微積分與解析幾何詳解

上　册

G.B. 小托馬士　R.L. 芬尼　原著
王　心　如　譯著

曉　園　出　版　社
世界圖書出版公司

微积分与解析几何详解（上）

G.B. 小托马士、R.L.芬尼　原著
王心如　译著

*

晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司司重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 11 月第　一　版　　开本：850×1168　1/32
1994 年 11 月第一次印刷　　印张：26.75
印数：0001—650　　　　　　字数：63 万字

ISBN: 7-5062-1979-4/O·147

定价：35.80 元　（WB9405/8）

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

上册目錄

第六章　超越函數　567

第七章　分部積分　689

第一章　函數的變化率

1.1　平面上的座標

問題 1-12，先劃座標軸及所予點 $P(a, b)$，次劃下列各點：

(a)　畫出 Q 使得 PQ 垂直 x 軸且 PQ 爲 x 軸所平分，寫出 Q 之座標（P 及 Q 關於 x 軸爲對稱）

(b)　R 點使得 PR 垂直 y 軸且 PR 爲 y 軸所平分，寫出 R 之座標（P 及 R 對於 y 軸爲對稱）

(c)　S 點使得 PS 爲原點所平分，寫出 S 點座標。（P 及 S 對於原點爲對稱）

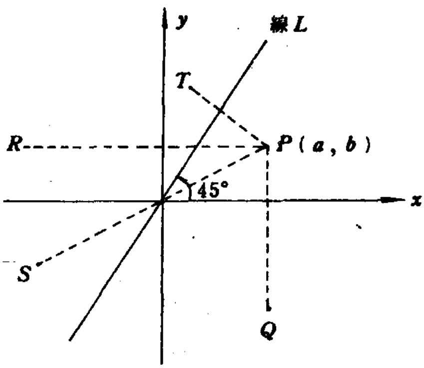
(d)　T 點使得 PT 垂直過原點而等分第一、三象限的 45° 線 L。（見圖 1.6），設若兩軸單位相等，寫出 T 的座標。（P 及 T 對於 L 對稱）

1. $(1, -2)$　　2. $(2, -1)$　　3. $(-2, 2)$　　4. $(-2, 1)$

5. $(0, 1)$　　6. $(1, 0)$　　7. $(-2, 0)$　　8. $(0, -3)$

9. $(-1, -3)$　　10. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$　　11. $(-\pi, -\pi)$　　12. $(-1.5, 2.3)$

圖 1.6　關於 x 軸，y 軸，原點及 45° 線 L 的對稱



解

解

座標＼題次	1	2	3	4	5	6	7
$P(a,b)$	$(1,-2)$	$(2,-1)$	$(-2,2)$	$(-2,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(-2,0)$
$Q(a,-b)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(-2,-2)$	$(-2,-1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-2,0)$
$R(-a,b)$	$(-1,-2)$	$(-2,-1)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(2,0)$
$S(-a,-b)$	$(-1,2)$	$(-2,1)$	$(2,-2)$	$(2,-1)$	$(0,-1)$	$(-1,0)$	$(2,0)$
$T(b,a)$	$(-2,1)$	$(-1,2)$	$(2,-2)$	$(1,-2)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,-2)$

座標＼題次	8	9	10	11	12
$P(a,b)$	$(0,-3)$	$(-1,-3)$	$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$(-\pi,-\pi)$	$(-1.5,2.3)$
$Q(a,-b)$	$(0,3)$	$(-1,3)$	$(\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(-\pi,\pi)$	$(-1.5,-2.3)$
$R(-a,b)$	$(0,-3)$	$(1,-3)$	$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$(\pi,-\pi)$	$(1.5,2.3)$
$S(-a,-b)$	$(0,3)$	$(1,3)$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	(π,π)	$(1.5,-2.3)$
$T(b,a)$	$(-3,0)$	$(-3,-1)$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(-\pi,-\pi)$	$(2.3,-1.5)$

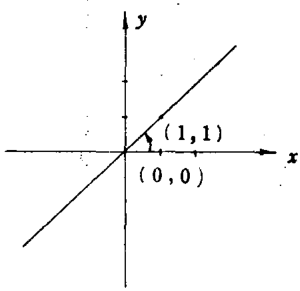
13. 若 $P=P(x,y)$，則點 Q 的座標在上題(a)中爲 $(x,-y)$ 寫出以 x，y 表 R，S，T 的座標。

解 $R(-x,y)$，$S(-x,-y)$，$T(y,x)$。

在問題 14－20 中，設兩軸的單位長相等。

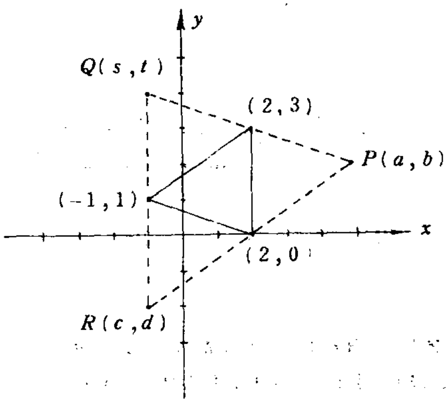
14. 一線過 $(0,0)$ 及 $(1,1)$ 其與正 x 軸夾之銳角爲多少？畫圖

解 $45°$。



15. 以 $(-1,1)$，$(2,0)$ 及 $(2,3)$ 爲頂點的平行四邊形有三個畫出並寫出第四頂點的座標。

解



利用對角線兩端點求其中點，則有

$$\frac{(2,3)+(2,0)}{2}=\frac{(a,b)+(-1,1)}{2}$$

$\Rightarrow (a,b)=(2,3)+(2,0)-(-1,1)=(5,2)$

故 $Q:(s,t)=(2,3)+(-1,1)-(2,0)=(-1,4)$

$R:(c,d)=(-1,1)+(2,0)-(2,3)=(-1,-2)$

16. 以 $(3,-2)$ 和 $(-4,-7)$ 爲頂點且邊平行兩軸之長方形

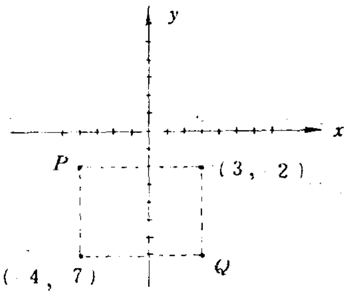
(a)求其餘兩頂點座標。

(b)求其面積。

解 (a) $P(-4,-2)$

$Q(3,-7)$

(b)面積 $=5\times 7=35$（平方單位）



17. 圖 1.7 之長方形邊平行兩軸，其長爲寬之 3 倍，周長爲 56 單位，求頂點 A，B，C 之座標。

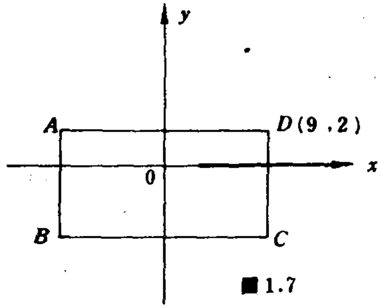
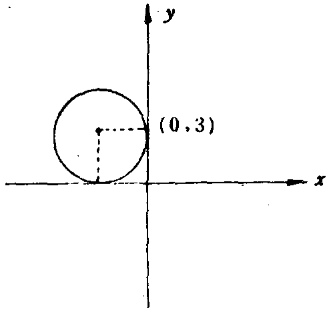


圖 1.7

解 設寬爲 x 單位，則 $2(x+3x)=56$，故 $x=7$（單位），長爲 21 單位
$\therefore A(-12,2)$，$B(-12,-5)$，$C(9,-5)$

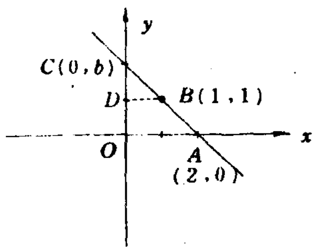
18. 在第二象限之圓切於兩軸，與 y 軸接於（0，3）
(a)切 x 軸之點爲何？畫圖。
(b)求圓心。

解 (a)因切 y 軸於（0，3），故半徑爲 3 單位
$\therefore$ 切 x 軸於（-3，0）
(b)圓心（-3，3）。



19. 過（1，1）及（2，0）之直線過 y 軸於（0，b），用相似三角形求 b。

解 如下圖知 D（0，1）
利用 $\triangle ACO \sim \triangle BCD$
則 $\dfrac{BD}{AO}=\dfrac{CD}{CO}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{b-1}{b}$
$\therefore b=2$



20. 對於原點反時鐘方向旋轉 90°，將（2，0）轉爲（0，2），（0，3）轉而（−3，0），如圖1.8所示，求下列旋轉後之點：
(a)（4，1） (b)（−2，−3） (c)（2，−5） (d)（x，0）
(e)（0，y） (f)（x，y） (g)何點轉成（10，3）？

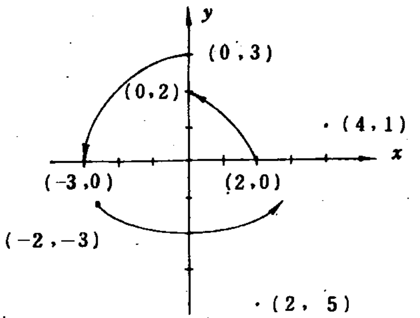


圖 1.8

解 （x，y）經旋轉 θ 角（反時鐘）後爲（x'，y'）其關係爲

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\theta = 90°$，則 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$，故

(a)（4，1）→（−1，4） (b)（−2，−3）→（3，−2）
(c)（2，−5）→（5，2） (d)（x，0）→（0，x）
(e)（0，y）→（−y，0） (f)（x，y）→（−y，x）

(g) $\begin{cases} x' = 10 = -y \\ y' = 3 = x \end{cases}$

∴（x，y）=（3，−10）經旋轉 90° 後爲（10，3）。

1.2 增量和距離

1. 球心座標如圖1.9所示，若球如下運動求淨垂直及淨水平的變化。
(a) A 到 G (b) D 到 E (c) C 到 F

解 (a) A（0，32）→ G（57，22）
淨水平變化 = $\Delta x = 57 - 0 = 57$
淨垂直變化 = $\Delta y = 22 - 32 = -10$
(b) D（28，18）→ E（26，6） $\Delta x = 26 - 28 = -2$
$\Delta y = 6 - 18 = -12$
(c) C（39，18）→ F（40，4）
$\Delta x = 40 - 39 = 1$ $\Delta y = 4 - 18 = -14$

2 圖1.9中球心座標若在球再轉由G回F時增量爲多少？

解 $G \to F$

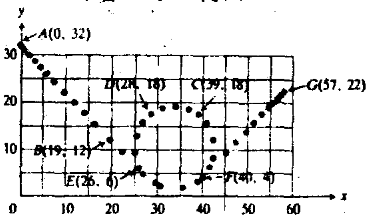


圖1.9 爲一圓球繞垂直圓環經多次閃光複製而得之照片。圓球從靜止狀態自左上角A（0.32）處釋放。英文字母標明圓球之連續位置 所給之座標爲圓球之中心位置，四捨五入至最近之整數。座標軸之比例單位爲公分(cm)。

$\Delta x = 40 - 57 = -17$

$\Delta y = 4 - 22 = -18$

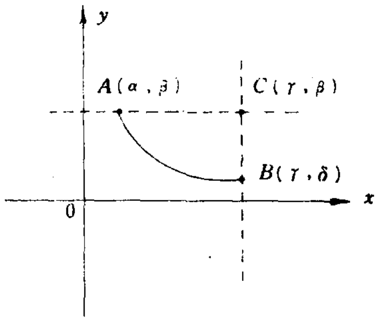
在問題3-8中，平面上一質點由A至B，點C爲過A之水平線和過B之垂直線的交點，畫出直線及求(a)C之座標；(b)Δx (c)Δy；(d)假設x軸及y軸單位長相同，求AB長

3. $A(-1,1)$，$B(1,2)$　　4. $A(1,2)$，$B(-1,-1)$

5. $A(-3,2)$，$B(-1,-2)$　　6. $A(-1,-2)$，$B(-3,2)$

7. $A(-3,1)$，$B(-8,1)$　　8. $A(0,4)$，$B(0,-2)$

解



$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ （距離公式）見課本(2)式

項目＼題次	3	4	5	6	7	8
(a)C	$(1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-3,-2)$	$(-8,1)$	$(0,4)$
(b)Δx	2	-2	2	-2	-5	0
(c)Δy	1	-3	-4	4	0	-6
(d)AB	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	5	6

在問題9-16中，平面上質點以增量 Δx 及 Δy 由 $P_1(x, y)$ 至 $P_2(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 在各問題中 P_2 位 P_1 之上，下，右方或左方？

9. $\Delta x=6$，$\Delta y=3$
10. $\Delta x=5$，$\Delta y=0$
11. $\Delta 2=-2$，$\Delta y=0$
12. $\Delta x=0$，$\Delta y=2$
13. $\Delta x=3$，$\Delta y=-1$
14. $\Delta x=-1$，$\Delta y=-2$
15. $\Delta x=0$，$\Delta y=-5$，
16. $\Delta x=-4$，$\Delta y=0$

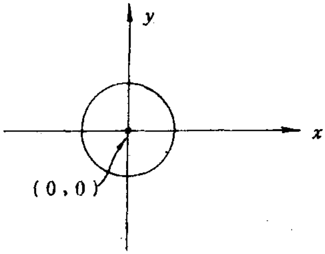
解 Δx 決定左，右：$\Delta x>0$，P_2 在 P_1 之右；$\Delta x<0$，P_2 在 P_1 之左
Δy 決定上，下：$\Delta y>0$，P_2 在 P_1 之上；$\Delta y<0$，P_2 在 P_1 之下
$\Delta x=0$（或 $\Delta y=0$）表對於左右方（或上下方）爲不動。

故 9. 右上方　　13. 右下方
10. 正右方　　14. 左下方
11. 正左方　　15. 正下方
12. 正上方　　16. 正左方

在問題17－20中，寫出圓心爲所予而半徑爲5單位之圓方程式 。畫圖以示其與兩軸之關係。

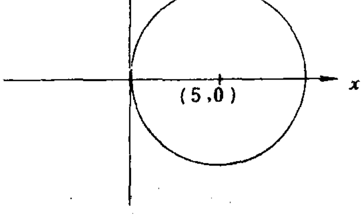
17. $(0, 0)$

解 $(x-0)^2+(y-0)^2=5^2 \Rightarrow x^2+y^2=25$（課本公式(3)）



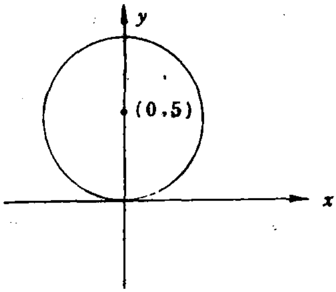
18. $(5, 0)$

解 $(x-5)^2+(y-0)^2=5^2 \Rightarrow (x-5)^2+y^2=25$



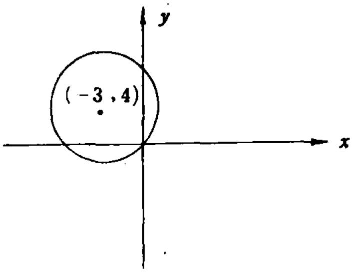
19. (0 , 5)

解 $(x-0)^2+(y-5)^2=5^2 \Rightarrow x^2+(y-5)^2=25$



20. (−3 , 4)

解 $(x+3)^2+(y-4)^2=25$



21. 寫出圓心爲原點且過點 (1 , 1) 之圓方程式。

解 設圓方程式爲 $(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$ ，r 爲半徑

$\because$ 圓過 (1 , 1) $\quad \therefore 1^2+1^2=r^2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$

故圓方程式爲 $x^2+y^2=2$

22. 設 L 爲過原點且與正 x 軸向成 45° 夾角的直線，求 L 上距原點 1 單位之點。

解 直線方程式爲 $x-y=0$

而 $1=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \Rightarrow 1=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow 1=\sqrt{2}\,|x| \qquad (\because x=y)$

$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

故點爲 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

23. 質點原位於 $A(-2,3)$ 經 $\Delta x=5$，$\Delta y=-6$ 之改變後，新位置爲何？

解 設 $B(x,y)$ 爲其新位置，則 $\begin{cases}\Delta x = x-(-2)=5\\ \Delta y = y-3=-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3\\ y=-3\end{cases}$

24. 質點原位於 $A(6,0)$，經 $\Delta x=-6$，$\Delta y=0$ 之改變後，新位置爲何？

解 如上題 $(x,y)=(0,0)$

25. 質點由 $A(x,y)$ 至 $B(3,-3)$ 座標變化 $\Delta x=5$，$\Delta y=6$，求 x，y。

解 $\begin{cases}\Delta x = 3-x=5\\ \Delta y=-3-y=6\end{cases}$ $\therefore (x,y)=(-2,-9)$

26. 質點原位於 $A(1,0)$，對原點反時鐘方向繞一圈回 $A(1,0)$，則座標淨變化爲何？

解 $\Delta x = 1-1=0$

$\Delta y = 0-0=0$

27. 質點經 $\Delta x=h$ 及 $\Delta y=k$ 後至 $B(u,v)$，則起點位置？

解 設起點位置爲 (x,y)，則

$$\begin{cases}\Delta x = u-x=h\\ \Delta y = v-y=k\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(v-h,v-k)$$

28. 質點由 $A(-2,5)$ 至 y 軸以 $\Delta y=3\Delta x$ 行之，求新座標。

解 由 A 至 y 軸，故 $\Delta y=0-5=-5$

設新座標爲 (x,y)，則

$$\begin{cases}\Delta x = x-(-2)=\frac{1}{3}\Delta y=-\frac{5}{3}\\ \Delta y = y-5=-5\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-\frac{11}{3},0)$$

29. 一質點以定速度 v 沿過原點直線運動，座標系及質點軌跡如圖 1.13 所示，線上質點以 $\Delta t=1$ 秒間隔，爲什麼面積 A_1，A_2，…，A_6 相等？如喀卜勒第二定律（見前言）所敍，連接原點及質點之線在相等時間內掃過之面積相同。（題示：由原點到運動直線作一高）

解

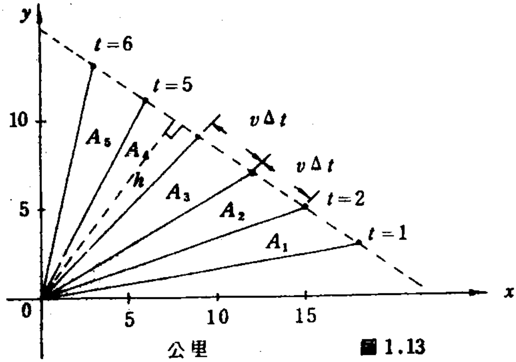


圖 1.13

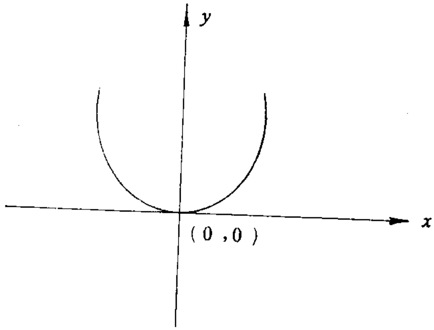
做一高 h，皆為五三角形之高，而其底為 $v\Delta t = v$ =定值，故三角形 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 為等底等高，故面積相等。

30. 質點沿拋物線 $y = x^2$ 由 $A(1,1)$ 至 $B(x,y)$，$x \neq 1$，畫出拋物線並證明 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = x + 1$（若 $\Delta x \neq 0$）

證　$y = x^2$ 由配方法知有極小值為0，且該點為 $(0,0)$

又 $y = x^2 = (-x)^2$，故拋物線對稱 y 軸

∴圖如



設兩點 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 而質點由 (x_1, y_1) 至 (x_2, y_2)，則

$$\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases} \quad 又 \begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 \quad (x_2 \neq x_1)$$

但由題知 $(x_1, y_1) = (1, 1)$，$(x_2, y_2) = (x, y)$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_2 + x_1 = x + 1 \quad (\Delta x \neq 0)$$

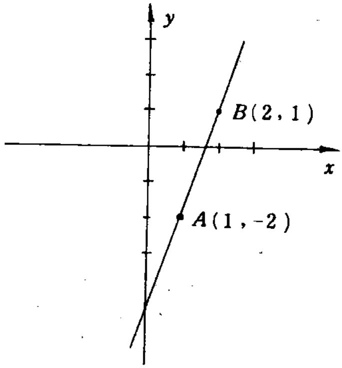
1·3 直線的斜率

在問題1-16中，描出 A，B 點，並找出其所決定直線之斜率，及垂直該直線之直線之斜率。

1. $A(1, -2)$，$B(2, 1)$

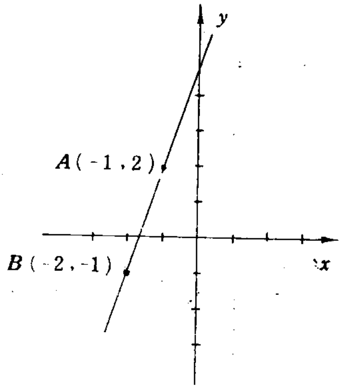
解　$m_1 = \dfrac{1-(-2)}{2-1} = 3$（$AB$ 斜率），

$m_2 = -\dfrac{1}{3}$（$\perp AB$ 斜率）



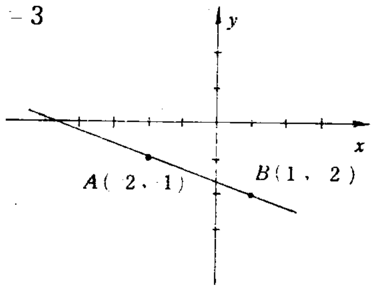
2　$A(-1, 2)$，$B(-2, -1)$

解　$m_1 = \frac{-3}{-1} = 3$，$m_2 = -\frac{1}{3}$



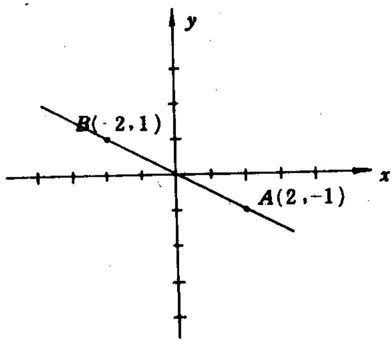
3　$A(-2, -1)$，$B(1, -2)$

解　$m_1 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$，　$m_2 = 3$



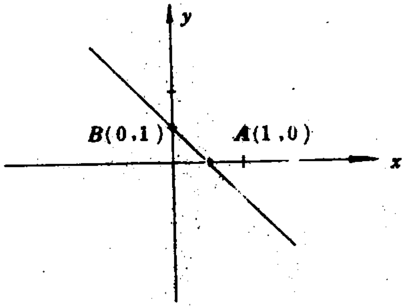
4. $A(2, -1)$, $B(-2, 1)$

解 $m_1 = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad m_2 = 2$



5. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$

解 $m_1 = \dfrac{1}{-1} = -1$ $\qquad m_2 = 1$



6. $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$

解 $m_1 = \dfrac{0}{2} = 0$

m_2 不存在