普通高等教育"十一五"规划教材

高等数学

（轻工类）

（下 册）

史本广 慕运动 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

（轻工类）

（下册）

史本广　慕运动　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材汲取众多国内外优秀教材的长处，融入编者多年的教学经验，以提高学生的综合数学能力、培养学生的数学文化素养为宗旨，结合轻工类的特色，突出实际应用的训练，注重考研能力的培养，创设双语教学的环境，并使学生受到数学科学发展历程和数学文化的熏陶.

本教材分上、下两册. 下册内容包括空间解析几何，多元函数的微分学，重积分，曲线和曲面积分，无穷级数，常微分方程. 其中，带"*"的内容可根据学时或分层教学的需要选讲.

本教材可作为高等学校轻工类各专业教材，也可用于学生自学和教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：轻工类. 下册/史本广，慕运动主编. —北京：科学出版社，2010. 1
ISBN 978-7-03-026398-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①史…②慕… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 007987 号

责任编辑：赵 靖 房 阳 / 责任校对：陈丽珠
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张：17
印数：1—3 500 字数：340 000

定价：26.00 元

前　言

科学的研究任务有两条，正如庄子所说："判天地之美，析万物之理."判天地之美，就是发现和鉴赏宇宙的和谐与韵律；析万物之理，就是探索宇宙的规律.这样，我们才能做到人与宇宙的和谐共处.而哲学、数学、自然科学和社会科学是当今指导社会发展的四大科学门类，其中，哲学和数学以及它们之间的交互影响是人类文化中最深刻的部分. Demollins 说得好："没有数学，人们无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度；而没有两者，人们什么也看不透."

微积分学是高等数学中最基本、最重要的组成部分，是许多现代数学分支的基础，是人类认识客观世界、探索宇宙奥秘乃至人类自身的典型数学模型之一. Engels(恩格斯，德国哲学家，马克思主义创始人之一)曾指出："在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了."微积分的发展历史曲折跌宕，撼人心灵，是培养人们正确世界观、科学方法论以及对人们进行文化熏陶的极好素材.希望通过高等数学课程的学习，能够达到这样的目的，正如北京大学张顺燕教授在《数学的美与理》中所说的："给你打开一个窗口，让你领略另一个世界的风光——数学的博大精深，数学的广阔用场；给你一双数学家的眼睛，丰富你观察世界的方式；给你一颗好奇的心，点燃你胸中求知的欲望；给你一个睿智的头脑，帮助你进行理性思维；给你一套研究模式，使它成为你探索世界奥秘的望远镜和显微镜；给你提供新的机会，让你在交叉学科中寻找乐土，利用你的勤奋和智慧去做出发明和创造."

正是这样，数学素质已成为现代人的基本素质.因此，学习数学、学会数学、享受数学、应用数学模型与方法研究问题和解决问题已成为一种时尚.为此，我们将编者多年来凝结成的对数学的认识和对教学规律的感悟，汇聚到这套教材中，为提高高等数学的教学质量和学生的数学素养尽我们的一份力量.希望无论是将高等数学作为主课，还是作为选修课的大学生们，都不要再感到自己就好像进入了一个令人迷惑的地方，看着黑板上一个接一个的式子，听着像英语而又不是英语的一种谜一样的语言，自己就如同意外地进入到一个极为陌生的国家中徘徊的游客一样失落.我们努力为学生的学习过程和老师的传授过程共同创造一种和谐、快乐的环境.作为学生，学习数学不仅是一种任务，更应该是一种快乐；作为老师，教授数学不仅是一种职业，更应该是一种享受.

本教材汲取国内外众多优秀教材的长处，融入编者多年的教学经验，以提高学生的综合数学能力、培养学生的数学文化素养为宗旨，形成如下特色：

(1) 突出轻工类的特色，主要适合于食品科学类、生物化工类、纺织轻工类等学

科的学生；

(2) 突出考研能力的培养和双语教学环境的创设，为学生进一步深造和进行双语教学创造了条件；

(3) 突出数学思想和文化的特色，在激发学生学习数学的热情和兴趣，以及调动学生学习数学的积极性和主动性的同时，又对学生进行了数学文化和人文素质的熏陶.

本教材由史本广教授和慕运动教授任主编，由黄守佳副教授、呼青英教授、张新敬副教授、李俊海副教授任副主编. 上册第 1 章由慕运动编写，第 2 章由黄士国编写，第 3 章由李俊海编写，第 4 章由谷存昌编写，第 5 章由张新敬编写，第 6 章由呼青英编写；下册第 7 章由史本广编写，第 8 章由黄守佳编写，第 9 章由侯长顺编写，第 10 章由朱碧编写，第 11 章由胡博编写. 每一章节的内容都经过全体编写人员的充分酝酿和讨论，浓缩和集中了各位教师的智慧和经验，最后由史本广和慕运动统撰.

本教材的顺利出版离不开各方面的支持，在此感谢河南工业大学和郑州轻工业学院各级领导的支持和帮助，感谢科学出版社各位领导和编辑的关怀和鼓励.

本教材凝结了编者多年来的数学教学经验和对数学科学的感悟，但由于时间仓促，编者水平有限，教材中难免有不尽人意之处，敬请读者不吝指教.

编 者

2009 年 2 月 6 日于郑州

《高等数学(轻工类)(下册)》编委会

主　编　史本广　慕运动

副主编　黄守佳　呼青英　张新敬　李俊海

编　委　史本广　慕运动　黄守佳　呼青英
张新敬　李俊海　谷存昌　黄士国
侯长顺　胡　博　朱　碧

目　　录

第7章 空间解析几何与向量代数

数形本是相依依，焉能分作两边飞.
数缺形时少直觉，形少数时难入微.
数形结合百般好，隔离分家万事非.
切莫忘，
几何代数统一体，永远联系莫分离.

——华罗庚

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就，法国数学家 Descartes（笛卡儿）和 Fermat（费马）均于17世纪对此做了开创性的工作. 我们知道，代数方法的优越性在于推理的程序化，由此，人们就产生了用代数方法研究几何问题的思想，这就是解析几何的基本思想. 借助于代数方法研究几何问题，需要建立代数与几何间的联系，最基本的就是数与点的联系，其桥梁就是坐标系. 通过坐标系，可以把数学中的数与形有机地结合起来，从而可以用代数方法研究几何问题，这就是所说的解析几何，当然也可以用几何方法去研究代数问题.

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系，可以建立平面上的点与一对有次序数的对应、平面上图形与方程的对应；由平面曲线在坐标轴上的投影，可建立平面曲线变量间的函数关系，并可确定各个变量的变化范围.

将上述方法推广，就可得空间解析几何的相关研究内容，从而建立空间点与对应的三元有序数组、空间内的图形与方程的对应、空间内的图形与各坐标面或各坐标轴上的投影的对应. 通过本章的学习，可以使大家掌握空间直角坐标系的建立、向量的概念及基本运算、常见空间曲面或曲线的方程和图形、空间图形在坐标面上的投影等方面的知识，为以后学习多元函数微积分、研究空间图形打下基础.

本章首先建立空间直角坐标系，并引入向量、曲面、空间曲线等概念，以向量为工具，讨论平面、直线及二次曲面.

7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

将数轴（一维）、平面直角坐标系（二维）进一步推广，可建立空间直角坐标系

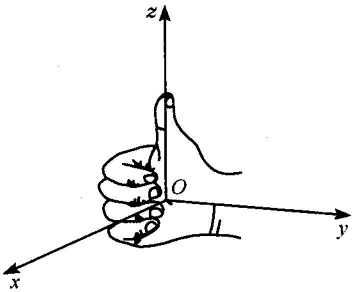

图 7.1

(三维). 如图 7.1 所示，在空间一点 O 处作三条互相垂直的数轴，分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，并且符合**右手规则**(right-handed rule)(即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向)(图 7.1 为右手规则演示图). 这样建立的坐标系就称为**空间直角坐标系**(three dimensional Cartesian coordinate system).

2. 坐标面与卦限

空间直角坐标系中任意两轴构成一个**坐标面**，如由 x 轴、y 轴可构成 xOy 面，类似地有 yOz 面、zOx 面.

三个坐标面将整个空间分成 8 个**卦限**(octant)，坐标面以及卦限的划分如图 7.2 所示，在 xOy 面上方有 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，下方有 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限.

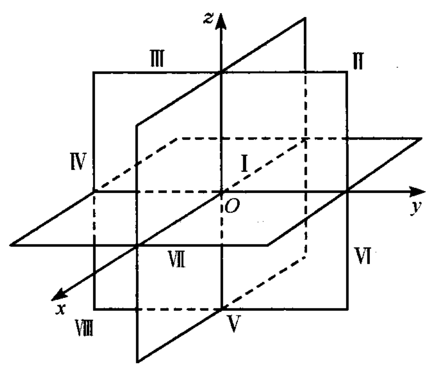

图 7.2

3. 空间点的坐标表示

设 M 为空间一已知点，过 M 作分别垂直于三坐标轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R(图 7.3)，对应的数分别为 x,y,z，依次称为 M 点的横坐标、纵坐标和竖坐标. 这样通过坐标把空间的点与有序数组一一对应起来，记为 $M(x,y,z)$，并称有序数组 (x,y,z) 为 M 点的坐标，称 M 为有序数组 (x,y,z) 对应的点. 根据坐标画点 M 时，可在 x 轴上 x 点处作垂直于 x 轴的平面、在 y 轴上 y 点处作垂直于 y 轴的平面、在 z 轴上 z 点处作垂直于 z 轴的平面，则这三个平面的交点即为 M 点(图 7.3).

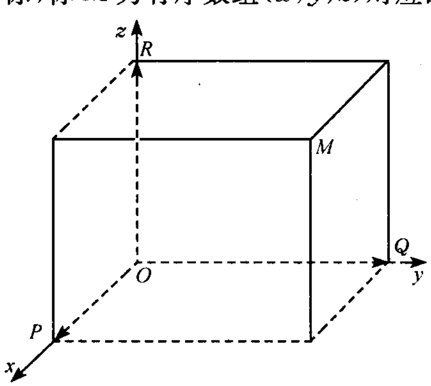

图 7.3

例如，坐标原点 O 的坐标可表示为 $O(0,0,0)$，xOy 面上的点 M 可表示为 $M(x,y,0)$.

注　以下特殊点的坐标：

(1) 原点、坐标轴、坐标面上点的坐标；

(2) 一已知点关于坐标轴、坐标面、原点的对称点的坐标求法(以后会推广到求关于空

间直线或平面的对称点)；

(3) 空间两点所连直线段中点的求法(自己给出).

7.1.2 空间两点间的距离

若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点,则 M_1M_2 的距离(distance)d(图 7.4)可利用直角三角形勾股定理得

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

而

$$|M_1P|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|z_2-z_1|,$$

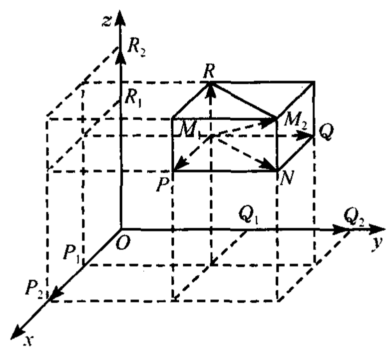

图 7.4

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7.1}$$

特殊地,

(1) 若两点分别为 $O(0,0,0)$,$M(x,y,z)$,则

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}; \tag{7.2}$$

(2) M_1,M_2 两点之间的距离等于 $0\Leftrightarrow M_1=M_2$,两点重合,也即 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$,$z_1=z_2$;

(3) $|M_1M_2|=|M_2M_1|$.

例 1 求证以 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 由(7.1)式可求得

$$|M_1M_3|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6},$$
$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

所以,以 M_1,M_2,M_3 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形. □

例 2 设点 P 在 x 轴上,它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$的距离的两倍,求点 P 的坐标.

解 设点 P 的坐标为 $P(x,0,0)$,则由(7.1)式可得

$$|PP_1|=2|PP_2|\Leftrightarrow x^2+2+9=4(x^2+1+1)\Leftrightarrow x=\pm 1,$$

即所求的点 P 为$(-1,0,0)$或$(1,0,0)$.

例 3　给定两点 $M(-2,0,1)$，$N(2,3,0)$，在空间内存在点 A，使 $|AM|=|AN|$，求点 A 的坐标.

解　设点 A 的坐标为 (x,y,z)，则有

$$(x+2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+z^2,$$

即满足方程 $4x+3y-z-4=0$ 的一切点 (x,y,z) 都可作为点 A 的坐标. 显然，方程 $4x+3y-z-4=0$ 是线段 MN 的垂直平分面.

习　题　7.1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

(1) $A(1,1,2)$；　(2) $B(-2,3,2)$；　(3) $C(2,-2,-3)$；　(4) $D(1,2,0)$.

2. 坐标面上的点各有何特征？坐标轴上的点各有何特征？

3. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线及平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

4. 求点 $(1,2,3)$ 关于坐标面 xOy，yOz，zOx 的对称点和关于 x 轴、y 轴、z 轴及原点的对称点.

5. 求点 $P(3,-1,2)$ 关于原点、各坐标轴、各坐标平面的对称点的坐标.

6. 求点 $P(4,-3,5)$ 到坐标原点、各坐标轴、各坐标平面的距离.

7. 求下列各对点之间的距离：

(1) $(0,0,0)$，$(1,2,3)$；　(2) $(1,2,1)$，$(-1,3,-3)$；

(3) $(-2,3,-4)$，$(1,0,3)$；　(4) $(4,-2,3)$，$(-2,1,2)$.

8. 求 z 轴上与 $A(-4,1,7)$，$B(3,5,-2)$ 两点等距离的点.

9. 试证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

10. 在第Ⅵ卦限内求一点 M，使点 M 与三坐标轴的距离都等于 2.

7.2　向量的线性运算及向量的坐标

向量是本章研究空间直线、平面图形的重要工具. 在其他领域中，向量也有着广泛的应用，如线性代数及其他数学分支、物理学、经济学及其他科学技术中. 借助向量可以把空间点的讨论转化为向量的讨论，把点的函数转化为向量的函数，以此研究后继课程中的梯度、曲线积分、曲面积分、流量等内容. 本节及下节将介绍向量的相关运算及性质.

7.2.1　向量的概念

关于量常遇到以下两种：一种是只有大小的量，叫做**数量**(scalar)，如时间、距离、温度、质量等；还有一种量，它不仅有大小而且还有方向，叫做向量或矢量，如速度、加速度、力等.

定义 7.1　既有大小，又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)(vector). 常用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向. 在数学上，只研究与起

点无关的**自由向量**(free vector)(以后简称为向量),通常用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{i},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{i},\vec{F}$ 及 $\overrightarrow{OM}$ 等表示向量.

向量的大小称为向量的**模**(module),记为 $|\boldsymbol{a}|$,$|\overrightarrow{OM}|$. 模为 1 的向量叫**单位向量**(unit vector),模为零的向量叫做**零向量**(zero vector),记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的方向是任意的.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等但方向相反的向量,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(negative vector),记为 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 大小相等,方向相同,则说这两个向量**相等** (equality)(即经过平移后能完全重合的向量),记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同或相反,则称这两个向量**平行**(parallel),记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定**零向量与任何向量都平行**.

在直角坐标系中,坐标原点 O 为始点,M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$,称为点 M 对点 O 的向径,由黑体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和仍是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

仿照物理学中力的合成可得向量和的**平行四边形法则**(parallelogram law)(有时也称为**三角形法则**(triangle law))(图 7.5).

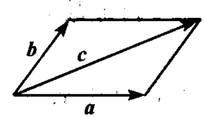

图 7.5 加法运算图

向量的加法满足如下的运算规律.

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量的减法

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}.$$

3. 向量与数的乘法

设 λ 是一个数,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为

(1) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(3) 当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

向量与数的乘法满足如下的运算规律.

设 λ,μ 是两个实数,$\boldsymbol{a}$ 是一个向量,则有

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

向量相加、相减及数乘向量的运算,统称为向量的**线性运算**(linear operation).

设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 这一过程称为**向量的单位化**.

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解　原式 $=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-\boldsymbol{b}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}+5\times\frac{1}{5}\boldsymbol{b}\right)$

$$=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}.$$

4. 两向量平行的充要条件

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，由数乘向量的定义知 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，即充分性成立. 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，取 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad 即\quad |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. □

定理 7.1 是建立数轴的理论依据. 这是因为一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，所以给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox（图 7.6），对于轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 7.1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫做轴上**有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值**），并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是有

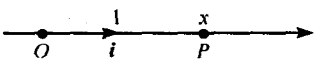

图 7.6

$$点\ P\leftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow 实数\ x,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系.

例 2　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，其中，M 是平行四边形对角线的交点（图 7.7）.

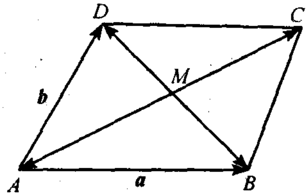

图 7.7

解　因为平行四边形法则的对角线互相平分，所以

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

7.2.3 向量的坐标表达式

1. 向量在坐标系上的分向量与向量的坐标

通过坐标系使平面上或空间内的点与有序数组之间建立了一一对应关系，同样地，为了沟通数与向量的联系，需要建立向量与有序数之间的对应关系.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x,y,z 轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的**基本单位向量**，由图 7.8 及向量的加法规则和定理 7.1 知

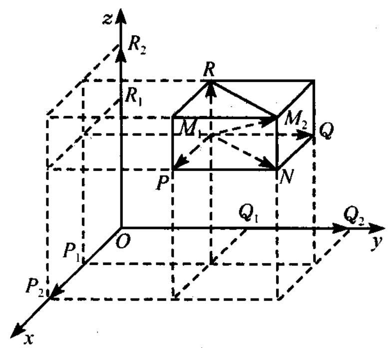

图 7.8

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}\\&=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.\qquad(7.3)$$

(7.3)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**，其中，$a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量，a_x,a_y,a_z 就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 由于有序数组(a_x,a_y,a_z)与向量 $\boldsymbol{a}$ 一一对应，所以可将向量 $\boldsymbol{a}$ 记为

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z).\qquad(7.4)$$

(7.4)式叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式. 于是，以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点以 $M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量可以表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\qquad(7.5)$$

特别地，点 $M(x,y,z)$对于原点 O 的向径为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z).\qquad(7.6)$$

注 向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标有本质区别. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量是三个向量：$a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标是三个数：a_x,a_y,a_z.

2. 向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

(1) 加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$；

(2) 减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$；