

# 微積分與解析幾何詳解

上 册

G. B. 小托馬士 R. L. 芬尼

王 心 如

原著  
譯著

曉 園 出 版 社  
世 界 圖 書 出 版 公 司

## 微积分与解析几何详解 (上)

G.B. 小托马斯、R.L. 芬尼 原著

王心如 译著

\*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1994 年 11 月 第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1994 年 11 月 第一次印刷 印张: 26.75

印数: 0001—650 字数: 63 万字

ISBN: 7-5062-1979-4/O·147

定价: 35.80 元 (WB9405/8)

世界图书出版公司已向台湾晓园出版社购得重印权  
限国内发行

## 前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

# 上册目錄

## 第一章 函數的變化率 1

1. 平面上的座標 1 / 2. 增量和距離 5 / 3. 直線的斜率 10 / 4. 直線方程式 23 / 5. 函數和圖形 40 / 6. 二次及三次曲線的斜率 61 / 7. 曲線  $y=f(x)$  的斜率、導數 72 / 8. 速度和其他變率 80 / 9. 極限的性質 86 / 10. 無限大 102 / 11. 連續函數 110 / 綜合問題 119

## 第二章 導 數 143

1. 一般導數 143 / 2. 多項式函數及其導數 143 / 3. 乘積乘冪及商 148 / 4. 隱函數與分數乘冪 156 / 5. 切線逼近 167 / 6. 連鎖規則及參數方程 179 / 7. 三角函數的簡單回顧，曲線的夾角 188 / 8. 三角函數之導數 203 / 9. 牛頓法逼近方程式之解 216 / 10. 反函數及 Picard 方法 222 / 綜合問題 231

## 第三章 導數的應用 253

1. 描圖，一階導數的正負 253 / 2. 凹面和反曲點 263 / 3. 漸近和對稱 280 / 4. 極大與極小定理 300 / 5. 極大和極小之問題 307 / 6. 相對率 325 / 7. Rolle 定理 322 / 8. 均值定理 335 / 9. 不定形和 L'Hôpital 法則 338 / 10. 均值定理與泰勒展式的應用 343 / 綜合問題 348

## 第四章 積 分 387

1. 前言 387 / 2. 不定積分 387 / 3. 積分常數之決定及其應用 397 / 4. 三角函數之積分 404 / 5. 定積分，曲線下之面積 412 / 6. 利用極限計算面積 420 / 7. 微積分基本定理 426 / 8. 變數代換 438 / 9. 定積分的逼近法則 453 / 綜合問題 462

## 第五章 定積分的應用 473

1. 簡言 473 / 2. 兩曲線間面積 473 / 3. 距離 485 / 4. 薄片的旋轉體積 493 / 5. 薄殼和皮圈的體積模型 504 / 6. 平面曲線的長度 512 / 7. 旋轉體的表面積 517 / 8. 函數的平均值 522 / 9. 動量和質量中心 528 / 10. 重心和中心

532 / 11. Pappus's 定理 537 / 12. 流體靜力 539 / 13. 功 542 / 綜合問題 547

## 第六章 超越函數 567

1. 概論 567 / 2. 反三角函數 567 / 3. 反三角函數的微分及有關的積分 573 / 4. 自然對數及其微分 585 / 5. 自然對數的性質及  $y = \ln x$  的圖形 599 / 6. 指數函數 613 / 7.  $a^x$  和  $a^y$  函數 633 / 8.  $y = \log_a u$  函數，及函數的上升率 644 / 9. 指數函數及對數函數的應用 651 / 10. 複利及富蘭克林遺囑 657 / 綜合問題 658

## 第七章 分部積分 689

1. 基本積分公式 689 / 2. 分部積分 702 / 3. 三角函數的乘積與乘冪 714 / 4. 正弦、餘弦偶次乘方 726 / 5. 三角函數積分代換加入 732 / 6. 關於  $ax^2 + bx + c$  之積分 744 / 7. 部分分式 750 / 8. 計算下列積分 762 / 9. 瑕積分 765 / 10. 利用積分表 777 / 綜合問題 787

# 第一章 函數的變化率

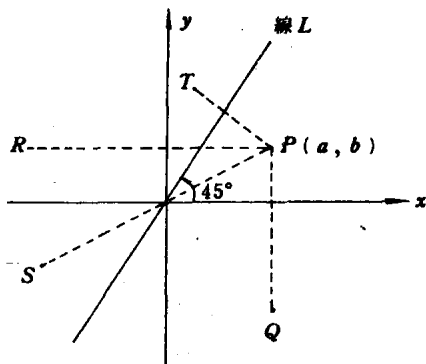
## 1.1 平面上的座標

問題 1-12，先劃座標軸及所予點  $P(a, b)$ ，次劃下列各點：

- (a) 畫出  $Q$  使得  $PQ$  垂直  $x$  軸且  $PQ$  為  $x$  軸所平分，寫出  $Q$  之座標 ( $P$  及  $Q$  關於  $x$  軸為對稱)
- (b)  $R$  點使得  $PR$  垂直  $y$  軸且  $PR$  為  $y$  軸所平分，寫出  $R$  之座標 ( $P$  及  $R$  對於  $y$  軸為對稱)
- (c)  $S$  點使得  $PS$  為原點所平分，寫出  $S$  點座標。 ( $P$  及  $S$  對於原點為對稱)
- (d)  $T$  點使得  $PT$  垂直過原點而等分第一、三象限的  $45^\circ$  線  $L$ 。 (見圖 1.6)，設若兩軸單位相等，寫出  $T$  的座標。 ( $P$  及  $T$  對於  $L$  對稱)

- 1 (1, -2)    2 (2, -1)    3 (-2, 2)    4 (-2, 1)  
5 (0, 1)    6 (1, 0)    7 (-2, 0)    8 (0, -3)  
9 (-1, -3)    10 ( $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ )    11 ( $-\pi, -\pi$ )    12 (-1.5, 2.3)

圖 1.6 關於  $x$  軸， $y$  軸，原點及  $45^\circ$  線  $L$  的對稱



2 第一章 函數的變化率

解

座標 \ 題次	1	2	3	4	5	6	7
$P(a, b)$	(1, -2)	(2, -1)	(-2, 2)	(-2, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(-2, 0)
$Q(a, -b)$	(1, 2)	(2, 1)	(-2, -2)	(-2, -1)	(0, -1)	(1, 0)	(-2, 0)
$R(-a, b)$	(-1, -2)	(-2, -1)	(2, 2)	(2, 1)	(0, 1)	(-1, 0)	(2, 0)
$S(-a, -b)$	(-1, 2)	(-2, 1)	(2, -2)	(2, -1)	(0, -1)	(-1, 0)	(2, 0)
$T(b, a)$	(-2, 1)	(-1, 2)	(2, -2)	(1, -2)	(1, 0)	(0, 1)	(0, -2)

座標 \ 題次	8	9	10	11	12
$P(a, b)$	(0, -3)	(-1, -3)	$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(-\pi, -\pi)$	(-1.5, 2.3)
$Q(a, -b)$	(0, 3)	(-1, 3)	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-\pi, \pi)$	(-1.5, -2.3)
$R(-a, b)$	(0, -3)	(1, -3)	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(\pi, -\pi)$	(1.5, 2.3)
$S(-a, -b)$	(0, 3)	(1, 3)	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\pi, \pi)$	(1.5, -2.3)
$T(b, a)$	(-3, 0)	(-3, -1)	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-\pi, -\pi)$	(2.3, -1.5)

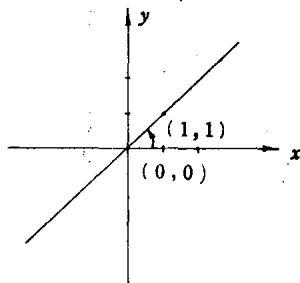
13. 若  $P = P(x, y)$ ，則點  $Q$  的座標在上題(a)中為  $(x, -y)$  寫出以  $x, y$  表  $R, S, T$  的座標。

解  $R(-x, y), S(-x, -y), T(y, x)$ 。

在問題 14—20 中，設兩軸的單位長相等。

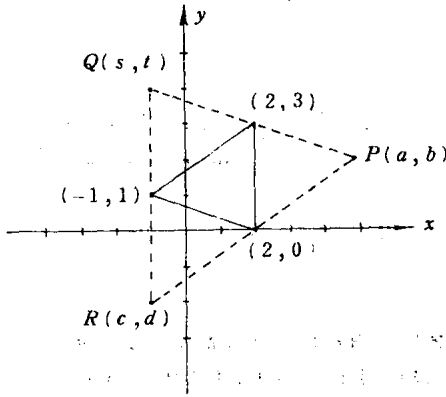
14. 一線過  $(0, 0)$  及  $(1, 1)$  其與正  $x$  軸夾之銳角為多少？畫圖

解  $45^\circ$ 。



15. 以  $(-1, 1), (2, 0)$  及  $(2, 3)$  為頂點的平行四邊形有三個畫出並寫出第四頂點的座標。

解



利用對角線兩端點求其中點，則有

$$\frac{(2, 3) + (2, 0)}{2} = \frac{(a, b) + (-1, 1)}{2}$$

$$\Rightarrow (a, b) = (2, 3) + (2, 0) - (-1, 1) = (5, 2)$$

$$\text{故 } Q : (s, t) = (2, 3) + (-1, 1) - (2, 0) = (-1, 4)$$

$$R : (c, d) = (-1, 1) + (2, 0) - (2, 3) = (-1, -2)$$

16. 以  $(3, -2)$  和  $(-4, -7)$  為頂點且邊平行兩軸之長方形

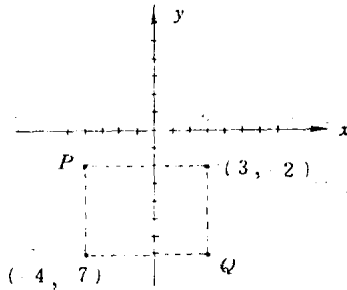
(a) 求其餘兩頂點座標。

(b) 求其面積。

解 (a)  $P(-4, -2)$

$Q(3, -7)$

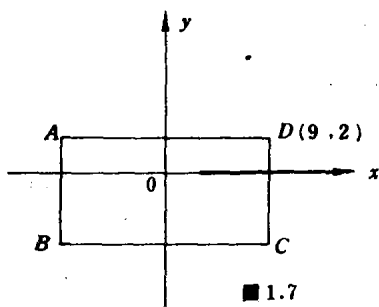
(b) 面積 =  $5 \times 7 = 35$  (平方單位)



17. 圖 1.7 之長方形邊平行兩軸，其長為寬之 3 倍，周長為 56 單位，求頂點  $A, B, C$  之座標。



4 第一章·函數的變化率



解 設寬為  $x$  單位，則  $2(x+3x) = 56$ ，故  $x = 7$  (單位)，長為 21 單位  
 $\therefore A(-12, 2)$ ， $B(-12, -5)$ ， $C(9, -5)$

18. 在第二象限之圓切於兩軸，與  $y$  軸接於  $(0, 3)$

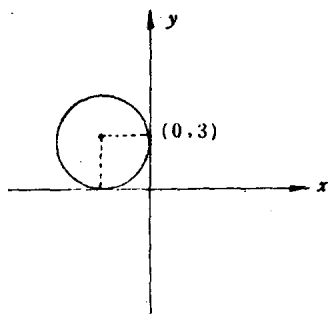
(a) 切  $x$  軸之點為何？畫圖。

(b) 求圓心。

解 (a) 因切  $y$  軸於  $(0, 3)$ ，故半徑為 3 單位

$\therefore$  切  $x$  軸於  $(-3, 0)$

(b) 圓心  $(-3, 3)$ 。



19. 過  $(1, 1)$  及  $(2, 0)$  之直線過  $y$  軸於  $(0, b)$ ，用相似三角形求  $b$ 。

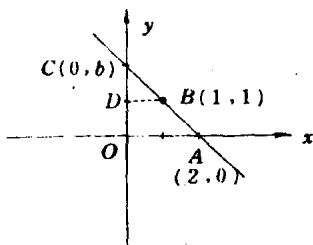
解 如下圖知  $D(0, 1)$

利用  $\triangle ACO \sim \triangle BCD$

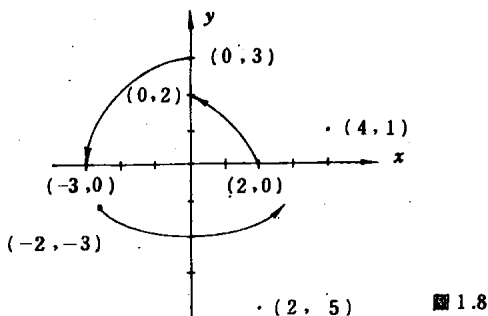
$$\text{則 } \frac{BD}{AO} = \frac{CD}{CO}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b-1}{b}$$

$$\therefore b = 2$$



20. 對於原點反時鐘方向旋轉  $90^\circ$ ，將  $(2, 0)$  轉為  $(0, 2)$ ， $(0, 3)$  轉而  $(-3, 0)$ ，如圖 1.8 所示，求下列旋轉後之點：  
 (a)  $(4, 1)$  (b)  $(-2, -3)$  (c)  $(2, -5)$  (d)  $(x, 0)$   
 (e)  $(0, y)$  (f)  $(x, y)$  (g) 何點轉成  $(10, 3)$ ？



解  $(x, y)$  經旋轉  $\theta$  角 (反時鐘) 後為  $(x', y')$  其關係為

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\theta = 90^\circ$ ，則  $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ ，故

(a)  $(4, 1) \rightarrow (-1, 4)$       (b)  $(-2, -3) \rightarrow (3, -2)$

(c)  $(2, -5) \rightarrow (5, 2)$       (d)  $(x, 0) \rightarrow (0, x)$

(e)  $(0, y) \rightarrow (-y, 0)$       (f)  $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

(g)  $\begin{cases} x' = 10 = -y \\ y' = 3 = x \end{cases}$

$\therefore (x, y) = (3, -10)$  經旋轉  $90^\circ$  後為  $(10, 3)$ 。

## 1.2 增量和距離

1. 球心座標如圖 1.9 所示，若球如下運動求淨垂直及淨水平的變化。

- (a) A 到 G      (b) D 到 E      (c) C 到 F

解 (a)  $A(0, 32) \rightarrow G(57, 22)$

淨水平變化 =  $\Delta x = 57 - 0 = 57$

淨垂直變化 =  $\Delta y = 22 - 32 = -10$

(b)  $D(28, 18) \rightarrow E(26, 6)$        $\Delta x = 26 - 28 = -2$

$\Delta y = 6 - 18 = -12$

(c)  $C(39, 18) \rightarrow F(40, 4)$

$\Delta x = 40 - 39 = 1$

$\Delta y = 4 - 18 = -14$

2 圖 1.9 中球心座標若在球再轉由  $G$  回  $F$  時增量為多少？

解  $G \rightarrow F$

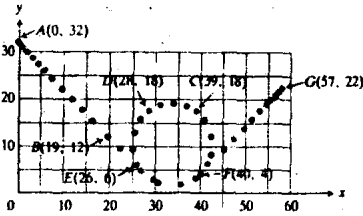


圖 1.9 為一圓球繞垂直圓環經多次閃光複製而得之照片。圓球從靜止狀態自左上角  $A(0, 32)$  處釋放。英文字母標明圓球之連續位置。所給之座標為圓球之中心位置，四捨五入至最近之整數。座標軸之比例單位為公分 (cm)。

$$\Delta x = 40 - 57 = -17$$

$$\Delta y = 4 - 22 = -18$$

在問題 3-8 中，平面上二質點由  $A$  至  $B$ ，點  $C$  為過  $A$  之水平線和過  $B$  之垂直線的交點，畫出直線及求 (a)  $C$  之座標；(b)  $\Delta x$  (c)  $\Delta y$ ；(d) 假設  $x$  軸及  $y$  軸單位長相同，求  $AB$  長

3  $A(-1, 1), B(1, 2)$

4  $A(1, 2), B(-1, -1)$

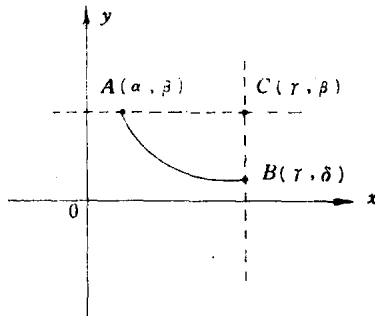
5  $A(-3, 2), B(-1, -2)$

6  $A(-1, -2), B(-3, 2)$

7  $A(-3, 1), B(-8, 1)$

8  $A(0, 4), B(0, -2)$

解



$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (\text{距離公式}) \text{ 見課本(2)式}$$

題次 項目	3	4	5	6	7	8
(a) $C$	$(1, 1)$	$(-1, 2)$	$(-1, 2)$	$(-3, -2)$	$(-8, 1)$	$(0, 4)$
(b) $\Delta x$	2	-2	2	-2	-5	0
(c) $\Delta y$	1	-3	-4	4	0	-6
(d) $AB$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	5	6

在問題 9-16 中，平面上質點以增量  $\Delta x$  及  $\Delta y$  由  $P_1(x, y)$  至  $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$  在各問題中  $P_2$  位  $P_1$  之上，下，右方或左方？

9.  $\Delta x = 6, \Delta y = 3$

10.  $\Delta x = 5, \Delta y = 0$

11.  $\Delta x = -2, \Delta y = 0$

12.  $\Delta x = 0, \Delta y = 2$

13.  $\Delta x = 3, \Delta y = -1$

14.  $\Delta x = -1, \Delta y = -2$

15.  $\Delta x = 0, \Delta y = -5$

16.  $\Delta x = -4, \Delta y = 0$

**解**  $\Delta x$  決定左，右： $\Delta x > 0$ ， $P_2$  在  $P_1$  之右； $\Delta x < 0$ ， $P_2$  在  $P_1$  之左  
 $\Delta y$  決定上，下： $\Delta y > 0$ ， $P_2$  在  $P_1$  之上； $\Delta y < 0$ ， $P_2$  在  $P_1$  之下  
 $\Delta x = 0$  (或  $\Delta y = 0$ ) 表對於左右方 (或上下方) 為不動。

故 9. 右上方

13. 右下方

10. 正右方

14. 左下方

11. 正左方

15. 正下方

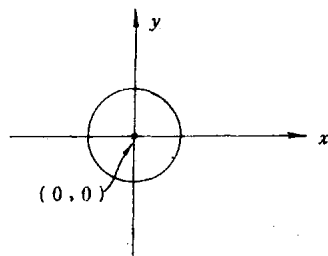
12. 正上方

16. 正左方

在問題 17-20 中，寫出圓心為所予而半徑為 5 單位之圓方程式。畫圖以示其與兩軸之關係。

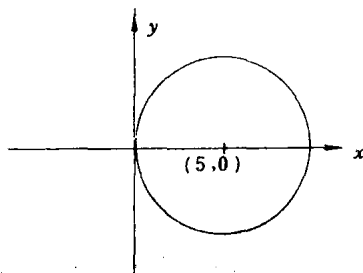
17.  $(0, 0)$

**解**  $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$  (課本公式(3))



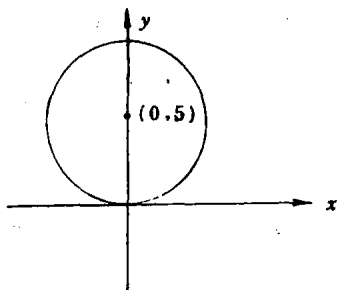
18.  $(5, 0)$

**解**  $(x-5)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25$



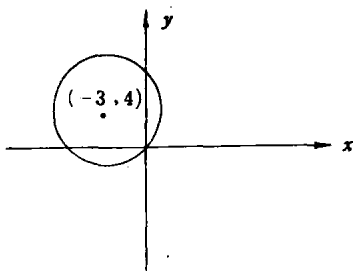
19. (0, 5)

解  $(x-0)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 25$



20. (-3, 4)

解  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$



21. 寫出圓心為原點且過點 (1, 1) 之圓方程式。

解 設圓方程式為  $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ ,  $r$  為半徑

$\therefore$  圓過 (1, 1)  $\therefore 1^2 + 1^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

故圓方程式為  $x^2 + y^2 = 2$

22. 設  $L$  為過原點且與正  $x$  軸向成  $45^\circ$  夾角的直線, 求  $L$  上距原點 1 單位之點。

解 直線方程式為  $x - y = 0$

而  $1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow 1 = \sqrt{2} |x| \quad (\because x = y)$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  或  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

故點為  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  及  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

23. 質點原位於  $A(-2, 3)$  經  $\Delta x = 5$ ,  $\Delta y = -6$  之改變後, 新位置為何?

解 設  $B(x, y)$  為其新位置, 則 
$$\begin{cases} \Delta x = x - (-2) = 5 \\ \Delta y = y - 3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

24. 質點原位於  $A(6, 0)$ , 經  $\Delta x = -6$ ,  $\Delta y = 0$  之改變後, 新位置為何?

解 如上題  $(x, y) = (0, 0)$

25. 質點由  $A(x, y)$  至  $B(3, -3)$  座標變化  $\Delta x = 5$ ,  $\Delta y = 6$ , 求  $x, y$ 。

解 
$$\begin{cases} \Delta x = 3 - x = 5 \\ \Delta y = -3 - y = 6 \end{cases} \therefore (x, y) = (-2, -9)$$

26. 質點原位於  $A(1, 0)$ , 對原點反時鐘方向繞一圈回  $A(1, 0)$ , 則座標淨變化為何?

解  $\Delta x = 1 - 1 = 0$

$\Delta y = 0 - 0 = 0$

27. 質點經  $\Delta x = h$  及  $\Delta y = k$  後至  $B(u, v)$ , 則起點位置?

解 設起點位置為  $(x, y)$ , 則

$$\begin{cases} \Delta x = u - x = h \\ \Delta y = v - y = k \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (u - h, v - k)$$

28. 質點由  $A(-2, 5)$  至  $y$  軸以  $\Delta y = 3\Delta x$  行之, 求新座標。

解 由  $A$  至  $y$  軸, 故  $\Delta y = 0 - 5 = -5$

設新座標為  $(x, y)$ , 則

$$\begin{cases} \Delta x = x - (-2) = \frac{1}{3}\Delta y = -\frac{5}{3} \\ \Delta y = y - 5 = -5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(-\frac{11}{3}, 0\right)$$

29. 一質點以定速度  $v$  沿過原點直線運動, 座標系及質點軌跡如圖 1.13 所示, 線上質點以  $\Delta t = 1$  秒間隔, 為什麼面積  $A_1, A_2, \dots, A_5$  相等? 如喀卜勒第二定律 (見前言) 所敘, 連接原點及質點之線在相等時間內掃過之面積相同。(題示: 由原點到運動直線作一高)

解

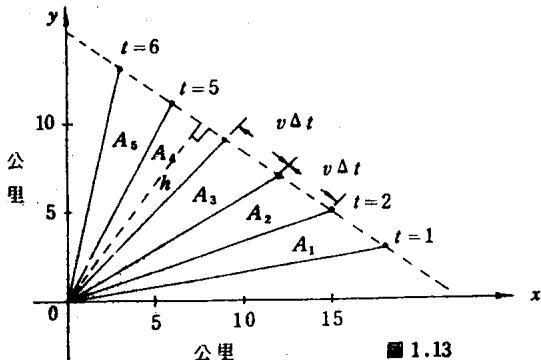


圖 1.13

做一高  $h$ ，皆為五三角形之高，而其底為  $v\Delta t = v = \text{定值}$ ，故三角形  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  為等底等高，故面積相等。

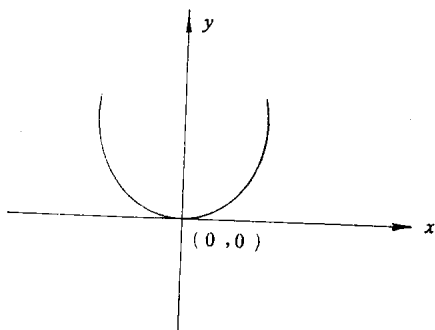
30. 質點沿拋物線  $y = x^2$  由  $A(1, 1)$  至  $B(x, y)$ ， $x \neq 1$ ，畫出拋物線

並證明  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x + 1$  (若  $\Delta x \neq 0$ )

證  $y = x^2$  由配方法知有極小值為 0，且該點為  $(0, 0)$

又  $y = x^2 = (-x)^2$ ，故拋物線對稱  $y$  軸

$\therefore$  圖如



設兩點  $(x_1, y_1)$ ， $(x_2, y_2)$  而質點由  $(x_1, y_1)$  至  $(x_2, y_2)$ ，則

$$\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases} \quad \text{又} \quad \begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 \quad (x_2 \neq x_1)$$

但由題知  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ ， $(x_2, y_2) = (x, y)$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_2 + x_1 = x + 1 \quad (\Delta x \neq 0)$$

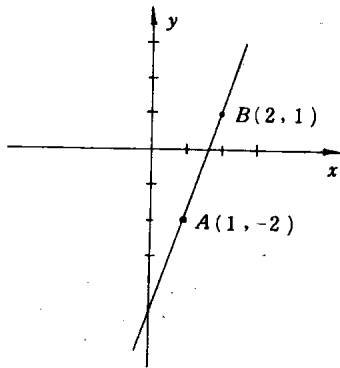
### 1.3 直線的斜率

在問題 1-16 中，描出  $A, B$  點，並找出其所決定直線之斜率，及垂直該直線之直線之斜率。

1  $A(1, -2)$ ， $B(2, 1)$

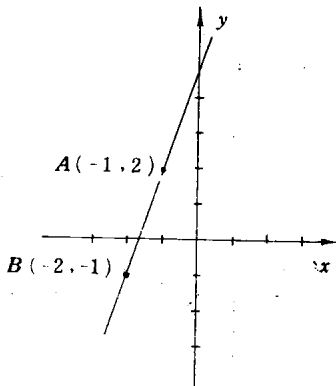
解  $m_1 = \frac{1 - (-2)}{2 - 1} = 3$  ( $AB$  斜率)，

$m_2 = -\frac{1}{3}$  ( $\perp AB$  斜率)



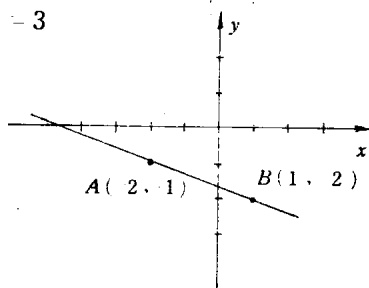
2  $A(-1, 2)$ ,  $B(-2, -1)$

解  $m_1 = \frac{-3}{-1} = 3$ ,  $m_2 = -\frac{1}{3}$



3  $A(-2, -1)$ ,  $B(1, -2)$

解  $m_1 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ ,  $m_2 = -3$

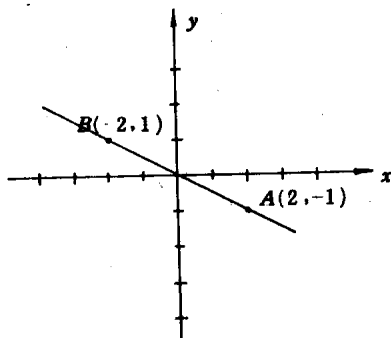




12 第一章 函數的變化率

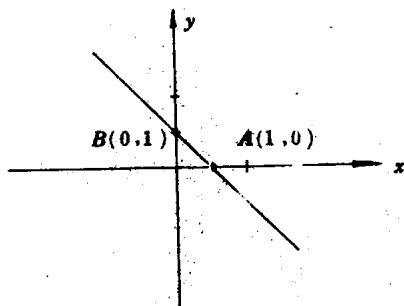
4  $A(2, -1), B(-2, 1)$

解  $m_1 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad m_2 = 2$



5  $A(1, 0), B(0, 1)$

解  $m_1 = \frac{1}{-1} = -1 \quad m_2 = 1$



6  $A(-1, 0), B(1, 0)$

解  $m_1 = \frac{0}{2} = 0$   
 $m_2$  不存在

