经济数学（一）

微积分学

华中师范大学出版社

经济数学(一)

微积分学

中南财经大学数学教研室编

华中师范大学出版社

一九八六年六月

经济数学(一)
微积分学
中南财经大学数学教研室编
*
华中师范大学出版社出版
(武昌桂子山)
新华书店湖北发行所发行
武汉大学出版社印刷总厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：16 字数：37.5万
1986年9月第1版 1989年4月第2次印刷
ISBN 7—5622—0322—9/O·41
印数7 501—10 500 定价：5.10元

前　　言

《经济数学》是根据财政部一九八五年青岛教学大纲讨论会审定的大纲内容，经过多年的教学实践编写而成的。全套书共分四册：第一册《微积分学》；第二册《线性代数》；第三册《线性规划》；第四册《概率统计》。可作为各类经济院校的教材或教学参考书，也可作为经济工作者的自学用书。

《微积分学》在编排上讲述了微积分的基本理论及方法，力求简明直观、通俗易懂；在取材上介绍了常用经济函数及其应用。经济应用部分结合教材，独立成节，便于教学。

本书的第一章至第六章由彭勇行编写，第七章、第八章由刘建辉编写。谢克臣、刘康泽等同志参加了定稿工作，刘康泽为本书绘制了全部插图。

本书承华中师范大学数学系钱吉林付教授主审，华中师范大学出版社杨发明编辑审阅，并提出了不少改进意见。对此，我们表示衷心的感谢

由于我们水平不高，加之时间仓促，书中会有不少缺点和错误，敬请读者指正。

中南财经大学数学教研室

1986年6月

目　　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　中值定理及导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定 积 分

第六章　无穷级数

第七章　多元函数

第八章　微分方程及差分方程简介

第一章　函数与极限

函数是微积分学的基本概念，也是分析经济变量的重要工具。极限是微积分的主要运算——微分和积分的理论基础。本章先简要地复习函数概念及其性质，然后着重讨论极限及其运算，並用极限讨论函数的连续性。

第一节　函　　数

中学数学已经学过集合、映射、函数的概念及其性质，本节将对这些内容作简要的复习和提高。

一、函数的概念

1.映射.

定义1　（映射）设 A、B是两个非空集合，如果存在一个确定的对应法则 f，使得对任意一个元素$a\in A$，通过f有唯一的元素$b\in B$与之对应，则称f是一个从A到B的映射，记作

$$f:\ A\to B$$

b称为在映射f下a的象，记为$b=f(a)$，a 称为b的原象．A称为映射 f 的定义域，$f(A)=\{f(a)|a\in A\}(\subset B)$ 称为映射f的值域（图1—1）。

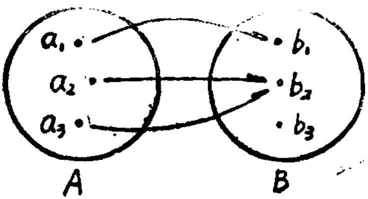


图1—1

注意：在映射的定义中，对每一个元素

$a\in A$，有唯一的象$b=f(a)$与之对应；反之，对$b\in B$可以有不同的原象与之对应。

定义2 （一一映射） 设f：$A\to B$是一个从A到B的映射，如果对任意元素 a_1，$a_2\in A$，且$a_1\neq a_2$，有

$$f(a_1)\neq f(a_2)$$

则称映射 f为从A到B的一一映射（图1—2）。

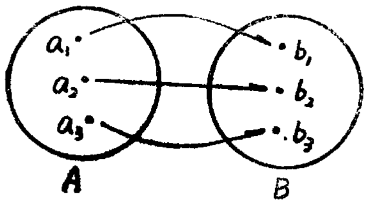


图1—2

定义3 （逆映射）设 f 是 A到B的一一映射，定义$f(A)$到A的映射如下：对任意 $b\in f(A)$，$g(b)=a$，当$b=f(a)$时，称g为f的逆映射，记作

$$f^{-1}:\ f(A)\to A$$

（图1—3）

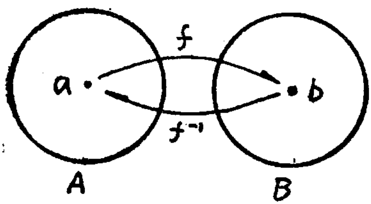


图1—3

注意：逆映射 f^{-1}的定义域是映射f的值域 $f(A)$，其值域是映射f的定义域 A。

定义4 （复合映射）设φ是A到 B 的映射，f是B到C的

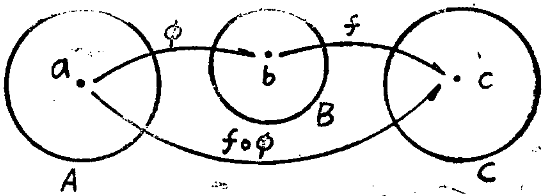


图1—4

映射，如果对任意元素$a\in A$，有$\tau(a)=f[\varphi(a)]$与之对应，则称从A到C的映射τ为映射φ、f的复合映射，记作

$$\tau=f\circ\varphi \qquad (图1—4)$$

注意：复合映射的顺序是不可交换的。复合映射$f\circ\varphi$表示先作映射φ而后作映射f，复合映射$\varphi\circ f$表示先作映射f而后作映射φ，这两种复合映射是不相同的。

最后，给出邻域的概念。

定义5 （邻域）以x_0为中心，长度为2δ（$\delta>0$）的对称开区间称为点x_0的δ邻域，记作：$N(x_0, \delta)$，x_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径。邻域有三种表示法：

(1) $(x_0-\delta, \ x_0+\delta)$;

(2) $|x-x_0|<\delta$;

(3) $x_0-\delta<x<x_0+\delta$。

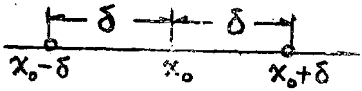


图1—5

邻域$N(x_0, \delta)$可以在数轴上表示出来（图1—5），由图可知，对任意点$x\in N(x_0, \delta)$，距离$|x-x_0|<\delta$。

以后还会遇到一种空心邻域，即在邻域$N(x_0,\delta)$中，$x\neq x_0$，这种邻域通常表示为

$$0<|x-x_0|<\delta$$

2.函数的定义.

先看几个实例。

例1 球体积v和球半径r的对应法则是

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (r\geqslant 0)$$

设 $V=\{球体积\}, R=\{球半径\}$，对每一个球半径$r\in R$，通过对应法则$v=\frac{4}{3}\pi r^3$，都有唯一确定的球体积$v\in V$与之

对应，这里 $V=[0, +\infty)$，$R=[0, +\infty)$。

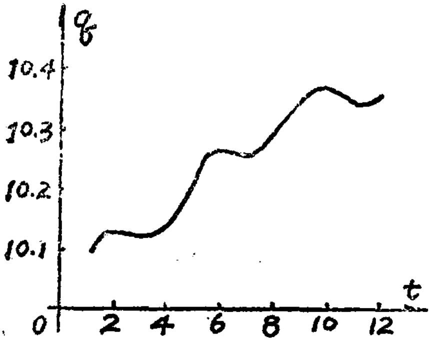


图1—6

例2 为了掌握某企业一年的生产情况，通常根据每月生产的原始记录，用横轴表示时间 t(单位：月)，用纵轴表示生产量q(单位：万吨)，在坐标平面上依次描点连成一条曲线，称为生产曲线(图1—6)，对于每一个时间 $t\in T$，通过对应法则(生产曲线)，都有唯一的生产量 $q\in Q$与之对应。这里 $Q=[10.1, 10.4]$，$T=\{1,2,\cdots\cdots, 12\}$。

例3 某商品的单价p和购买量x的对应法则如下表：

购买量x(件)	$0<x\leqslant 50$	$50<x\leqslant 100$	$100<x\leqslant 200$	$x>200$
单价p(元)	3.00	2.80	2.60	2.50

对于每一个购买量 $x\in X$，通过对应法则(单价表)，都有唯一确定的单价$p\in P$与之对应。这里，$X=\{x\mid x>0, x\in Z\}$(Z为正整数集)，$P=\{3.00,2.80,2.60,2.50\}$。

以上三个实例内容各不相同，但都表示两个实数集之间的一个映射。因此，我们引进函数的定义。

定义6 (函数)设X、Y是两个非空的实数集，如果f是一个从X到Y的映射，对每一个实数$x\in X$，通过f都有唯一的实数$y\in Y$与之对应，则称f是X上的一个函数，记作

$$y=f(x)$$

其中x称为自变量，y称为函数或因变量，X称为函数的定义域，记作

$$D(f)=X$$

$f(X)=\{f(x)\,|x\in X\}$称为函数的值域，记作

$$Z(f)=f(X)\subset Y$$

注意：(1)函数是实数集X、Y之间的映射，定义域$D(f)$是原象的集合，值域$Z(f)$是象的集合.

(2) 对每一个实数$x\in X$，通过f都有唯一的实数$y\in Y$与之对应；反之，对$y\in Y$，可以有不同的x与之对应。定义6所确定的函数是单值函数，本教材着重讨论单值函数。

(3) 对应法则f和定义域X是函数的两要素，值域是随f和X的给定而确定的.对自变量的确定值$x_0\in X$，对应的函数确定值常记为

$$f(x_0)\quad 或\quad y|_{x=x_0}$$

根据函数的定义，例1中球体积v是球半径r的函数，即$v=f(r)$，定义域$D(f)=[0,+\infty)$，值域$Z(f)=[0,+\infty)$；例2中，生产量q是时间t的函数，即$q=f(t)$，定义域$D(f)=\{1,2,\cdots,12\}$，值域$Z(f)=[10.1,\ 10.4]$；例3中，商品单价p是购买量x的函数，即 $p=f(x)$，定义域$D(f)=\{x|\ x>0,\ x\in Z\}$,$Z(f)=\{3.00,2.80,2.60,2.50\}$。

例4. 求函数$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域。

解 要使 $\sqrt{x^2-x-6}$有意义，必须

$x^2-x-6\geqslant 0$

即 $(x+2)(x-3)\geqslant 0$

解得 $x\leqslant -2$ 或$x\geqslant 3$

又因为要使 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 有意义

必须有 $$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1$$

即 $$-3\leqslant x\leqslant 4$$

所以，定义域

$$\begin{aligned}D(f)&=\{(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)\}\cap[-3,4]\\&=\{(-\infty,-2]\cap[-3,4]\}\cup\{[3,+\infty)\cap[-3,4]\}\\&=[-3,-2]\cup[3,4]\end{aligned}$$

3.函数的表示法。

常用的有三种表示法．列表法：将一系列自变量的值与对应的函数值列成表格，这种函数表示法称为列表法。例如，三角函数表，生产统计表，货运价格表等。例 3 就是用列表法给出的函数；图示法：把自变量 x 和函数 y 当作坐标平面内点的横坐标和纵坐标，这些点所描出的平面曲线就表示了 y 和 x 的函数关系，这种表示函数的方法称为图示法。如例 2，就是用生产曲线表示函数；公式法：把自变量 x 和函数 y 之间的函数关系直接用公式表示出来，这种方法称为公式法。按照公式的形式分类，常见的函数有以下几种：

1°显函数：自变量 x 与函数 y 的函数关系是由自变量 x 的明显表达式 $y=f(x)$ 所给出的，称为显函数。例如，

$y=ax^2+bx+c$，　　$y=\lg\sin x$ 等。

2°隐函数：自变量 x 与函数 y 的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$ 所给出的，称为隐函数。例如，

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a^y=xy(a>0)$ 等。

3°参变数函数：自变量 x 和函数 y 的函数关系是由参数方

程$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$所给出，称为参变数函数或由参数方程所确定的函数。例如，椭园的参变数函数为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

4°分段函数：自变量x和函数y的函数关系是由两个或两个以上的公式所给出，称为分段函数。例如，例3商品的单价p和购买量x的函数关系$p=f(x)$可表示为分段函数

$$p=\begin{cases} 3.00 & x\in(0,50] \\ 2.80 & x\in(50,100] \\ 2.60 & x\in(100,200] \\ 2.50 & x\in(200,+\infty) \end{cases}$$

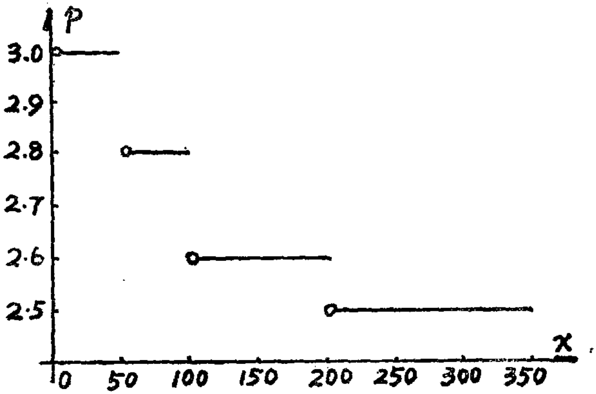


图1—7

又例如，函数 $y=|x|$可表示为分段函数

$$y=\begin{cases} -x & x\in(-\infty,0) \\ 0 & x=0 \\ x & x\in(0,+\infty) \end{cases}$$

5°整标函数：定义在正整数集合上的函数称为整标函数，记作

$$y_n=f(n) \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

例如：$y_n=\dfrac{1}{2^n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$；

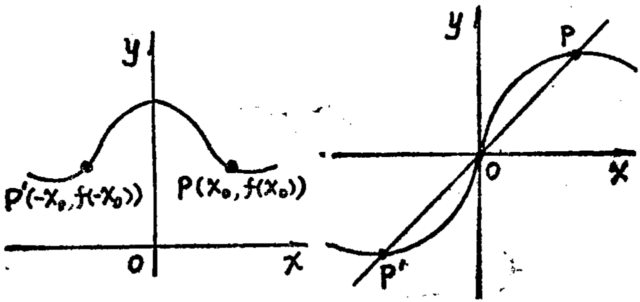
$$y_n=1+\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots).$$

二、函数的简单性质

1.奇偶性.

定义7 （奇函数和偶函数） 设函数 $y=f(x)$，对任意 $x\in D(f)$，如果恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称（图1—8(A)），奇函数的图形关于原点对称（图1—8(B)）。



(A) 图1—8 (B)

2.单调性

定义8 （单调函数）设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，如果 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；如果 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单

调减少的。如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加或单调减少，则称此区间为函数 $y=f(x)$ 的单调区间。

单调增加函数的图形沿 x 轴的正向上升，单调减少函数的图形沿 x 轴的正向下降（图1—9）。

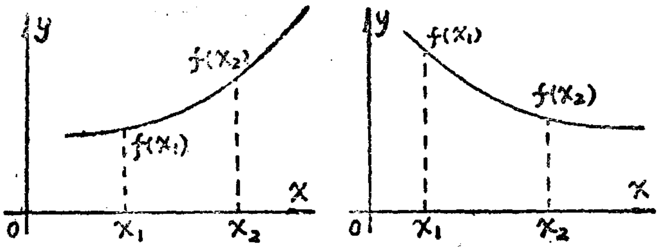


图1—9

例5. 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$； (2) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}(a>0)$；

(3) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$； (4) $f(x)=\sin x+\cos x$。

解 (1) $f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，对任意 $x\in D(f)$，有

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)^{-\frac{1}{3}}=-x^3-x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=-(x^3+x^{-\frac{1}{3}})=-f(x)$$

所以，$f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$ 是奇函数。

(2) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，

对于任意$x\in(-\infty, +\infty)$，有

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$$

所以，$f(x)=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}$是偶函数。

(3) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$的定义域$D(f)=(-1, 1)$，对任意$x\in(-1, 1)$，有

$$f(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$$

因此，$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$是奇函数。

(4) $f(x)=\sin x+\cos x$的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$，对任意$x\in(-\infty, +\infty)$

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin+\cos x$$

而 $-f(x)=-\sin-\cos x$

因为$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$，故$f(x)=\sin x+\cos x$是非奇非偶函数。

例6 讨论函数$f(x)=1-x^2$的单调性。

解 $f(x)=1-x^2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，对任意x_1，$x_2\in(-\infty, +\infty)$，且$x_1<x_2$，因为

$$f(x_1)-f(x_2)=(1-x_1{}^2)-(1-x_2{}^2)$$
$$=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

当x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$时，$x_2-x_1>0$，$x_2+x_1<0$，于是

$$f(x_1)<f(x_2)$$

所以，在区间$(-\infty, 0)$内函数$f(x)=1-x^2$单调增加。

当x_1，$x_2\in(0, +\infty)$时，$x_2-x_1>0$，$x_2+x_1>0$， 于是

$$f(x_1)>f(x_2)$$