个量就取名为自变量, 而由这些自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数." 这样, 人们比较清楚地认识到函数的本质不在于解析式的表达, 而是依赖关系.1837 年, 德国数学家狄利克雷 (Dirichlet) 给出这样的定义:"如果对于 x 的每一个值, y 总有确定的值与之对应, 那么将 y 称为 x 的函数." 这个定义, 引用了"对应"的说法, 抓住了函数的本质属性即对应关系, 而不再局限于"解析表达式", 体现了人们在函数认识上有了质的飞跃, 并且突出明确了函数的内涵. 只要有一个法则, 使得取值范围中的每一个值, 有一个确定的 y 和它对应就可以, 不管这个法则是公式、图像、表格还是其他形式. 随着数学自身的发展, 19 世纪 70 年代德国数学家康托尔 (Cantor) 创建了集合论, 人们在集合论的基础上建立了函数, 又形成了现代数学中函数的两种定义方式, 一般都称之为"映射说"(或"对应说") 和"关系说", 至此函数概念的两条本质属性 —— 处处定义性和单值性仅涉及集合概念就刻画出来了. 这样, 函数的概念在发展过程中不断得到严谨化、精确化、抽象化的表达. 其后, 函数概念又在不断发展变化 …….

1.1.5 数学概念存在性

"存在问题", 一直是人类所要面对的最大问题. 比如,"上帝" 是否存在的问题, 人类一直没有予以真正解决. 同样, 数学中的 "无穷", 数学家们也一直没有予以真正解决, 数学家们仅仅通过公理化的方法假设了 "无穷" 存在.

实际上, 数学中的存在, 是一种比较典型的理想存在. 数学思维中的每一个对象 (一个数、式、图形, 一条性质、法则、定律, 一种推理、论证等) 都不是在人的一般感知限度以内所能感知的具体存在的实事实物, 而是为了反映这些具体存在而从具体存在中提炼出来的理想存在.

另外, 数学存在也并非反映全部的具体存在, 而是仅只反映具体存在的结构、结构状态和结构状态从一种状态到另一种状态的变换过程. 这就是说, 数学中的存在性是在抽象 (形式化) 思维意义上谈论的, 如果不了解这一点, 就很难了解

数学.

人们在讨论问题时必须避免概念歧义, 否则将会引起不必要的误解、误会. 但在特殊的条件下, 巧妙地利用概念的歧义, 有意地使概念发生歧义, 往往会产生意想不到的艺术效果. 请阅一则与丰子恺有关的轶闻趣事.

附录 A　丰子恺画画不要脸

20 世纪 30 年代初, 上海《新闻报》有一天发表了一篇评论著名画家丰子恺的文章, 题目是: "丰子恺画画不要脸". 丰子恺看到题目后, 大吃一惊. 心想: 我与作者素不相识, 无怨无仇, 为何竟遭如此辱骂? 等到丰子恺读完全文后, 却发出了会心的微笑. 原来这篇评论, 分析了丰子恺画画的特点是人物脸部大都没有眼睛鼻子, 却惟妙惟肖, 生动传神.

评注: "不要脸" 这个词语既可表达品德低劣, 也可表达画画时没有画眼睛鼻子. 这位评论员在题目上借用俚语, 脱俗出奇, 取得了出乎意料的效果. 不仅引起当时读者的极大兴趣, 争相阅读, 从中了解丰子恺的艺术风格; 而且画家丰子恺本人也十分喜欢这篇文章, 以致 30 年后, 丰子恺老先生还记得这篇文章发表的年月日和作者的名字.

1.2　数学概念分类

引子　公孙龙诡论: "白马非马"

公孙龙是战国时期的逻辑学家 (名家). 有一次他牵着一匹马通过关卡, 守关的士兵说, 牵马的人不准过关. 公孙龙说: "我牵的是马吗? 我牵的是一匹白马啊." 守关的人没有办法, 只好让他过去了.

"白马非马" 是公孙龙反复论证的命题. 他是这样论述的: "马者所以命形也, 白者所以命色者也, 命色者非所以命形也. 故曰: 白马非马."

公孙龙认为, 从概念和它所代表的事实的关系来说, "马" 的概念用来表示形体, "白" 的概念用来表示颜色, "白马" 包括了两个因素, 而 "马" 却只指形体, 所以说 "白马" 不是 "马". 公孙龙还论证说, 在实际生活中, 当人们要马时, 各种颜色的马都可以给, 但人们要白马时, 黄马、黑马就不符合要求了. 可见, 白马不是普遍意义上的马.

评注: 公孙龙强调 "马" 和 "白马" 这两个概念在内涵和外延上的区别, 指出了个别和一般的互相排斥关系, 这在逻辑发展史上是有贡献的. 但他认为一般的抽象的马可以脱离具体的马而独立存在, 就割裂了一般和个别的辩证关系, 成了诡论. 这个诡论, 用集合论的语言, 即用集合与元素的关系很容易揭穿它. 无论是数学还是逻辑, 都需要把概念所属的类搞清楚. 本节介绍概念的常用分类方法.