毛纲源理工类数学辅导系列

高等数学学习指导 硕士研究生备考指南

高等数学

解题方法技巧归纳

（上册·第2版）

毛纲源 编著

△ 专题讲解 涵盖重点难点
△ 通俗易懂 帮助记忆理解
△ 同步学习 深入辅导指点
△ 复习迎考 获益效果明显

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源理工类数学辅导系列

高等数学学习指导　硕士研究生备考指南

高等数学
解题方法技巧归纳
（上册·第2版）

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法技巧归纳(上册·第2版)/毛纲源 编著.
—武汉:华中科技大学出版社,2010年4月
ISBN 978-7-5609-5758-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题
Ⅳ.O13-14

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第198612号

高等数学解题方法技巧归纳(上册·第2版)　毛纲源　编著

责任编辑:王汉江　封面设计:潘　群
责任校对:张　琳　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850mm×1168mm　1/32　印张:16.25　字数:400 000
版次:2010年4月第2版　印次:2010年4月第8次印刷
ISBN 978-7-5609-5758-6/O·513　定价:28.80元

内容提要

本书将高等数学的主要内容按问题分类，通过引例，归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧，其中不少是作者多年来积累的教学经验. 读者阅读此书，必将增强分析问题、解决问题和应试的能力.

本书实例多、类型广、梯度大. 例题主要取材于两部分：一部分是面向21世纪课程新教材《高等数学》(上册 · 第六版)(同济大学应用数学系编，高等教育出版社出版)中的典型习题；另一部分是历届全国硕士研究生入学考试数学试题，其中数学试卷一、数学试卷二的不少考题，都已收入.

本书可供本(专)科学生学习高等数学阅读和参考；对于自学者和有志攻读硕士学位研究生的考生，本书更是良师益友；对于参与专升本、成人教育、自考和其他文凭考试的读者，本书不失为一本有指导价值的很好的参考书；对于从事高等数学教学的教师和工程技术人员，也有一定的参考价值.

第 2 版前言

本书自 2001 年 8 月出版以来，受到广大读者的厚爱，多次重印，对于广大读者的支持和关心，在此表示衷心感谢. 根据读者对本书的应用情况及其意见和要求，在第 1 版的基础上，特作如下的修改：为突出重点和难点，对其内容进行了适当的调整、充实和删改，但保持全书原有的特色；按问题分类，通过引例，剖析各类题目的解题思路，归纳、总结其解题方法技巧. 例题丰富而又典型，类型广、梯度大，叙述详细，通俗易懂，便于自学.

此外，不少题目还给出一题多解，从多角度详细分析，深入浅出地讲解，希望收到化难为易、举一反三的效果. 本书仍以同济大学数学系所编教材《高等数学》(上册 · 第六版)为蓝本编写，不少例题选自该教材中的典型习题.

通过对本书的学习，加深对高等数学基本内容的理解和掌握，提高读者分析问题和解决问题的能力，这是作者最大的心愿.

由于本人水平有限，书中难免有不少缺点和不妥之处，恳请同行、读者批评指正.

毛纲源
北京师范大学珠海分校国际商学部
2010 年 1 月

第 1 版前言

《线性代数解题方法技巧归纳》(第 2 版)与《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》出版后，深受读书者欢迎，多次重印，畅销全国. 应广大读者要求，现分上、下两册出版《高等数学解题方法技巧归纳》.

高等数学(微积分)是高校理工科最主要的基础课之一. 学生对它掌握得如何，不仅直接关系到后继课程的学习，而且对今后的提高与发展，以及工作中的贡献，都有着深远的影响. 为帮助广大学生和自学者学好高等数学，为给他们备考研究生提供一份复习资料，编写了这套《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册).

同前两本书一样，本书将高等数学的主要内容按问题分类，通过引例归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧. 它不同于一般的教科书和习题解答，自具特色.

本书注意一题多解，注意分析各种解题方法的特点与联系，分析题中条件与所得结果之间的联系，灵活地将解题方法技巧与所学基本理论联系起来. 这样不仅可以培养读者的灵活思维能力，达到举一反三、触类旁通的学习效果，而且在学会解题的同时，也必将会提高分析问题和解决问题的能力.

本书还注意各种重要题型的解法技巧的归纳、总结. 试题是无限的，而题型是有限的，只有掌握好各类题型的解法技巧，才能以不变应万变，找到解题的切入点和突破口.

此外，还在不少例题后加写"注意"部分，内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法中常见错误的剖析；某些例题中结论的推广等.

本书实例较多，且类型广、梯度大. 例题和习题中一部分取材于面向 21 世纪课程教材《微积分》(上册)(同济大学应用数学系编，高等教育出版社，2000 年 1 月出版)中的典型习题；另一部分是 2002 年之后的历届全国攻读硕士研究生入学考试数学试卷一、二的考题.

需查找同济大学编《微积分》中习题解答的读者，可参看书末附录.

考研试题既反映了"数学考试大纲"对考生的要求，又蕴含着在大纲指导下的命题思想. 通过考研题的的研讨，使有志攻读硕士学位的学生"平战结合"，了解考研试题的特点及其逐年发展趋势，从知识上、题型上、方法和技巧

上作好应试准备. 若能把这些考研试题全部理解消化,将为考研成功打下坚实的基础.

考研试题并非都是难题,其突出特点是全面、准确地体现数学教学大纲和考研大纲的要求. 多做考题并由此总结、归纳出解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力,以及加深对高等数学基础知识的理解是大有好处的.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习高等数学(微积分)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士学位的考生,本书更是良师益友;对于从事高等数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值.

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例题,恕不一一指明出处. 在此一并向有关作者致谢.

尽管作者有过多年从事高等数学和考研数学辅导班的教学实践,但由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有不足和错误之处,恳请读者不吝指正.

毛纲源

2001 年 2 月于武汉理工大学西院

目　录

第1章　函数、极限、连续

1.1　函数及其性质

高等数学研究的对象是函数，研究函数所采用的方法为极限. 在讨论求函数极限的各种方法之前，理解和掌握函数的定义及其性质是十分必要的.

1.1.1　函数定义域的求法

1. 求函数的(自然)定义域

一般由数学式给出的抽象函数 $y=f(x)$，如果没有指明自变量和因变量的具体意义(如物理意义、几何意义等)或其他声明，则约定其定义域就是使该数学式有意义的自变量的一切实数组成的集合，且称为该函数的自然定义域，以下简称定义域. 下面介绍函数定义域的求法.

求法一　用排除法求之.

此法常用来求简单函数的定义域论. 用“排除法”求函数的定义域，顾名思义，就是去掉使数学式没有意义的自变量的取值部分，就得到该函数的定义域. 常用以下几条法则去掉之.

(1) 分式函数中分母不能为零；

(2) 偶次根式内的量不能取负值，即应大于或等于零；

(3) 对数的真数不能为负和零，即必须取正值；

(4) 函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

(5) $y=\tan x$ 中的 $x\neq k\pi+\pi/2$，$y=\cot x$ 中的 $x\neq k\pi$，其中 k 是整数.

例 1[1.1.4(5),(6),(7)]* 　求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(2) $y=\tan(x+1)$；　　(3) $y=\arcsin(x-3)$.

---

* [1.1.4(5),(6),(7)]表示该例(或该习题)是同济大学数学系编写的《高等数学》(第6版)的第1章习题1-1中的第4题中的(5),(6),(7)小题. 下同.

解 (1) 为使 $y=\sin\sqrt{x}$有意义,x 必满足 $x\geqslant 0$,则 y 的定义域为 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$.

(2) 为使 $y=\tan(x+1)$有意义,x 需满足 $x+1\neq k\pi+\pi/2(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,则 y 的定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi+\pi/2-1\},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$.

(3) 为使 $y=\arcsin(x-3)$有意义,x 需满足 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$,则 y 的定义域为 $D=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$.

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$的自然定义域.

解 因当 $-1\leqslant x<0$ 时,根据整函数的定义有$[x+1]=0$,由排除法知函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$的自然定义域为去掉 $-1\leqslant x<0$ 的任意实数的集合,即 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

求法二 用交集法求之.

求复杂函数的定义域常用交集法求之,即求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

用交集法求定义域的函数,常见的有下述两种类型.

(Ⅰ) 函数的表示式由多个数学式组合而成.

一个函数的表示式若由几个数学式组合而成,则这个函数的定义域必为这几个数学式允许值范围的公共部分,为求出此交集(公共部分),应根据各个数学式的限制条件列出不等式组,其公共解就是所求的定义域.

正确求出这类函数的定义域的关键在于以下几点:

(1) 搞清五类基本初等函数的定义域;

(2) 记住分式函数的分母不能等于零;

(3) 熟练掌握解不等式(组)的方法.

例 3 求函数 $y=1/(1-x^2)+\sqrt{x+1}$的定义域.

解 要使 y 有意义,必有 $1-x^2\neq 0$ 且 $x+1\geqslant 0$,其交集$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+1\geqslant 0\end{cases}$即为所求的定义域,解之得$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -1,\end{cases}$即所求的定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(Ⅱ) 复合函数的定义域常用交集法求之.

一般,设 $f(x)$的定义域为 D_f,$g(x)$的定义域是 D_g,则复合函数 $y=f[g(x)]$的定义域是 $D=D_g\cap\{x\mid g(x)\in D_f\}$.

例4　求下列函数的定义域：

(1) $y=1/(\sin x-\cos x)$；　(2) $y=\lg(\cos\lg x)$；　(3) $y=\arcsin[\lg(x/10)]$.

解　(1) 因 $x=\pi/4+n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时 $\sin x-\cos x=0$，故 y 的定义域为 $x\neq\pi/4+n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数.

(2) y 的定义域必使 $\cos(\lg x)>0$，因而必有

$$(2k-1/2)\pi<\lg x<(2k+1/2)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

由此解得 x 必须满足

$$10^{(2k-1/2)\pi}<x<10^{(2k+1/2)\pi}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

此为 y 的定义域.

(3) 当 $-1\leqslant\lg(x/10)\leqslant1$ 时，y 有意义，解之得到

$$-1\leqslant\lg x-\lg10=\lg x-1\leqslant1,\quad 0\leqslant\lg x\leqslant2,\quad 1\leqslant x\leqslant10^2,$$

故 $1\leqslant x\leqslant10^2$ 为 y 的定义域.

求法三　用代入法求之.

已知 $f(x)$的定义域，用代入法可求出 $f[\varphi(x)]$的定义域.

例如，设 $f(x)$的定义域为 $a<x<b$，将 $\varphi(x)$替换不等式中的 x，得到 $a<\varphi(x)<b$，由此解出 x，即得 $f[\varphi(x)]$的定义域.

例5[1.1.15(1),(3)]　设 $f(x)$的定义域为 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：(1) $f(x^2)$；(2) $f(x+a)(a>0)$.

解　(1) 因 $f(x)$的定义域是 $D=[0,1]$，故 $0\leqslant x^2\leqslant1$，$-1\leqslant x\leqslant1$，所以 $f(x^2)$的定义域为 $\{x\mid-1\leqslant x\leqslant1\}$.

(2) 因 $0\leqslant x+a\leqslant1$，$a>0$，故 $-a\leqslant x\leqslant1-a$. 所以 $f(x+a)$的定义域为 $\{x\mid-a\leqslant x\leqslant1-a,a>0\}$.

2. 实际问题中函数定义域的确定方法

实际问题中如果函数和(或)其自变量具有物理意义或几何意义，或题设中对它们有其他要求，这时函数的定义域由所讨论的问题的实际意义来确定，而不只是根据其表示式确定.

例6[总1.7]　把半径为 R 的一圆形铁皮，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表示为 α 的函数.

解　从中心处剪去中心角为 α 的扇形后，剩余扇形的周长 $l=2\pi R-R\alpha$. 令 r 为无底圆锥的半径，由题意有

$$2\pi R-R\alpha=2\pi r(\text{见图 1.1.1.1}),\quad r=R[1-\alpha/(2\pi)].$$

圆锥的高为

$h=\sqrt{R^2-r^2}=(R/2\pi)\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\ (0<\alpha<2\pi)$.

圆锥的底面积为

$$A=\pi r^2=\pi R^2[1-\alpha/(2\pi)]^2,$$

则体积 $V=A\cdot h/3=\pi r^2\cdot h/3$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},$$

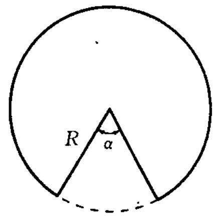

图 1.1.1.1

其中 $0<\alpha<2\pi$(因为此时才能形成圆锥).

3. 判别两函数是否为同一函数

由函数的定义易得到可用下述命题判别两函数是否为同一函数.

命题 1.1.1.1 当且仅当给定的两函数,其定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的两函数.

值得注意的是命题 1.1.1.1 说的是函数只与定义域和对应关系有关,而与用什么字母表示自变量无关,因而 $f(x)=f(t)=f(u)=f(v)=\cdots$. 函数表示式的这种无关特性常简称为函数的"无关特性". 在求解函数表示式时,常用到这种"无关特性".

例 7[1.1.5(1),(2),(3)] 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$; (2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 (1) 不同. 因为 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) 不同. $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,而 $f(x)=x$,对应法则不同.

(3) 相同. 定义域、对应法则均相同.

1.1.2 与复合函数有关的几类函数表示式的求法

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ,若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$(符号 $\varnothing$ 表示空集),则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

这里有三个变量 x,u,y,它们之间的关系是:y(函数)—$u=\varphi(x)$(中间变量)—x(自变量). 值得注意的是,这里 $u=\varphi(x)$ 具有双重身份:既是 $y=f(u)$

的自变量,又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 因而要求里层函数 $\varphi(x)$的值域 Z_φ 含在外层函数 $f(u)$的定义域 D_f 内,这样构成复合的函数才是合理的. 如果值域 Z_φ 不含在 D_f 内,则不能组成复合函数,这时 $u=\varphi(x)$不具有双重身份. 例如 $y=\sqrt{u^2-2}$, $u=\sin x$ 就不能复合成函数 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

例 8　复合函数 $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$是由哪些基本初等函数或多项式复合而成的?

解　从最外层看是幂函数 $y=u^2$;再看次外层是正弦函数 $u=\sin v$,从外向里看第三层是幂函数 $v=w^{-\frac{1}{2}}$,最里层是多项式 $w=x^2+1$,w 是由幂函数与常数函数经过加法运算得到的,所以 $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$是由 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=w^{-\frac{1}{2}}$, $w=x^2+1$ 复合而成.

1. 已知函数 $f(x)$,求其复合函数 $f[\varphi(x)]$

常用代入法求之,即将另一个函数 $\varphi(x)$的表达式替代函数 $f(x)$中的自变量 x 即得 $f[\varphi(x)]$. 该法适用于初等函数的复合.

当 $f(x)$为分段函数时,求解 $f[\varphi(x)]$时常用分段代入法即分析法(详见1.1.4小节).

例 9　设 $f(x)=x^2+1$,求 $f(x^2-1)$.

解　$f(x^2-1)$是由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)=x^2-1$ 复合而成的复合函数,因 $f(x)=x^2+1$,故 $f(u)=u^2+1$. 将 $u=x^2-1$ 代入前式即得

$$f(x^2-1)=(x^2-1)^2+1=x^4-2x^2+2.$$

2. 已知复合函数,求其有关函数的表示式

(Ⅰ)由复合函数求因变量关于自变量的函数表示式.

已知 $f[\varphi(x)]=h(x)$,求 $f(x)$. 常用两法求之.

一是变量代换法. 令 $\varphi(x)=u$,解出 x 代入所给函数,利用函数表示法与函数的"无关特性",即得所求的 $f(x)$.

二是用拼凑法求之. 为此将所给的复合函数表示式 $h(x)$凑成对应符号 $f[\varphi(x)]$中间变量 $\varphi(x)$的函数的形式,然后利用上述"无关特性"即可写出 $f(x)$的表示式.

例 10　设 $f(x+1/x)=x^2+1/x^2$,求 $f(x)$.

解一　用拼凑法求之. 令 $g(x)=x+1/x$, $h(x)=x^2+1/x^2$,下面将 $h(x)$

$=x^2+1/x^2$ 拼凑成以 $g(x)$表示的代数式:

$$f(x+1/x)=x^2+1/x^2=x^2+1/x^2+2-2=(x+1/x)^2-2.$$

令 $t=g(x)=x+1/x$,则 $f(t)=t^2-2$,因而 $f(x)=x^2-2$.

解二 用变量代换法求之. 令 $u=x+1/x$,解出 $x=(u\pm\sqrt{u^2-4})/2$. 代入原式得

$$f(u)=\frac{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}{4}+\frac{4}{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}=u^2-2,$$

故 $$f(x)=x^2-2.$$

(Ⅱ) 由复合函数求因变量关于中间变量的函数表示式.

例 11 设 $f[\sin(x/2)]=1+\cos x$,求 $f(\cos x)$.

解一 利用三角函数的性质求之.

$$\begin{aligned}f(\cos x)&=f[\sin(\pi/2-x)]=f\{\sin[(\pi-2x)/2]\}\\&=1+\cos(\pi-2x)=1-\cos 2x=2\sin^2 x.\end{aligned}$$

解二 用拼凑法求之,先求 $f(x)$.

$$f[\sin(x/2)]=1+\cos x=2\cos^2(x/2)=2[1-\sin^2(x/2)].$$

令 $\sin(x/2)=t$,则 $f(t)=2(1-t^2)$,即 $f(x)=2(1-x^2)$,故

$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

解三 用变量代换法求之,令 $t=\sin(x/2)$,则 $x=2\arcsin t$,于是

$$\begin{aligned}f(t)&=\cos(2\arcsin t)+1=\cos^2(\arcsin t)-\sin^2(\arcsin t)+1\\&=2[1-\sin^2(\arcsin t)]=2(1-t^2),\end{aligned}$$

即 $$f(x)=2(1-x^2),\quad 故\quad f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

(Ⅲ) 由复合函数求中间变量关于自变量的函数表示式.

例 12[1988 年 1]* 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$及其定义域.

解 一方面可由 $f(x)$求出 $f[\varphi(x)]$的表示式 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$,另一方面又已知 $f[\varphi(x)]$的表示式 $f[\varphi(x)]=1-x$. 令两者相等,得到 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$,即

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x),\quad \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\quad(\varphi(x)\geqslant 0).$$

$\varphi(x)$的定义域显然为$(-\infty,0]$.

* [1988 年 1]表示该例是 1988 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一的考题. 下同.

(Ⅳ) 由函数所满足的方程求该函数的表示式.

此类问题常给出所求函数满足的一个方程. 作变量代换:令此函数的中间变量等于一新变量得到该函数所满足的另一个方程. 将此两方程联立解之,即可求得所求函数的表示式.

例 13　已知 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$, $|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$是奇函数.

证　下证 $f(-x)=-f(x)$. 为此先求出 $f(x)$.

注意到所给等式中函数 f 的自变量为 x,其中间变量为 $1/x$,若令一新变量 t 等于中间变量,即令 $t=1/x$,代入原方程可得另一方程:

$$af(1/t)+bf(t)=ct,\quad 即\quad af(1/x)+bf(x)=cx.$$

将原方程及上面方程的两端分别乘 a,b 然后相减,得到

$$a^2f(x)-b^2f(x)=\frac{ac}{x}-bcx=\frac{ac-bcx^2}{x},$$

因 $|a|\neq|b|$,故有 $f(x)=\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}$,于是

$$f(-x)=\frac{ac-bc(-x)^2}{(a^2-b^2)(-x)}=-\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}=-f(x).$$

1.1.3　三类反函数的求法

设函数 $y=f(x)$是由其定义域 $D(f)$到值域 $f(D)$的一一映射,即对于 $f(D)$中每个 y 值在 D 中都有唯一 x 与之对应,其对应规则记为 f^{-1}. 于是根据函数的定义,得到一个以 $f(D)$为定义域、D 为值域的函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,称其为 $y=f(x)$的反函数. 习惯上,常用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此用 $y=f^{-1}(x)$表示 $y=f(x)$的反函数.

由上述定义可知,为求 $y=f(x)$的反函数,先从方程 $y-f(x)=0$ 中解出 x,得到用 y 表示 x 的式子 $x=f^{-1}(y)$,然后将 x 与 y 互换,即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域有两种求法. 一是直接求法,二是求出 $y=f(x)$的值域即得 $y=f^{-1}(x)$的定义域.

函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图形是同一条曲线,但 x 与 y 互换后得到函数 $y=f^{-1}(x)$,其图形一般不再是函数 $y=f(x)$(即 $x=f^{-1}(y)$)的图形,它们关于直线 $y=x$ 对称.

例 14[1.1.12(6)] 求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数及其定义域.

解 首先求出函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的值域. 因为 y 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 所以当 x 取值越来越小, 且无限接近于定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 的左端点时, y 接近于 0 且大于 0; 而 x 取值越来越大, 无限接近右端点时, y 接近于 1, 于是 y 的值域为 $(0,1)$. 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解出 x 得

$$2^x=y/(1-y),\quad x=\log_2[y/(1-y)],$$

故函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2[x/(1-x)]$. 由于反函数定义域是函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的值域, 故其反函数的定义域为 $0<x<1$.

上述反函数的定义域也可直接求出, 事实上由 $x/(1-x)>0$ 且 $x\neq 1$, 即得 $\begin{cases}x>0,\\1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\1-x<0,\end{cases}$ 后者无解, 前者的解为 $0<x<1$.

下面介绍三类常用函数的反函数的求法.

1. 分段函数的反函数求法

求分段函数的反函数, 要分别求出各区间段的反函数及其定义域.

设分段函数在各分段区间上都是单调函数, 则分别求出各个分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数, 且每段函数的值域就是分段区间上反函数的定义域, 而各区间段上反函数的定义域就是原来函数对应区间段上的值域.

例 15 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数及其定义域.

解 (1) 在区间 $(-\infty,1)$ 内, $y=x$ 的反函数就是它本身, 又因函数 $y=x$ 的值域为 $(-\infty,1)$, 故其反函数 $x=y$ 的定义域也为 $(-\infty,1)$, 于是有

$$y=f^{-1}(x)=x\quad(-\infty<x<1).$$

(2) 在区间 $[1,4]$ 上由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$, 因 $x\in[1,4]$, 故 $x=\sqrt{y}$. 又函数的值域为 $[1,16]$, 故其反函数的定义域为 $[1,16]$. 于是有