应用型本科规划教材

浙江大学城市学院资助项目

CALCULUS

微积分学（下 册）

——面向独立学院理、工、经、管、医等专业

◆主 编 唐志丰 莫国良 吴明华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

应用型本科规划教材
浙江大学城市学院资助项目

微积分学（下册）

——面向独立学院理、工、经、管、医等专业

主　编　唐志丰　莫国良　吴明华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学. 下册/ 唐志丰,莫国良,吴明华主编. —杭州:浙江大学出版社,2010.1
应用型本科规划教材. 数学
ISBN 978-7-308-07323-3

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①唐… ②莫… ③吴… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 008812 号

内 容 简 介

本书是按照教育部"高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"的基本精神,为独立学院高等数学课程而编写的教材。

全书分上下两册,主要内容包括:一元函数微积分、无穷级数、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分。

本书可作为独立学院理、工、经、管、医类等专业高等数学课程教材,也可作为其他本科院校高等数学课程的选用教材。

微积分学(下册)
唐志丰 莫国良 吴明华 主编

责任编辑 徐素君
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州中大图文设计有限公司
印　　刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 13.5
字　　数 340 千
版 印 次 2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-07323-3
定　　价 26.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前 言

在全球经济一体化与科学技术快速发展的国际环境中，世界各国都竞相制定人才开发战略，大力发展高等教育，努力提高人力资本水平，中国独立学院的快速兴起就是新一轮高等教育发展的历史性选择；但独立学院的发展同时也要求与之相关联的各方面都要协调配套地发展，这其中教材建设就是相当重要的一环。

微积分是人类智力创造的最大成就之一，它有两方面巨大的功能。其一，它是解决数学物理、经济社会、工程与生物科学等领域中各种复杂问题的强有力的方法论工具。其二，它是锻炼与培养人类严密精确思维、逻辑抽象思维与几何直观思维的卓有成效的手段。正因为这样，普通高校的理工科系甚至文科系一般都在一年级开设微积分课程。

中国目前面向本科生的微积分教材林林总总，为数不少。但专门面向独立学院的微积分教材尚不多见。据查，现有独立学院在用的微积分教材大多采用国内流行的一般普通高校的微积分教材。

这些普通高校微积分教材大致可分为两大类：面向理工科类的与面向经管类的。面向理工科类的微积分教材较之面向经管类的微积分教材内容要多一些，全一些。比如大多数面向理工科类的微积分教材都包括场论初步，多元函数中的格林公式、高斯公式、斯托克斯公式，富里埃级数，二阶常系数微分方程的解等；而面向经管类的微积分教材则可能不涉及上述诸内容。此外，面向理工科类的微积分教材往往对 ε-δ 采用语言叙述极限理论，而面向经管类的微积分教材往往仅仅从数值的或直观的几何意义上来描述极限理论。

这类教材由于没有考虑独立学院学生的特点，也没有考虑独立学院的培养目标，因此内容往往叙述得较繁琐，习题的难易编配得不清晰，技巧大的问题没有很好地作分解。因此出版面向独立学院的、符合独立学院学生特点的微积分教材是非常有必要的。

浙江大学城市学院十分重视微积分教材的编写工作，先后两次投入资金，组织力量编写适合城市学院教学实际的微积分教材。第一次是 2002 年资助吴迪光、张彬两教授编写《高等数学教程》，该教程作为微积分(A)的教材一直使用至 2007 年。第二次是 2003 年资助莫国良、唐志丰两教师编写《微积分学教程》，该教材在试用一年后，由浙江大学出版社正式出版，它作为微积分(B)的教材一直应用至今。

该教材的主要特色是将微积分学相对直观的核心内容安排在第一、二学期进行学习，并冠以“直观微积分”的名称，而将繁难的部分放在第三学期让学生选修，并冠以“理性微积分”的名称。学生在学完了直观微积分部分内容后，将不影响后继课程的学习。实践表明，这种改革对独立学院的学生有较大的适应性，从几年使用的情况看，该教材在内容的选择与难易的取舍上比较适合独立学院学生的特点，师生反应较好。

但《微积分学教程》的内容与独立学院的教学管理还是存在一定的距离，主要表现在：一是该教材只适合于选学微积分(B)的学生，而选学微积分(A)的学生则需另选教材；二是重积分部内容的叙述还是嫌繁琐。此次新版，我们作了如下调整与改写：

一、本教材包含直观微积分与理性微积分两个体系，在主要章节中，其内容按一定次序编排，比如在极限与连续这一章，我们将先叙述极限的直观定义，然后再叙述极限的理性定义并叙述其各种性质(采用不同字体)。教师可以根据学生的水平与教学要求作一定的选择，比如，对经管类的学生，教师可以按直观微积分体系进行教学，对理工类的学生，教师既可按理性微积分体系进行教学，也可按直观微积分体系进行教学(根据教学要求而定)，带 * 号的作为选讲内容。这样，不同层次、不同要求的学生均可使用该教材。

二、在内容编排上进行了模块化设计，教师可以按不同专业要求进行模块选择。以多元函数积分学为例，经管类专业只需选择二重积分模块，理工类专业另加三重积分、曲线曲面积分两个模块。这样不同专业的学生(不管是理工类的学生还是经管类的学生)都可使用该教材。

三、重新编写了多元函数积分学部分。多元函数积分学部分对学生来说，一直是个难点，叙述得过分繁琐，对学生的学习十分不利。此版中，我们对该部分内容重新编写，力求简洁、明了，适合教师的教学与学生的学习。

本教材上册执笔人员：莫国良、唐志丰，其中第一章、第二章、第六章、第七章由莫国良执笔；第三章、第四章、第五章由唐志丰执笔。本教材下册执笔人员：唐志丰、莫国良、吴明华，其中第八章、第九章由唐志丰执笔；第十章由莫国良执笔；第十一章、第十二章、第十三章、第十四章由吴明华执笔。吴明华对全书进行了审阅。

真诚地感谢徐素君女士，她作为本书的责任编辑，在成书的过程中，始终给予了热忱的支持与帮助。

要感谢试用本教材初稿的各位任课教师，他们不仅在初稿试用之前花费了许多时间进行错误甄别，还在使用过程中不断地将错误加以纠正，并提出了许多宝贵意见。

我们还要感谢浙江大学城市学院的院领导与教务部的领导，没有他们的支持与关心，这项工作是不可能完成的。

由于成书仓促，诚盼有关专家、各校同行与广大读者给予批评指正，编者在此谨致谢意。

编　者
2009 年 7 月

目　　录

第八章 常微分方程初步

她出生时十分弱小，
但每个时刻都在长大。
她在大地上蔓延，
并震撼着周围的世界。
（这段话被公元 3 世纪一位主教用来形容数学的发展。）
引自荷马史诗《伊利亚特》

函数是客观事物内部联系的反映，利用函数联系可以对客观事物的规律性进行研究. 因此寻找变量之间的函数关系对解决实际问题有着重要的作用. 但在不少问题中，这种函数关系有时却不能直接找出，而往往只能先得到含有未知函数及其导数（或微分）的关系式，即微分方程，然后通过求解这种方程，求得变量之间的函数关系.

现实世界中，许多实际问题都可抽象为微分方程问题. 例如，物体温度的变化，种群个体数量的变化，化学反应中元素含量的改变，电磁波的传播等等，都可归结为微分方程问题.

微分方程是一门独立的数学学科，有完整的理论体系，但我们只介绍微分方程的初步知识. 本章先介绍微分的基本概念，再研究一些微分方程及其解法，然后列举若干来自微分方程模型的例子，以了解微分方程的广泛应用，最后介绍差分方程的一些基本概念及简单应用.

第一节 微分方程的概念

我们已经知道，函数的导数即为函数的瞬时变化率. 在许多实际问题中，反映某一现象变化规律的未知函数及其变化率往往满足一定的约束条件. 先看下面两个例子.

【例 1】 已知某一曲线上各点处的切线斜率与该点横坐标的平方之差为 2，且曲线经过点 (0,1)，求此曲线方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$，根据题意，未知函数 y 及其变化率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 满足约束条件

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x^2=2,$$

对此式进行移项得

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2,$$

由不定积分的定义可得

$$y=\int(x^2+2)dx=\frac{1}{3}x^3+2x+C,$$

因曲线经过(0,1)点,所以 $y\Big|_{x=0}=1$,代入 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+C$ 即得 $C=1$,从而求得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x+1.$$

【例 2】 实验表明,物体在自由下落过程中受到的空气阻力与物体下落的速度成正比.假设物体开始下落时初速度为零,求物体在开始下落 t 秒后的瞬时速度 $v(t)$.

解 设空气阻力与物体下落的速度的比例系数为 k,则作用在此物体上的合力

$$F=mg-kv(t),$$

由牛顿第二定理得

$$mg-kv(t)=ma,$$

而瞬时加速度 a 就是 $v(t)$ 的瞬时变化率,即

$$a=\frac{dv(t)}{dt},$$

由此可得未知函数 $v(t)$ 及其变化率 $\frac{dv(t)}{dt}$ 满足约束条件

$$mg-kv(t)=m\frac{dv(t)}{dt},$$

即

$$m\frac{dv(t)}{dt}+kv(t)=mg,$$

且

$$v(0)=0.$$

此问题中 $v(t)$ 的求解方法,将在下一节中给出.

一般地,含有未知函数导数(或微分)的方程称为**微分方程**.未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**,未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.本章只讨论常微分方程(简称为微分方程)的情形.

微分方程中未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的**阶**.例如

$y'-xy=x^2$,$x\frac{dy}{dx}+y^2=3$ 是一阶微分方程;

$y''-3y'+4y=e^x$,$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=0$ 是二阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式可写成 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$,此处 x 是自变量,y 是未知函数,$y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 依次是未知函数的一阶,二阶,…,n 阶导数.

若微分方程是未知函数及其各阶导数的一次方程,则称此微分方程是**线性的**;否则称为**非线性的**.例如

$y'-xy=x^2$,$y''-3y'+4y=e^x$ 都是线性的;而 $x\frac{dy}{dx}+y^2=3$ 及 $y'y=1$ 都是非线

性的.

若函数 $y=f(x)$ 满足微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$，即

$$F(x,f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x))=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$ 的**解**. 微分方程的解可以是显函数，也可以是隐函数.

【例 3】 验证 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 是二阶微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解.

证明

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x},$$

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x},$$

$$y''=4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

将以上三式代入微分方程左边，得

$$y''-y'-2y=4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-(2C_1e^{2x}-C_2e^{-x})-2(C_1e^{2x}+C_2e^{-x})=0,$$

即 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 满足方程 $y''-y'-2y=0$，因此 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解. □

例 3 中，微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 含有两个独立的(即不可合并的)任意常数 C_1 和 C_2，当它们分别取不同的值时，就得到不同的解.

如果微分方程的解包含任意常数，且独立的任意常数个数与微分方程的阶数相同，那么此解称为微分方程的**通解**. 在通解中，当任意常数取确定的值时，相应得到的解称为微分方程的**特解**. 因此，特解中不再包含任意常数.

例 1 中，$y=\frac{1}{3}x^3+2x+C$ 即是 $\frac{dy}{dx}-x^2=2$ 的通解；$y=\frac{1}{3}x^3+2x+1$ 则是 $\frac{dy}{dx}-x^2=2$ 的一个特解.

例 3 中，$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 即是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解；而 $y=2e^{2x}-e^{-x}$ 则是一个特解.

如果给定一定的附加条件，则可由微分方程的通解得到相应的特解，称这样的附加条件为**初始条件**(也称**定解条件**). 如例 1 中的 $y\big|_{x=0}=1$，例 2 中的 $v(0)=0$ 都是初始条件. 由于 n 阶微分方程的通解中含有 n 个独立的任意常数，因此，n 阶微分方程的初始条件中往往需含有 n 个独立的条件，才能确定一个特解. 带有初始条件的常微分方程称为常微分方程的**初值问题**.

【例 4】 求微分方程初值问题 $\begin{cases} y''-y'-2y=0, \\ y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=3 \end{cases}$ 的解.

解　从例 3 知 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解，则

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x},$$

由初始条件 $y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=3$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ 2C_1-C_2=3. \end{cases}$$

因此有

$$C_1=1,C_2=-1,$$

即得满足初始条件的特解为

$$y=e^{2x}-e^{-x}.$$

微分方程特解的图形是一条曲线,称此曲线为该方程的**积分曲线**. 而通解的图形在几何上则表示**积分曲线族**.

第二节　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{8.1}$$

的微分方程称为**可分离变量的微分方程**. 当 $g(y)\neq 0$ 时,此方程可化成

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

(8.2) 式的左边只包含变量 y,而右边只包含变量 x,对变量进行了分离,两边同时积分,就可求出通解.

【例 1】　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解　当 $y\neq 0$ 时,分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int 3x^2\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=x^3+C_1,$$

即

$$y=\pm\,\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{x^3},\text{ 其中 } C_1 \text{ 是任意常数.}$$

记 $C=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}$,则 C 是不等于零的任意常数,故当 $y\neq 0$ 时通解可写成

$$y=C\mathrm{e}^{x^3}.$$

当 $y=0$ 时,常数函数 $y=0$ 也满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$,即常数函数 $y=0$ 也是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的解. 式 $y=C\mathrm{e}^{x^3}$ 中,若取 $C=0$,则包含了 $y=0$ 这一特解.

综合 $y\neq 0$ 与 $y=0$ 两种情形,微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解可写成

$$y=C\mathrm{e}^{x^3},$$

其中 C 是任意常数.

从本例可见,在解微分方程过程中,当两边同除某一式子时,需要注意除式不能等于零. 而当除式等于零时,常需单独分析求解,但此时求得的特解往往又包含在通解之中.

【例 2】　求 $(1+x^2)y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解.

解　将微分方程移项分离变量得

$$y\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int y\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

得通解

$$y^2 = \ln(1+x^2)+C,$$

即

$$y = \pm\sqrt{\ln(1+x^2)+C}.$$

由初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，得上式只能取正号，且 $1=\sqrt{\ln 1+C}$，即 $C=1$. 因此，满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解为

$$y = \sqrt{\ln(1+x^2)+1}.$$

二、齐次型微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.3}$$

的微分方程称为**齐次型微分方程**.

为了解齐次型方程(8.3)，可令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=ux$，代入(8.3)得

$$\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x} = \varphi(u),$$

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u),$$

分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

对上式两边积分后，再用 $u=\frac{y}{x}$ 回代即可得到原齐次型微分方程的通解.

【例 3】 求微分方程 $(x^2+xy)\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x = 0$ 的通解.

解　原方程即为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy+x^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)+1},$$

此方程为齐次型微分方程，令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=ux$.

当 $u\neq 0$ 时，代入化简可得

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$u + \ln|u| = -\ln|x| + C_1,$$

即

$$\ln|ux| = -u + C_1,$$

从而有 $ux=\pm e^{C_1}e^{-u}$，记 $C=\pm e^{C_1}$，并用 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代即得

$$y=Ce^{-\frac{y}{x}},$$

其中 C 是非零的任意常数.

当 $u=0$ 时，这时 $y=0$ 也是方程的解，它可从上式中取 $C=0$ 得到. 因此微分方程的通解为

$$y=Ce^{-\frac{y}{x}}.$$

除齐次型微分方程可化为可分离变量微分方程外，有许多其他类型的方程，经过适当的变量代换后也可化为可分离变量的微分方程. 代换的方法常常根据方程的不同而不同，而没有一定的规律可循.

【例 4】 解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2,\\ y\Big|_{x=0}=1.\end{cases}$

解 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$ 既不是齐次型微分方程，也不是可分离变量的微分方程. 作变换 $u=y+x$，即 $y=u-x$ 代入微分方程得

$$\frac{d(u-x)}{dx}=u^2,$$

即

$$\frac{du}{dx}=u^2+1,$$

分离变量后再两边积分

$$\int\frac{du}{u^2+1}=\int dx,$$

得

$$\arctan u=x+C,$$

用 $u=y+x$ 回代即得通解 $\arctan(x+y)=x+C$,

由初始条件 $y\Big|_{x=0}=1$，得 $C=\dfrac{\pi}{4}$，因此初值问题的解为

$$\arctan(x+y)=x+\frac{\pi}{4}.$$

三、一阶线性微分方程

形如

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{8.4}$$

的微分方程称为一阶线性微分方程. $q(x)$ 称为**自由项**，当 $q(x)\equiv 0$ 时，称方程(8.4)是**齐次的**；相应地，若 $q(x)$ 不恒等于 0，则称方程(8.4)是**非齐次的**. 有时，我们也称

$$y'+p(x)y=0 \tag{8.5}$$

为非齐次线性方程(8.4)对应的**齐次线性方程**. 注意，这里所说的齐次线性方程与以前所述的形如 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的齐次型微分方程是两个完全不同的概念，读者需要加以区分.

1. 一阶齐次线性方程的通解

对于齐次线性方程(8.5)，可采用分离变量法求其通解.

当 $y\neq 0$ 时,方程(8.5)分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int -p(x)\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=-\int p(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\tag{8.6}$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 为不等于 0 的任意常数.

当 $y=0$ 时,这时 $y=0$ 也是方程(8.5)的解,它可从(8.6)式中取 $C=0$ 得到.因此,当(8.6)式中 C 取任意常数时,它就是方程(8.5)的通解.

2. 一阶非齐次线性方程的通解

对于非齐次线性方程(8.4),一般难以直接采用分离变量法求得通解.将方程(8.4)改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x-p(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln|y|=\int\frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int p(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{\int\frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

记未知函数

$$\pm\mathrm{e}^{\int\frac{q(x)}{y}\mathrm{d}x}\equiv u(x),$$

上式变为

$$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.\tag{8.7}$$

由于 $u(x)$ 仍然是未知函数,因此(8.7)式并未给出(8.4)的通解.然而(8.7)式启发我们,方程(8.4)的通解结构可能为对应的齐次方程(8.5)的解 $\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 乘以一个未知函数 $u(x)$.或者说,只要将对应齐次方程的通解(8.6)中的常数 C 替代成未知函数 $u(x)$,便得到非齐次线性方程(8.4)的通解结构.如果我们能设法求出未知函数 $u(x)$,由此也就求得了(8.4)的解.

为了求出 $u(x)$,现将(8.7)代入(8.4)式:

$$[u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}]'+p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x),$$

即

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+u(x)[\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}]'+p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x),$$

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[-p(x)]+p(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x),$$

得

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x),$$

于是有

$$u'(x)=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分得

$$u(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

从而得到非齐次线性方程(8.4)的通解为

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]. \tag{8.8}$$

在解非齐次微分方程过程中，往往先求出对应的齐次方程的通解，再把此通解中的任意常数C改变为待定函数$u(x)$，代人相应的非齐次方程解得$u(x)$，从而得到非齐次方程的通解. 这种方法叫做**常数变易法**. 此方法具有一定的普遍性，对高阶线性微分方程及线性微分方程组也适用.

【例 5】 利用常数变易法求微分方程 $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(1+x)$ 的通解.

解 相应的齐次方程为

$$y' - \frac{1}{x+1}y = 0,$$

分离变量后即为

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x+1}dx,$$

两边积分得

$$\ln|y| = \ln|x+1| + C_1,$$

由此得到齐次方程的通解

$$y = C(x+1).$$

令 $C = u(x)$，即设原方程的通解为 $y = u(x)(x+1)$，代入原方程，有

$$[u(x)(x+1)]' - \frac{1}{x+1}[u(x)(x+1)] = e^x(1+x),$$

求导并整理后得

$$u'(x) = e^x,$$

两边积分得

$$u(x) = e^x + C,$$

于是原方程的通解为

$$y = (x+1)(e^x + C).$$

也可用公式(8.8)直接求一阶非齐次线性方程的通解.

【例 6】 解微分方程 $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3e^x$.

解 原方程可化为 $$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2e^x,$$

由公式(8.8)得 $$y = e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int x^2e^xe^{-\int\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = e^{\ln x^2}\left(\int x^2e^xe^{-\ln x^2}dx + C\right)$$

$$= x^2\left(\int e^x dx + C\right) = x^2(e^x + C).$$

【例 7】 求解上一节例 2 中的初值问题 $\begin{cases} m\dfrac{dv(t)}{dt} + kv(t) = mg, \\ v(0) = 0. \end{cases}$

解 方程即为 $$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = g,$$

由公式(8.8)得

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\left[\int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\left[\int g\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t+C\right]=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k},$$

将初始条件 $v(0)=0$ 代入上式得　　$C=-\dfrac{mg}{k}$,

因此物体在开始下落 t 秒后的即时速度 $v(t)$ 为

$$v(t)=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$$

【例 8】 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}y^2$.

解　此方程虽然是一阶的，却不是线性方程，但可通过变量代换化为线性方程求解.两边同除 y^2，得

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x},$$

即
$$-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{x},$$

令 $u=\dfrac{1}{y}$，则得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}u=-\frac{1}{2}\sqrt{x},$$

由公式(8.8)得

$$u=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+C\right]=x\left[\int\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x+C\right]$$
$$=x(-\sqrt{x}+C)=-x\sqrt{x}+Cx,$$

所以原方程通解为
$$y=\frac{1}{-x\sqrt{x}+Cx}.$$

一般地，形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq 0,1)$$

的方程称为**贝努里(Bernoulli)方程**.将此方程两边同除 y^{α}，得

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{y^{\alpha-1}}p(x)=q(x),$$

令 $u=y^{1-\alpha}$，得
$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p(x)u=q(x),$$

即可化为一阶非齐次线性方程进行求解.

第三节　可降阶的二阶微分方程

实际问题中，不但会遇到一阶微分方程，还常会碰到高阶微分方程的情形，本节只讨论几类特殊的可降阶的二阶微分方程.

一、$y''=f(x)$ 型

此类方程令 $y'=p$，原方程可化为一阶方程

$$p'=f(x),$$

两边积分得 $$p=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即 $$y'=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

然后再次积分得到通解 $$y=\int(\int f(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+C_1x+C_2,$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

【例 1】 求微分方程通解 $y''=\frac{x}{x^2+1}$.

解 令 $y'=p$,原方程即化为

$$p'=\frac{x}{x^2+1},$$

两边积分得 $$p=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+C_1=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1,$$

即 $$y'=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+C_1=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1,$$

再次积分得到通解

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x+C_1x+C_2=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x+C_1x+C_2\\&=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-(x-\arctan x)+C_1x+C_2\\&=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\arctan x+(C_1-1)x+C_2\\&=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\arctan x+C_1x+C_2,\end{aligned}$$

其中由于 C_1 是任意常数,因此 C_1-1 仍可记为 C_1.

二、$F(x,y',y'')=0$ 型

这类方程包含 y 不明显,作变换 $p=y'$ 后,$y''=p'$,方程可化为关于 p 的一阶方程 $F(x,p,p')=0$. 若由 $F(x,p,p')=0$ 解得 p,则对 $y'=p$ 两边积分即可得到原方程的通解.

【例 2】 求微分方程 $y''+\frac{2y'}{x}-3=0$ 的通解.

解 令 $p=y'$,原方程化为

$$p'+\frac{2p}{x}=3,$$

利用公式(8.8)得 $$p=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}(\int 3\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1)=\frac{1}{x^2}(\int 3x^2\mathrm{d}x+C_1)=x+\frac{C_1}{x^2},$$

即 $$y'=x+\frac{C_1}{x^2},$$

两边积分得 $$y=\int\left(x+\frac{C_1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\frac{C_1}{x}+C_2,$$

因此通解为 $$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{C_1}{x}+C_2.$$