数学分析

题解

（上册）

泰安师专数学系主编

前　　言

这本《习题解答》是泰安、临沂、济宁、昌潍、青岛、烟台、枣庄、荷泽、聊城、德州、淄博等师范专科学校和昌潍教师进修学院所编写的《数学分析》上、中、下三册的习题解答，可供使用《数学分析》者参考。本《习题解答》分上、下两册装订。

《习题解答》上册编演、绘图工作的有泰安师范专科学校王成新、庄寿美、张华忠、刘宅城，临沂师范专科学校王诚志等同志。参加审稿工作的有王成新、刘宅城同志。由于我们水平有限，书中错误和不妥之处必然不少，请读者批评指正。

——编演者

一九八一年八月

目　录

第一篇　分析引论

第二篇　一元函数微分学

第三篇　积分学

第一篇　分析引论

第一章　函数和极限

习　题　一

1　解不等式：

（1）$|2x-1|\leqslant 3$　　（2）$|3x+1|>2$

（3）$|x|>|x+1|$　　（4）$2<\frac{1}{|x|}<4$

（5）$|x-x_0|<\delta(\delta>0)$　（6）$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>m\ (m>0)$

解　（1）由$|2x-1|\leqslant 3$得

$$-3\leqslant 2x-1\leqslant 3$$

即$-1\leqslant x\leqslant 2$。

（2）由$|3x+1|>2$得

$$3x+1<-2 \text{ 和 } 3x+1>2$$

即　　$x<-1$ 和 $x>\frac{1}{3}$

（3）将$|x|>|x+1|$两边平方得

$$x^2>(x+1)^2 \quad \text{即} \quad 2x+1<0$$

从而得　$x<-\frac{1}{2}$。

（4）原式即$\frac{1}{4}<|x|<\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{1}{2}>x>\frac{1}{4}\text{或}-\frac{1}{4}>x>-\frac{1}{2}$$

（5）原式即

$$-\delta<x-x_0<\delta$$

从而得

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

（6）原式即

① $\frac{x-2}{x+1}<-m$ 和　　② $\frac{x-2}{x+1}>m$

解①式得 $-1<x<\frac{2-m}{1+m}$　　解②式得 $x<\frac{2-m}{1+m}$

所以原不等式的解为 $-1<x<\frac{2-m}{1+m}$ 和 $x<\frac{2-m}{1+m}$.

2　设 $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=x-2$，解方程

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$$

解　因为当且仅当 $f(x)$、$\varphi(x)$ 同号时有

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$$

所以此方程与下列不等式组同解：

$$\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\ \varphi(x)\geqslant 0\end{cases}\qquad \begin{cases}f(x)\leqslant 0\\ \varphi(x)\leqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x-2\geqslant 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x+1\leqslant 0\\ x-2\leqslant 0\end{cases}$$

它们的解是 $x\geqslant 2$ 和 $x\leqslant -1$，此即原方程组的解。

3　设 $f(x)=(|x|+x)(1-x)$，求满足以下各式的 x 的值：

（1）$f(x)=0$　　（2）$f(x)<0$

解 （1） 由原式得

$$|x|+x=0\text{ 和 }1-x=0$$

故$x\leqslant 0$和$x=1$

（2） $\because |x|+x\geqslant 0$，为使$(|x|+x)(1-x)<0$，必须$|x|+x>0$，$1-x<0$，$\therefore x>1$。

4 证明以下不等式：

①$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

②$||a|-|b||\leqslant|a+b|$

③$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

④$||a|-|b||\leqslant|a-b|$

证 ①$\because -|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，

两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|)$$

即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

$$\because\quad |a|=|a+b-b|\leqslant|a+b|+|b|$$

$$\therefore\quad |a|-|b|\leqslant|a+b|$$

② $\because\quad |a+b|\geqslant|a|-|b|$ （A）

又 $\because\quad |a+b|\geqslant|b|-|a|$

$\therefore\quad |a|-|b|\geqslant-|a+b|$ （B）

由(A)、(B)式得

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|$$

③ $\because\quad |a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|b|$

又 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$

从而有

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|$$

故有所证式

④ $\because\ |a-b|=|a+(-b)|\geqslant||a|-|b||$

故得证

5 证明

$$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$

证 $|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|=|x-[-(x_1+x_2+\cdots+x_n)]|$

$\geqslant|x|-|x_1+x_2+\cdots+x_n|$

$\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$

习　题　二

1 求下列函数的定义域和在给定点的值：

（1）$f(x)=-x+\dfrac{1}{x}$；$f(-1)$，$f(1)$，$f(2)$

（2）$s(t)=\dfrac{1}{t}e^{-t}$；$s(1)$，$s(2)$

(3) $g(\alpha)=\alpha^2\operatorname{tg}\alpha$；$g(0)$，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

（4）$x(\theta)=\sin\theta\cos\theta$；$x\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x(-\pi)$

解 （1）定义域：$x\neq0$的全体实数。

$$f(-1)=0,\ f(1)=0,\ f(2)=-1\frac{1}{2}$$

(2) 定义域：$t\neq0$的全体实数

$$s(1)=\frac{1}{e},\ s(2)=\frac{1}{2e^2}$$

（3）定义域：$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$的全体实数（$k$为整数）。

$$g(0)=0,\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{16},\quad g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi^2}{16}$$

（4）定义域：全体实数。

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad x(-\pi)=0$$

2　求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{2+x-x^2}$　　（2）$y=\sqrt{\cos x}$

（3）$y=\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$　　（4）$y=\frac{1}{\sin \pi x}$

解（1）$-1\leqslant x\leqslant 2$

（2）$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$　$(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$

（3）要 $\sin\frac{\pi}{x}>0$，只须 $2n\pi<\frac{\pi}{x}<(2n+1)\pi$。

当 $n\neq0$时，$\frac{1}{2n+1}<x<\frac{1}{2n}$　$(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

当 $n=0$时，$0<\frac{\pi}{x}<\pi$，得 $x>1$。

所求定义域为$\frac{1}{2n+1}<x<\frac{1}{2n}$和 $x>1$。

（4）$(n,\ n+1)$　$(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$

3　设

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ x-1, & x\geqslant0\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$。

解 $f(-2)=5$，$f(-1)=2$，$f(0)=-1$，$f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

4 设

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<10\\ 1+t^2, & 10\leqslant t\leqslant 20\\ t-10, & 20<t\leqslant 30\end{cases}$$

求$x(0)$，$x(5)$，$x(10)$，$x(20)$，$x(25)$，$x(30)$

解 $x(0)=0$，$x(5)=0$，$x(10)=101$，$x(20)=401$，$x(25)=15$，$x(30)=20$

5 证明对于线性函数$f(x)=ax+b$，若自变量$x_n(n=1,2,\cdots)$成等差数列，则对应的函数值$f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$也成等差数列。

证 设$x_{n+1}=d+x_n$，则

$$\begin{aligned}y_{n+1}=f(x_{n+1})&=ax_{n+1}+b=a(x_n+d)+b\\&=ax_n+ad+b=f(x_n)+ad\\&=y_n+ad\end{aligned}$$

所以$y_n(n=1,2,\cdots)$也成等差数列。

6 如果曲线$y=f(x)$的任何一条弦都高出它所限定的的弧(图 1－1)，证明

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

对于所有的x_1、$x_2(x_1\neq x_2)$都成立。

证 任意连接弧上两点$A(x_1, f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，

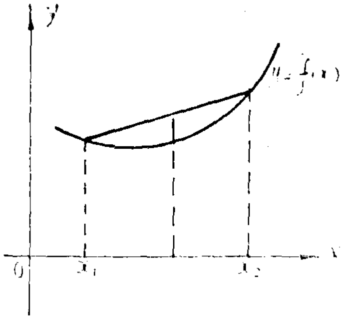

图　1-1

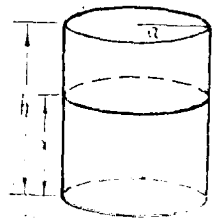

图　1-2

得弦 AB。其中点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$，在弧上的对应点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$。

由题设知　$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$。

7　向一个半径为a高为h的圆形容器内倒某种溶液，设溶液的高度为x(图1-2)，求函数$V=f(x)$。

解　$V=\pi a^2x$

8　某灌溉渠的横断面是等腰梯形(图1-3)，底宽2米，斜边的倾斜角为45°，若S表示断面$ABCD$的面积，求函数$S=f(h)$。

解　$\because$　$CD=2+2(\mathrm{tg}45°)h$

$=2(1+h)$

又　$S=\frac{1}{2}(AB+CD)h$

$\therefore$　$S=(2+h)h$

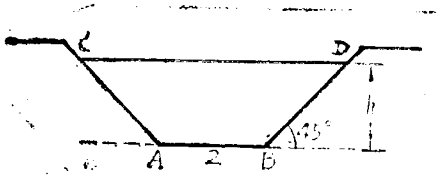

图 1-3

9 有一深为H的矿井，如果用半径为R的卷扬机以每秒ω弧度的角速度从矿井内起吊重物，设重物底面与地面的距离为S，时间记为t，求函数$S=f(t)$(图1-4)。

解 $S(t)=H-\omega Rt$

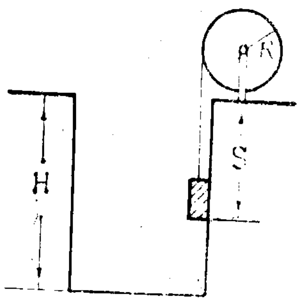

图 1-4

习 题 三

1 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2$, $x\in(-\infty,0]$ (2) $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,0]$

(3) $y=\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$

(4)
$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

解 (1) $y=-\sqrt{x}$，$0\leqslant x<+\infty$

(2) $y=-\sqrt{1-x^2}$，$0\leqslant x\leqslant 1$

(3) 当$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$时，有$-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

又 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$，故$\pi-x=\arcsin y$，

$x=\pi-\arcsin y$

将上式的x、y互换得$y=\sin x\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)$的反函数为

$$y=\pi-\arcsin x,\ -1\leqslant x\leqslant 1。$$

(4)
$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$$

2 证明函数

$$y=\frac{1-x}{1+x},x\in(-\infty,\ -1),\ (-1,\ +\infty)$$

的反函数与它相同。

解 由原式得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，交换x，y得$y=\frac{1-x}{1+x}$。

故其反函数与它相同。

习 题 四

1 下列函数能否构成复合函数，如果能，写出复合函数并指出复合函数的定义域：

(1) $y=2^u,u=x^2$ (2) $y=\ln u,u=1-x^2$

(3) $y=u^2+u^3$，$u=\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ -1, & x\text{为无理数}\end{cases}$

(4) $y=2$，定义域为U_1，$u=\varphi(x)$，定义域为X，值域为U_2。

(5) $y=\sqrt{u}$，$u=\cos x$

解 (1)因为$u=x^2$的值域$[0,+\infty)$包含于$y=2^u$的定义域$(-\infty,+\infty)$内，所以能构成复合函数$y=2^{x^2}$其定义域为$(-\infty,+\infty)$。

(2) $y=\ln u$的定义域是$(0,+\infty)$，$u=1-x^2$的值域是$(-\infty,1)$，所以不能构成复合函数。

如果限定$-1<x<1$，则$u=1-x^2$的值域为$(0,1)$这时可以构成复合函数$y=\ln(1-x^2)$，定义域为$-1<x<1$。

(3) $y=u^2+u^3$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，$u=\varphi(x)$的值域是$u=1$和$u=-1$，它们包含于$(-\infty,+\infty)$，故能构成复合函数：

$$y=\begin{cases}2, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$。

(4)若当$x\in X_1$时，$\varphi(x)\in U_1$，则此时可构成复合函数$y=2$，定义域为X_1。

(5) $y=\sqrt{u}$的定义域为$[0,+\infty)$，而$u=\cos x$的值域为$[-1,1]$，所以不能构成复合函数。

若 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$为整数)

则$u=\cos x$的值域为$[0,1]$此时可构成复合函数

$y=\sqrt{\cos x}$，定义域为$2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$为整

数)，

3　设$f(x)=ax^2+bx+c$，证明：

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

证　$f(x+3)=a(x+3)^2+b(x+3)+c$

$$f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+c$$

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

$\therefore$　$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$$\begin{aligned}&=ax^2+(6a+b)x+9a+3b+c\\&-3ax^2-3(4a+b)x-12-6b-3c\\&+3ax^2+3(2a+b)x+3a+3b+3c\\&-ax^2+bx-c\equiv 0\end{aligned}$$

4　(1)　设$f(x)=a+bx+\dfrac{c}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{x}\right)$

(2)　设$f(x)=x^2\ln(1+x)$，求$f(e^{-x})$

(3)　设$f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$，求$f(x^2)$，$f(-x^2)$

(4)　设 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}$，求$f(a\operatorname{tg}x)$

解　(1)　$f\left(\dfrac{2}{x}\right)=a+b\cdot\dfrac{2}{x}+\dfrac{c}{\dfrac{2}{x}}=a+\dfrac{2b}{x}+\dfrac{cx}{2}$

(2)　$f(e^{-x})=(e^{-x})^2\ln(1+e^{-x})$

$$=e^{-2x}[\ln(1+e^x)-x]$$

(3)　$f(x^2)=\sqrt{1+x^2+x^4}$，$f(-x^2)=\sqrt{1-x^2+x^4}$

(4)　$f(a\operatorname{tg}x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2x}}=\left|\dfrac{\cos x}{a}\right|$

5　若 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$

解　$f[\varphi(x)]=f(2^x)=(2^x)^2=2^{2x}$

$$\varphi[f(x)]=\varphi(x^2)=2^{x^2}$$

6　若$\varphi(x)=x^3+1$，求$\varphi(x^2)$，$[\varphi(x)]^2$，$\varphi[\varphi(x)]$

解　$\varphi(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$

$$[\varphi(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$$

$$\varphi[\varphi(x)]=(x^3+1)^3+1=x^9+3x^6+3x^3+2$$

7　设$F(z)=a^z$，证明：

(1) $F(-z)F(z)-1=0$,

(2) $F(x)F(y)=F(x+y)$

证　(1) $F(-z)F(z)-1=a^{-z}\cdot a^z-1=1-1=0$

(2) $F(x)F(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=F(x+y)$

8　证明双曲函数之间的关系式：

(1) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$

(2) $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$

(3) $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$

(4) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$

(5) $\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x$

证　以证(1)为例

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$

$$=e^x\cdot e^{-x}=1$$

习　题　五

1　证明函数 $y=e^{-x^2}\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内有界。

证　∵$|e^{-x^2}\cos x|\leqslant|e^{-x^2}|\leqslant 1$

∴　函数在$(-\infty,+\infty)$内有界。

2　证明函数$y=x^2$在$[-1,1]$上有界，而在$[1,+\infty)$上无界。

证　当$x\in[-1,1]$时，$|x^2|\leqslant 1$，∴函数在$[-1,1]$上有界。

当$x\in[1,+\infty)$时，对于任给数$M>0$，当$x>\sqrt{M}$，则有$|x^2|>M$，所以函数在$[1,+\infty)$上无界。

3　证明函数$y=2\sin x+3\sin 2x+4\sin 3x$在$(-\infty,+\infty)$内有界。

证　$|2\sin x+3\sin 2x+4\sin 3x|$

$\leqslant 2|\sin x|+3|\sin 2x|+4|\sin 3x|$

$\leqslant 2+3+4$

$=9$

∴函数在$(-\infty,+\infty)$内有界。

4　证明函数$y=|1-x|-|1+x|$在$[-a,a]$ $(a>0)$上有界。

证　∵$|1-x|-|1+x|\leqslant|(1-x)+(1+x)|=2$

∴函数在$[-a,a]$上有界

5　指出下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些既不是奇函数也不是偶函数：

(1)　$y=x^4-2x^2$　　(2)　$y=a^x(a>1)$

(3)　$y=\mathrm{tg}x+\sin x$　(4)　$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}(a>1)$

(5)　$y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}(a>1)$　(6)　$y=\dfrac{x}{a^x-1}$