SHUXUE

CHUZHONG SHUXUE ZHISHI YU JINENG QUANJIE

初中数学知识与技能全解

张培钰 编著
王岳庭 审定

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

张培钰 毕业于浙江师范大学数学系。从事中学数学教育三十余年，获中学数学高级教师职称。已出版教辅有：《从中考到竞赛——数学精讲精练1000题》，新世纪版走向大学丛书：《初中二年级（下）学与用》，《义务教育初中一年级学与用》，《新课程标准七年级（上）、（下）学与用》。

王岳庭 毕业于华东师范大学数学系，曾任杭州教育学院（现杭州师范大学）数学系副主任、副教授。浙江师范大学《中学数学》杂志主编，《初等数学报》常务副主编。已出版编（译）著作40余部，发表论文30余篇。多次获浙江省高等师范院校教学科研成果二等奖。被授予曾宪梓教育基金会高等师范教师三等奖。多次应邀出席数学教育国际会议。现任：浙江新世纪教育科技发展中心主任,杭州当代教师教育研究院院长,温州立人教育集团顾问,杭州学大教育顾问。

ISBN 978-7-308-07341-7

9 787308 073417 >

定价：35.00元

初中数学知识与技能全解

张培钰　编著

王岳庭　审定

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

前 言

教育部公布的《初中数学教学大纲》中明确指出:数学的研究对象是空间形式和数量关系。在当代社会中,数学的应用越来越广泛,它是人们参加社会生活,从事生产劳动和学习、研究现代科学技术必不可少的工具,它的内容、思想、方法和语言已广泛渗入自然科学和社会科学,成为现代文化的重要组成部分。

初中数学是义务教育的一门主要学科。它是学习物理、化学、计算机等学科以及参加社会生活、生产和进一步学习的基础,对学生良好的个性品质和辩证唯物主义世界观的形成有积极作用。因此,使学生受到必要的数学教育,具有一定的数学素养,对于提高全民族素质,为培养社会主义建设人才奠定基础是十分必要的。

初中数学的教学目的是:使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能,进一步培养运算能力,发展思维能力和空间观念,使他们能够运用所学知识解决简单的实际问题,并逐步形成数学创新意识。培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义的观点。

基础知识是指:初中数学中的概念、法则、性质、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。

基本技能是指:能够按照一定的程序与步骤进行运算、作图或画图、简单的推理。

思维能力主要是指:会观察、实验、比较、猜想、分析、综合、抽象和概括;会用归纳、演绎和类比进行推理;会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点;会运用数学概念、原理、思想和方法辨明数学关系。形成良好的思维品质,提高思维水平。

运算能力是指:会根据法则、公式等正确地进行运算,并理解运算的算理;能够根据问题条件寻求与设计合理、简捷的运算途径。

空间观念主要是指:能够由形状简单的实物想象出几何图形,由几何图形想象出实物的形状;能够由较复杂的平面图形分解出简单的、基本的图形;能够在基本的图形中找出基本元素及其关系;能够根据条件作出或画出图形。

能够解决实际问题是指:能够解决带有实际意义的和相关学科中的数学问题,以及解决生产和日常生活中的实际问题;能够使用数学语言表达问题、展开交

流，形成用数学的意识。

创新意识主要是指：对自然界和社会中的现象具有好奇心，不断追求新知、独立思考，会从数学的角度发现和提出问题，并用数学方法加以探索、研究和解决。

良好的个性品质主要是指：正确的学习目的，学习数学的兴趣、信心和毅力，实事求是、探索创新和实践的科学态度。

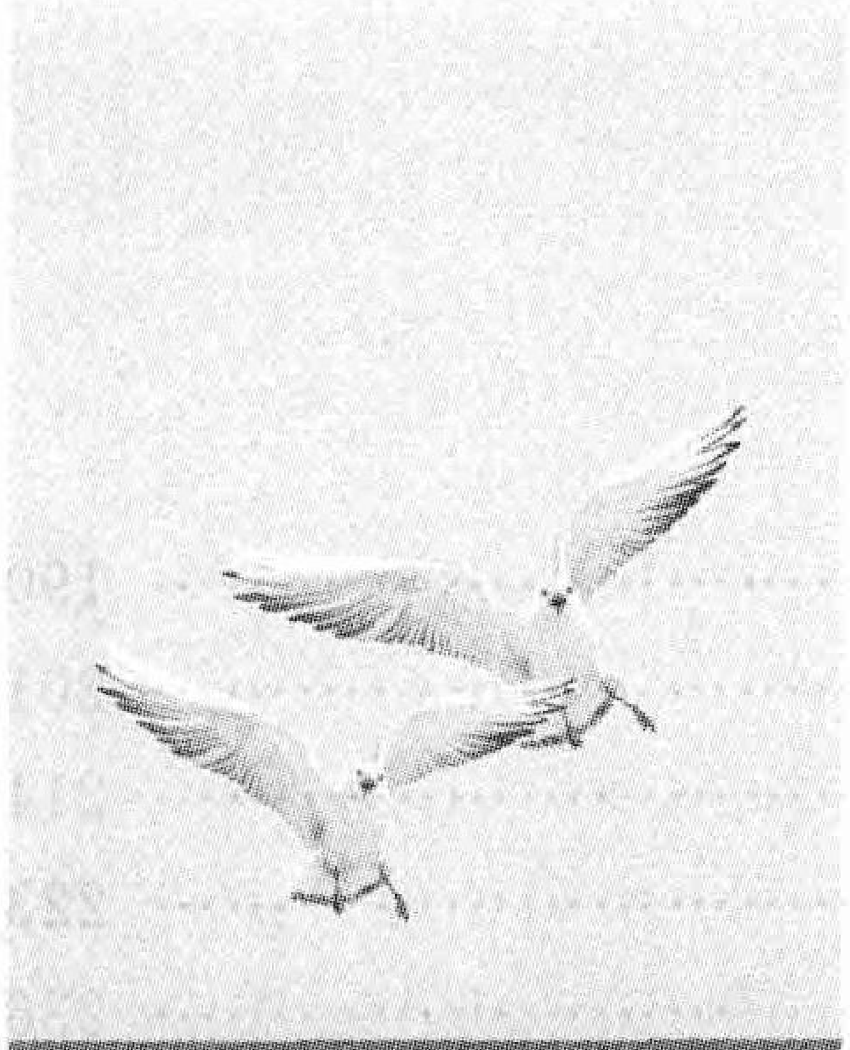
培养学生的辩证唯物主义观点主要是指：数学来源于实践又反过来作用实践的观点；数学中普遍存在的对立统一、运动变化、相互联系、相互转化等观点。

《初中数学知识与技能全解》完全遵循了《大纲》的精神，全面地、系统地、科学地总结了初中数学的知识与技能的主要精髓，用准确、翔实、简洁的文字和精选的例题，把初中数学中的概念、定理、法则、方法、技能、思维、空间观念等进行了概括，并尽可能地从引导学生掌握正确的数学思维方法和数学能力的培养出发，组织全文，突出了学生数学思维能力的培养。因此本书对于广大初中生来讲不仅可以激发学习数学的兴趣，全面掌握初中数学的系统知识，更可以帮助自己提高学习数学的能力和培养数学素养。希望本书能成为广大读者的良师益友。

本书作者从事中学数学教学三十七年，对初中数学的知识、方法、技能、思维、运算及空间观念等有着深厚的功底，对初中数学的教学有着丰富的经验，对于各种不同的初中学生在学习中所遇到的问题有着最直接的了解，因此，由他执笔撰写的这本《初中数学知识与技能全解》浓缩了他几十年来的教学与研究的成果，对于指导初中生系统地、全面地掌握初中数学的知识和技能，有着非常直接的作用，对于从事初中数学教学的老师来说，也是一本难得的好书。

王岳庭

2010 年 3 月



目录

第一篇

数学逻辑和数学解题思想与方法

第一章　数学逻辑

数学是应用逻辑推理的方法来解决问题的一门科学."推理"一个问题必须要有依据,而有的依据不能再寻求"依据",从而需规定一些无需再证明的依据,避免哲学中争论不休而无结果的"鸡与蛋"的问题.本章介绍一些初中数学中常见的一些名词.

一、逻　辑

逻辑一词译自英语"Logic",源于希腊文"Logos",原意"词"、"思想"、"概念"、"理性".在日常生活中,"逻辑"是一个多义词,既指事物发展的规律,又指思维规律,也指逻辑科学.中学数学中的逻辑,主要指形式逻辑,也部分涉及辩证逻辑.

(一)形式逻辑

形式逻辑是一门以思维形式及其规律为主要研究对象,同时涉及一些简单逻辑方法的科学.

(二)辩证逻辑

辩证逻辑是关于思维的辩证发展规律的科学,是唯物辩证法在思维领域的应用.从本质上说,辩证逻辑和唯物辩证法是一致的,唯物辩证法的基本规律也就是辩证逻辑的规律.

二、思　维

思维是人脑对客观事物间接的和概括的认识过程;通过这种认识,可以把握事物的一般属性和本质属性.

思维有两个基本特点.

(一)间接性

间接性主要指思维是人脑对于客观事物的间接认识过程.所谓间接认识,就是以其他事物作媒介,借助于已有的知识和经验,去认识那些没有直接感知过的或者难以直接感知的事物,预见和推测事物的发展过程.

(二)概括性

概括性主要指思维是人脑对于客观事物的概括认识过程.所谓概括认识,就是以大量已知事实为依据,在已有知识经验的基础上,舍去某类事物的个别特点,抽出其共性的东西,从而得出这类事物的一般特性,发现事物间的科学规律.

(三)思维的具体过程

1.发现问题是解决问题的起点,也是解决问题的归宿.问题就是矛盾;发现问题就是发现矛盾.

2.明确问题,就是发现问题之后,经过进一步的分析,从一系列矛盾中,找出其主要矛盾.明确问题有两个基本要求:一是理清问题的症结之所在;二是准确地把问题表达出来.即在解答数学题中,表现为审题,弄清题目意思,分辨条件,问题(或结论),发掘题中概念的特征或图形的性质.

3.提出假设,就是明确问题之后,提出解决问题的原则、方案、途径和方法.

4.检验假设,就是验证提出的假设的真实性.检验假设通常有两条途径:一是在实践活动中检

验，如通过绘图、测量、实验等检验；二是在思维活动中去检验，如通过间接推理来检验假设. 检验获得成功，就可以对所考察的问题作出相应的正确的结论.

（四）思维的常用方法

常用的思维方法有分析、综合、比较、分类、抽象、概括、具体化、系统化、类比、归纳、演绎等10余种.

1. 分析和综合.

在思维中把事物的整体分解为部分，把复杂事物分解为简单要素，把完整的过程分解为各个阶段，并分别加以研究的思维方法叫做**分析**.

把事物的各个部分、各个方面、各种要素、各个阶段连接为整体进行考察的思维方法叫做**综合**.

2. 比较和分类.

确定有关事物的共同点和不同点的思维方法叫做**比较**.

根据事物的共同性和差异性，把具有相同属性的事物归入一类，把具有不同属性的事物归入不同的类的思维方法叫做**分类**.

3. 抽象、概括和具体化.

把各种事物的共同属性抽取出来加以考察的思维方法叫做**抽象**.

把抽象出来的事物的共同属性联合起来加以考察的思维方法叫做**概括**.

把抽象、概括中获得的概念和理论运用于实际，以恰当的实例来说明概念，解释理论的思维方法叫做**具体化**.

4. 系统化.

把各种有关材料归入某种一定的顺序，纳入某种一定的体系的思维方法叫做**系统化**.

5. 类比、归纳和演绎.

类比、归纳和演绎都从属于**数学推理**.

推理是从一个或几个已知判断，推出另一个新判断的思维形式.

推理可分为直接推理（是指只有一个前提的推理）和间接推理（是指两个或两个以上前提组成的推理）. 类比推理、归纳推理和演绎推理均属间接推理范畴.

由特殊场合的知识推出特殊场合的知识思维形式，叫做**类比推理**. 具体地说，它是根据两个（或两类）事物的某些相同的性质，推测它们在别的性质上也可能相同的推理形式.

要注意：类比推理所引出的结论并不一定真实.

由特殊场合的知识推出一般原理的思维形式，叫做**归纳推理**.

归纳推理有**完全归纳法**（是指研究了某类事物中的每一个对象，然后概括出这类事物的一般性结论）和**不完全归纳法**（是指通过对某类事物中的部分对象的研究，概括出关于该类事物的一般性结论）两种常见的形式.

完全归纳法考察了某类事物的每一个对象，因而由正确的前提必能得到正确的结论. 而不完全归纳法仅列举了全部事例中的一小部分，前提和结论之间未必有必然的联系. 因此，由不完全归纳法得到的结论，只有或然的性质，结论是否正确还需要经过理论的证明和实践的检验.

由一般原理推出特殊场合知识的思维形式，叫做**演绎推理**.

演绎推理可分**直言三段论**和**假言直言三段论**.

直言三段论，是从两个直言判断（其中一个必为全称判断）得出第三个判断的演绎推理. 第一个判断提供了一般的原理叫做三段论的**大前提**；第二个判断提出了一个特殊场合的情形，叫做**小前提**；综合这两个判断，得到反映一般原理与特殊场合联系的判断，即为第三个判断，叫做**结论**.

例 1-1 凡平行四边形(M)的对角线互相平分(P)(大前提),正方形(S)是平行四边形(M)(小前提);所以,正方形(S)的对角线互相平分(P)(结论).

假言直言三段论,是从一个假言判断和一个直言判断得出第三个判断的演绎推理.

假言直言三段论有肯定式和否定式两种:肯定式是从肯定假言前提的条件,从而肯定它的后件推理;否定式是从否定假言前提的后件,从而否定它的前件的推理.

例 1-2 若两角是对顶角,则此两角相等.

$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是对顶角,所以 $\angle AOC=\angle BOD$.

例 1-3 若两角不相等,则此两角不是对顶角.

$\angle AOC\neq\angle BOD$,所以 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 不是对顶角

(五)思维的基本规律

在形式逻辑中,概念、判断和推理三种基本的思维形式要准确地运用概念和判断,进行推理或证明,必须遵守同一律,矛盾律、排中律和充足理由律等四条思维的基本规律.

1. 同一律. 在同一时间内,从同一方面,思考或者议论同一事物的过程中,必须始终保持同一的认识.

2. 矛盾律. 在同一思维过程中,两个互相矛盾的判断,不能同真.

3. 排中律. 在同一思维过程中,两个互相否定的概念或判断,必有一个是真的. 排中律是反证法的逻辑基础.

4. 充足理由律. 任何一个真实的判断,必然有充足的理由.

三、数学概念

1. **概念**是人们对客观事物的一种认识,是反映客观事物的本质的思维形式.

概念不同于感觉,感觉是具体的、直接的,概念却是抽象的、概括的. 抽象性和概括性是概念不同于感觉的重要特征.

概念的内涵和外延:

内涵:概念所反映的对象本质的总和(概念所反映的对象的质的方面)叫做概念的内涵.

外延:概念所反映的对象的总和(概念所反映的对象的数量,或对象的范围)叫做概念的外延.

2. **定义**是揭示概念内涵的逻辑方法,也就是通过指出概念所反映的事物本质,来明确概念的逻辑方法.

3. **划分**是揭示概念外延的逻辑方法,也就是通过把某一个属概念划分为若干种概念来明确概念的逻辑方法.

4. **判断**是对客观事物的一种认识,是对客观事物有所肯定或否定的思维形式.

5. **命题**是作出判断时思维活动的过程,通过语言、文字或符号而表达的数学判断. 也可以理解为,可以判断正确或错误的句子叫做**命题**. 命题由"题设"和"结论"两部分组成. 正确的命题叫做**真命题**. 错误的命题叫做**假命题**.

数学中的定义、公理、定理、公式、性质、法则等都是数学命题.

对于同一素材,可以做出四种形式的命题.

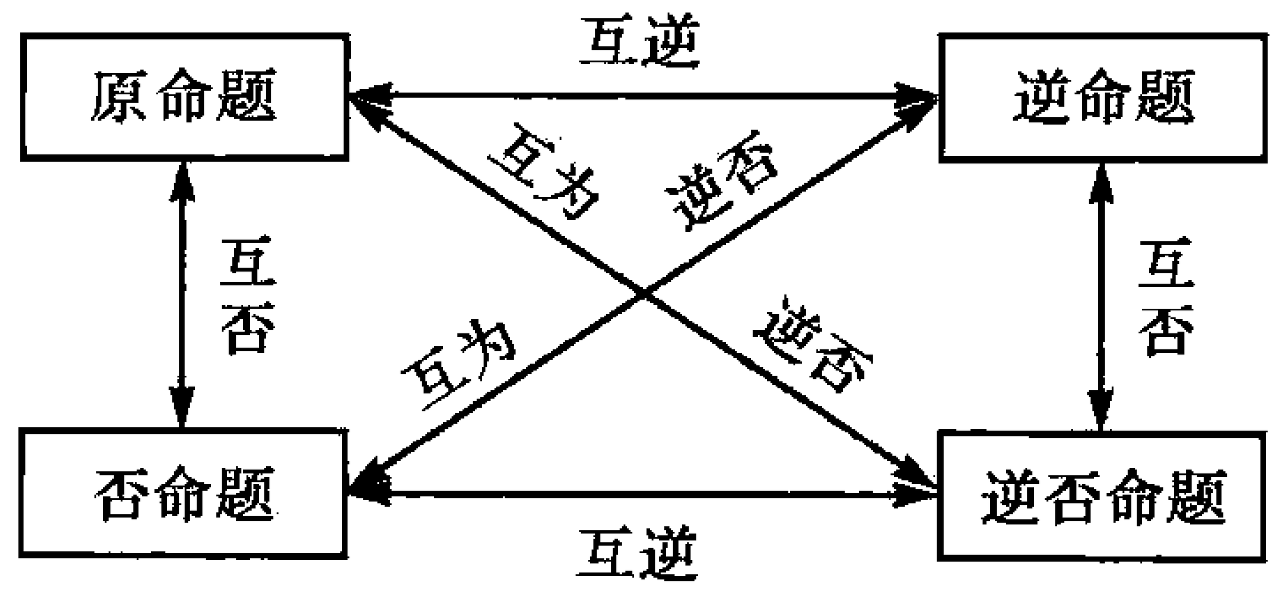
原命题:若 A(题设)则 B(结论)即 $A\Rightarrow B$;

逆命题:若 B(原命题的结论,改为题设)则 A(原命题的题设,改为结论)即 $B\Rightarrow A$;

否命题:若 $\overline{A}$(原命题中的题设为否定)则 $\overline{B}$(原命题中结论为否定)即 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$;

逆否命题:若 $\overline{B}$(原命题中的结论为否定,改为题设)则 $\overline{A}$(原命题中的题设为否定)即 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$.

四种命题之间的关系：



互逆或互否的两个命题的真实性并非一致，既可以两个都真或两个都假，也可以一真一假；而互为逆否的两个命题的真实性是一致的，真则同真，假则同假. 注：《新课程标准》中已删除“否命题”和“逆否命题”部分.

例 1-4　试写出命题：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方：(1)题设和结论. (2)分别写出逆命题、否命题和逆否命题，并指出其真假.

解　(1) 题设：直角三角形. 结论：两直角边的平方和等于斜边的平方.

(2) 逆命题：如果三角形的一条边的平方等于另外两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.（真命题）

否命题：如果三角形不是直角三角形，那么一条边的平方不等于另外两条边的平方和.（真命题）

逆否命题：如果三角形的一条边的平方，不等于另外两条边的平方和，那么这个三角形不是直角三角形.（真命题）

6. **充要条件**：

如果命题“$A \Rightarrow B$”为真，即 A(命题中的假设)就叫做使 B(结论)成立的**充分条件**.

如果命题“$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$”(原命题中的题设的否题设)为真，那么 A(原命题中的题设)就叫做使 B(原命题中的结论的否结论)成立的**必要条件**.

如果命题“$A \overset{\text{等价于}}{\Leftrightarrow} B$”为真，那么 A 就叫做使 B 成立的充分必要条件，或者简称充要条件. 这时，B 也是 A 成立的**充要条件**.

7. **同一原理**：当一个命题的条件和结论都唯一存在，它们所指的概念是同一概念时，这个命题与它的逆命题等效，这个道理叫做**同一原理**. 同一原理是间接证明方法中同一法的逻辑根据.

8. **定理**：数学命题有真有假，凡是经过逻辑证明确认其真实性的命题，叫做**定理**.

有些定理是由某一定理直接推得的，它的真实性只需稍加思索就能确定，不需要详细论证，这样的定理叫做**推论关系**.

如果一个定理的逆命题也是真命题，那么这个逆命题就是原定理的**逆定理**. 这两个定理是互逆的.

公理是数学中最基本的命题，它们在理论形式上，是逻辑推论的大前提，是数学需要作为自己出发点的少数思想上的规定，其真实性不是由逻辑证明来确定的，而是不证自明的.

四、数学证明

证明是引用一些真实的命题，来确定某一命题真实性的思维形式.

证明由论题、论据和论证三部分组成.

论题是指需要确定其真实性的那些命题.（通常写的“已知”、“求证”、“证明”中的“求证”部分）

论据是指被用来作为证明的理由. 数学中的公理、定义、定理、推论、公式、性质等，都可以作为证明的论据.

论证就是证明的过程. 是指从论据推出论题的过程，它表明论据和论题必然的逻辑联系. 证明过程其实也是推理过程，就是把论据作为推理的前提，应该用正确的推理形式，推出论题的过程.

证明的过程在思维的过程中，可以从不同的角度出发，从而得出不同的证明方法，则有演绎证

法与归纳证法、分析法与综合法及直接证法与间接证法.

(一)演绎证法与归纳证法

任何证明都是特殊形式的推理,因此按推理的方法,证明可分为演绎证法与归纳证法两种.

用演绎推理来证明论题的方法,叫做**演绎证法**.(三段论)

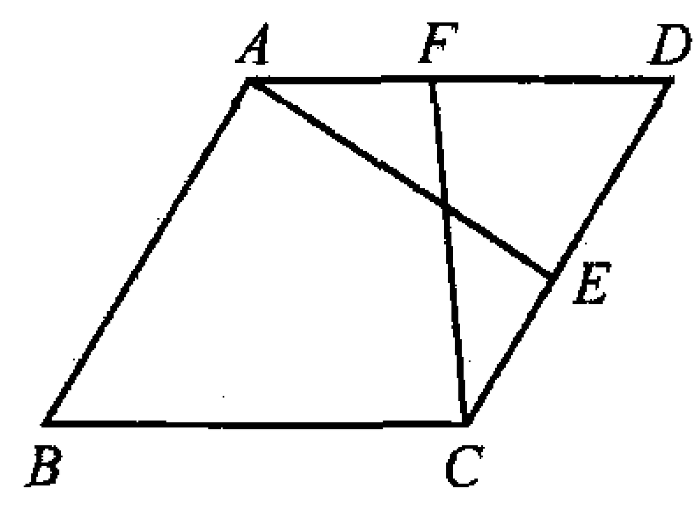


图 1-1

例 1-5 如图 1-1 所示,已知四边形 $ABCD$ 是菱形,点 E,F 分别是边 CD,AD 的中点.求证:$AE=CF$.

思维过程:证明线段相等往往采用三角形全等这座"桥"来过渡.

证明 菱形 $ABCD \Rightarrow \angle ADE=\angle CDF$、$AD=CD$,又 F,E 分别是 AD,CD 的中点$\Rightarrow DE=DF \Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle CDF \Rightarrow AE=CF$.

以上是用演绎推理来证明的.这个证明实际上是下面四步的推理过程.

①菱形的四边相等(大前提),AD,CD 是菱形的两条边(小前提),

$AD=CD$(结论).

②线段的中点等分线段(大前提),F,E 是 AD,CD 的中点(小前提),

$\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}CD, DE=DF$(结论).

③有一个角对应相等(此角为公共角),夹这个角的两边对应相等的两个三角形全等(大前提),

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDF$ 中,$\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADE=\angle CDF \\ DE=DF \end{cases}$ (小前提),

$\triangle ADE \cong \triangle CDF$(结论).

④全等三角形的对应边相等(大前提),$\triangle ADE \cong \triangle CDF$,$AE,CF$ 是对应边(小前提),$AE=CF$(结论).

用归纳推理来证明论题的方法,叫做**归纳证法**.归纳证法可分为完全归纳法和不完全归纳法两种.

完全归纳法又称枚举归纳法.通过对命题条件的一切可能情形的论证,从而确定命题真实性的证明方法.枚举归纳法应用于证明这样的命题,当条件的性质或关系发生变化时,其证明的理由也随之有所不同.其步骤是先对命题条件的一切可能情形逐一加以论证,然后总括起来断言命题普遍成立.在应用此法时,必须把各种可能情形作适当的分类,注意做到不遗漏、无重复.

例 1-6 将 17 分解成若干个自然数之和,使它们的积最大.

思维过程:若将 17 分成两个正数之和,使其积最大,我们可以采用二次函数求最值的方法$\left[y=x(17-x), y=-x^2+17x\text{,当 } x=\frac{17}{2}\text{ 时,} y \text{ 最大}\right]$求得;若分成两个自然数,则只能是 $8\times9=72$ 为最大.

而现在的问题是要求分成若干个自然数,我们可以这样考虑,首先不能有自然数 0,因为 0 乘以任何数只能为 0;也不能有自然数 1,因为 1 乘以任何数只能是其本身;其次,应将其折成除 0 或 1 以外的越小的自然数之和,则它们的积越大.因为很明显,$8\times9<4\times4\times9<4\times4\times4\times5<4\times4\times4\times2\times3<2\times3\times3\times3\times3\times3$.

最后,应将其折成尽可能均为 2 和 3 时,积为最大.而其中应出现尽可能多的 3.这是因为 $8=2+2+2+2=2+3+3$,而 $2\times2\times2\times2=16$,$2\times3\times3=18$,则 $2\times3\times3>2\times2\times2\times2$,那么至此可以得出以下结论.

对于任意大于等于 4 的自然数 n，若 $n=3k$（k 为自然数），则将其分为 k 个 3；若 $n=3k+1$，则将其分为 $(k-1)$ 个 3 与 2 个 2；若 $n=3k+2$ 时，则将其分为 k 个 3 与 1 个 2. 这样可使折成后的一串数的积为最大.

解题过程：根据以上分析，$17=3\times5+2$. 所以可将 17 折成 5 个 3 与一个 2，则折成后的数的积最大值 $=3^5\times2=486$.

例 1-7　求函数 $y=x|x|-2x-|x|$ 在 $-1\leqslant x\leqslant a$ 时的最小值.

思维过程：首先要对函数 $y=x|x|-2x-|x|$ 在 $x\geqslant-1$ 画出函数图象如图 1-2 所示. 其次考虑 a 是大于等于 -1 的实数. 结合以上分类讨论函数的最小值，不可遗漏.

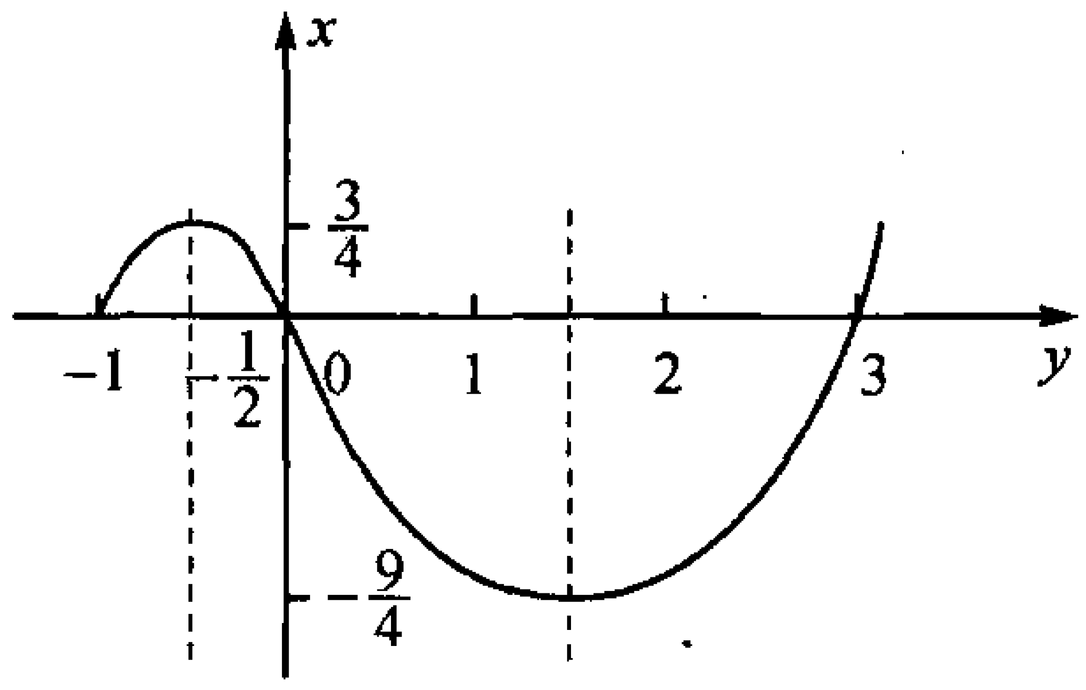


图 1-2

解题过程：

当 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时，$y=-x^2-x$. 当 $x>0$ 时，$y=x^2-3x$.

当 $-1\leqslant a\leqslant0$ 时，y 有最小值 $=0$.

当 $0<a<\dfrac{3}{2}$ 时，y 最小值 $=a^2-3a$.

当 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时，y 最小值 $=-\dfrac{9}{4}$.

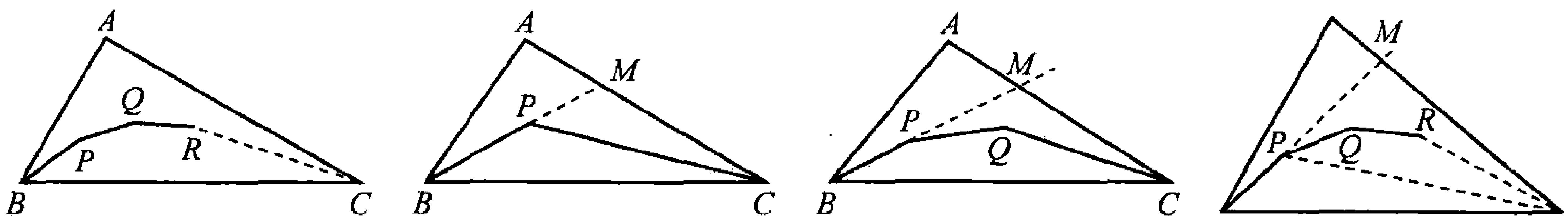
不完全归纳法：通过对命题条件的一部分进行研究，从而推断命题的一般结论的论证法. 它所得到的结论有时是不可靠的. 因此，常常成为“猜想”. 猜想则必须用其他方法去证明它或推翻它. 若猜想具有递推性，我们就能将内部成立的结论推广到一般.

例 1-8　如图 1-3(1) 在 $\triangle ABC$ 内部有点 $P,Q,R,\cdots$，与三角形两个顶点 B,C 围成一个凸多边形，试比较凸多边形的周长与 $\triangle ABC$ 的周长的大小.

思维过程：要比较多边形 $BPQR\cdots C$ 与 $\triangle ABC$ 的周长大小、等价于比较折线 $BPQR\cdots C$ 与 $AB+AC$ 的大小. 我们的问题是组成折线的边数是不确定的，因此只能对较为简单的情形进行研究，作出判断，以对一般情形的研究找到思路.

解题过程：

设折线的边数为 n. 当 $n=2$（图形内只有一个点）时如图 1-3(2) 所示，延长 BP 交 AC 于 M.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 1-3

在 $\triangle ABM$ 中，有 $AB+AM>BP+PM$…………①

在 $\triangle MPC$ 中，有 $PM+MC>PC$…………②

①+②得 $AB+AM+MC+PM>BP+PC+PM$. 而 $AM+MC=AC$，所以 $AB+AC>BP+PC$ 成立.

当 $n=3$（图形内有两个点）时，如图 1-3(3) 所示，延长 BP 交 AC 于 M，连接 PC，在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle PCM$ 中，有 $AB+AM>PB+PM$，$PM+MC>PQ+QC$.（由 $n=2$ 时的结论得出）

所以 $AB+AM+MC+PM>PB+PM+PQ+QC$，即 $AB+AC>PB+PQ+QC$.

当 $n=4$（图形内有三个点）时，延长 BP 与 AC 交于 M，连接 PC，在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle PCM$ 中，有 $AB+AM>PB+PM$，$PM+MC>PQ+QR+RC$（由 $n=3$ 的结论得出）.

所以 $AB+AM+MC+PM>PB+PM+PQ+QR+RC$.

即　$AB+AC>PB+PQ+QR+RC$.

根据以上分析，这个判断对大于 2 的自然数具有递推性. 可以猜想：折线长小于 $AB+AC$，则 $\triangle ABC$ 的周长大于凸多边形 $BPQR\cdots C$.

此上方法，属于不完全归纳法. 严格的证法要到高中学习了“数学归纳法”以后才能进行.

例 1-9　法国数学家费马提出一个计算素数的公式：$2^{2^n}+1$. 同时有人提出 n^2-n+41 也是素数计算公式、请问，这两个公式正确吗？

解　这两个公式都错误.

第一个公式：$2^{2^n}+1$，当 $n=1$ 时有 $2^{2^1}+1=5$；当 $n=2$ 时有 $2^{2^2}+1=17$；当 $n=3$ 时有 $2^{2^3}+1=257$；当 $n=4$ 时有 $2^{2^4}+1=65537$.

以上四个数确实是素数，但当 $n=5$ 时，$2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417$ 是合数.

第二个公式：尽管当 $n=1,2,\cdots,40$ 时，结果都是素数，可是当 $n=41$ 时，这个式子的值是 41^2，它是合数，而不是素数.

（二）分析法与综合法

对于一个命题的证明，不论用演绎法还是归纳法，都有一个如何思维的方法问题. 根据思维时推理序列的不同方向，证明方法可分为分析法和综合法两种.

分析法是从特征的结论出发，一步一步地探索下去，最后达到命题的已知条件.

综合法是从命题的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证的结论.

例 1-10　如图 1-4 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 为角平分线，AD 的中垂线交 BC 的延长线于 E，设 $CE=a$，$DE=b$，$BE=c$，求证：一元二次方程 $ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实数根.

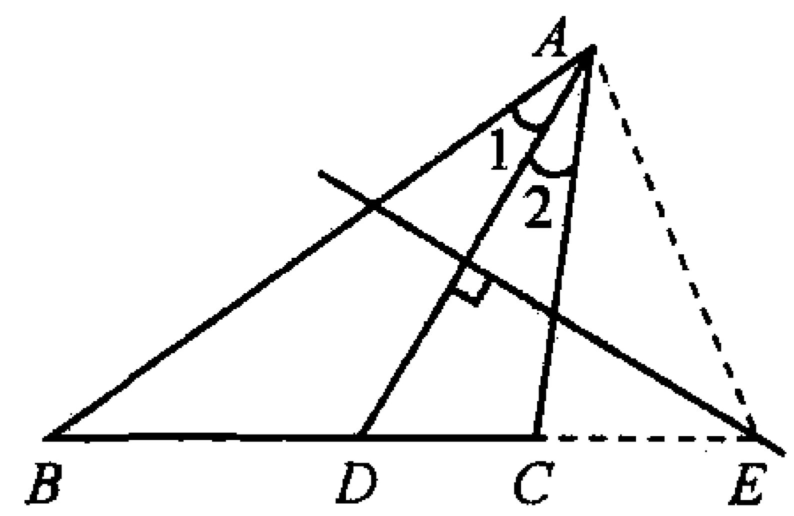


图 1-4

分析法：

要证方程 $ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实数根.

只要证方程根的判别式 $\Delta=0$.

则 $4b^2-4ac=0$，得 $b^2-ac=0$.

只要证：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$.

只要证：$DE=AE=b$.

只要证：过 E 点的直线是 AD 的中垂线，显然这是已知条件.

只要证：$\triangle ACE\backsim\triangle ABE$，只要证：$\angle EAC=\angle B$.

只要证：$\angle EAD=\angle EDA$，只要证：$\angle1=\angle2$.

只要证：AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，显然这是已知条件

由于 E 在 AD 的中垂线上，所以 $\angle EAD=\angle EDA$，$AE=DE=b$.

又 $\angle EAD=\angle2+\angle EAC$，　$\angle EDA=\angle1+\angle B$ ，且 $\angle1=\angle2$ ，所以 $\angle B=\angle EAC$.

而 $\angle AEC=\angle BEA$ ，$\triangle ACE\backsim\triangle ABE$，故命题成立.

综合法：

连 AE，因 E 是 AD 中垂线上的一点，所以 $AE=DE$ ，$\angle EAD=\angle EDA$.

而 $\angle EAD=\angle2+\angle EAC$，　$\angle EDA=\angle1+\angle B$.

又 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线 ，所以 $\angle1=\angle2$ ，$\angle EAC=\angle B$，　$\angle AEC=\angle BEA$.

所以 $\triangle ACE\backsim\triangle ABE$，所以 $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{AE}$，即 $b^2=ac$.

而方程的 $\Delta=4b^2-4ac$ 将 $b^2=ac$ 代入，得 $\Delta=4ac-4ac=0$.

所以方程 $ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实数根.

从上例可以看出，分析法的特点是："探果索因"即从"未知"看"需知"，逐步靠拢已知. 其逐步推理，实际上是寻找它的充分条件.

综合法的特点是：由因导果，即从"已知"，逐步推向"未知"，其逐步推理实际上是寻找它的必要条件.

但是分析法书写显得冗长，有点别扭. 而综合法表述流畅. 还可发现"分析法"是思维过程，则分析解题的思路. 因此我们可以采用先以分析法为主导，求解题思路，再用综合法有条理的表述解题过程.

（三）直接证法与间接证法

直接证法是从命题的条件出发，根据已知的定义、公理、定理、直接推断结论的真实性. 我们平时证题多数采用此法，不再举例.

有些命题，用直接证法比较困难，有的在待定的场合甚至找不到直接证明的依据. 这时可以证明它的反论题（与原论题相矛盾的判断）是假的，或考证它的等效命题，结果也能间接地达到目的. 这种不是从正面证明论题真实性的方法，叫做**间接证法**. 间接证法有反证法和同一法两种.

反证法的逻辑依据是**排中律**：两个互相矛盾的判断不能都是假的.

应用反证法证明数学命题的一般步骤是：

1. 分清命题的条件与结论.

2. 作出否定命题的结论，与命题结论相矛盾的假设.

3. 由命题的条件所作的假定，应用正确的推理方法，导出矛盾的结果，通常是指：

推出结果与已知的公理、定义或定理矛盾；

推出结果与已知条件矛盾；

推出结果与所作的假设矛盾；

推出互相矛盾的结果.

4. 断定产生矛盾结果的原因，在所作的与命题结论相矛盾的假设不真，于是原结论成立，从而间接证明了命题为真.

如果与命题结论相矛盾的方面只有一种情况，这时只要将这种情况予以否定，命题即被证明. 这种反证法，又称归谬法.

如果与命题结论相矛盾的方面不止一种情况，这是需要将它们一一予以否定，命题才能得证，这种反证法，又称穷举法.

反证法常用于证明如下类型的命题：一个数学分支的某些起始命题；否定性命题；唯一性命题；以"至量"、"至少"、"无穷"等形式出现的命题.

例 1-11　试证明平面上任意三个整点（坐标都是整数的点）必不能组成等边三角形.

已知：A,B,C 是平面上任意三个整点. 求证：$\triangle ABC$ 不是等边三角形.

思维过程：采用反证法，利用三边相等，列出方程组求其解.

证明　经平移，使点 A 重合于新坐标系原点，则点 A 的坐标为 $(0,0)$，因为点 B 与点 C 的旧坐标为整数，所以由平移变换公式知，其新坐标仍为整数. 设点 B 的新坐标为 (a,b)，其中 a,b 均为整数且至少有一个不为零. 不失一般性，设点 C 在 AB 上方，坐标为 $C(x_0,y_0)$，x_0 与 y_0 均为整数. 如图 1-5 所示.

假设 $\triangle ABC$ 是等边三角形 $AB^2=a^2+b^2$，$AC^2=x_0^2+y_0^2$，$BC^2=(a-x_0)^2+(b-y_0)^2$，

因此，$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=a^2+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x_0^2+y_0^2=(a-x_0)^2+(b-y_0)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

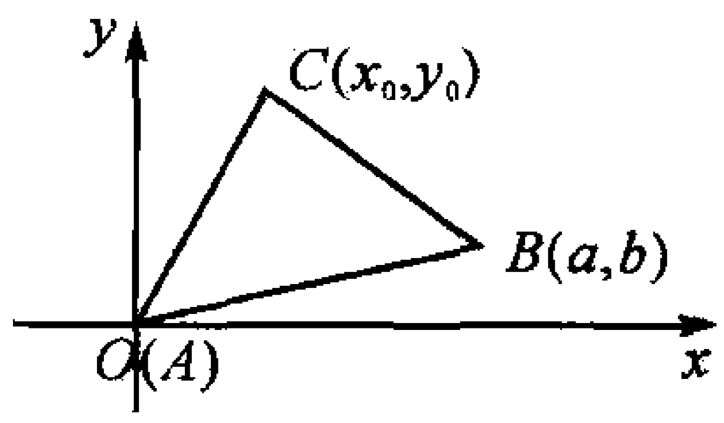


图 1-5

由②得 $y_0=\dfrac{a^2+b^2-2ax_0}{2b}$，代入① 化简后得

$4x_0{}^2-4ax_0-(3b^2-a^2)=0$，

由求根公式得：$x_0=\dfrac{a\pm\sqrt{3}b}{2}$，$y_0=\dfrac{\sqrt{3}\mp b}{2}$，

即 $\begin{cases} x_0=\dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} \\ y_0=\dfrac{\sqrt{3}a-b}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=\dfrac{a-\sqrt{3}b}{2} \\ y_0=\dfrac{\sqrt{3}a+b}{2} \end{cases}$.

因为 a，b 均为整数，且至少有一个不为零，故由上式可知，x，y 至少有一个为无理数，即它们不能同时为整数，于已知条件 C 是整点矛盾. 所以 $\triangle ABC$ 不是等边三角形.

同一法：对于条件和结论所确定的对象都唯一存在的命题. 通过论证和它等效的逆命题的正确性，从而确认原命题的真实性. 同一法的理论依据是同一原理.

应用同一法证明几何命题的一般步骤是：

(1)作出符合命题结论的图形；(2)证明所给的图形符合命题的条件；(3)根据由条件所确定的图形的唯一性，断定所作的图形就是已知图形；(4)断定命题的真实性.

例 1-12 以正方形一边为底向形内作一等腰三角形，若它的底角等于 15°，则将它的顶点与正方形另两个顶点连接时，构成一个等边三角形.

已知：E 是正方形 $ABCD$ 内部一点，$\angle ECD=\angle EDC=15°$. 求证：$\triangle EAB$ 是等边三角形. 如图 1-6 所示.

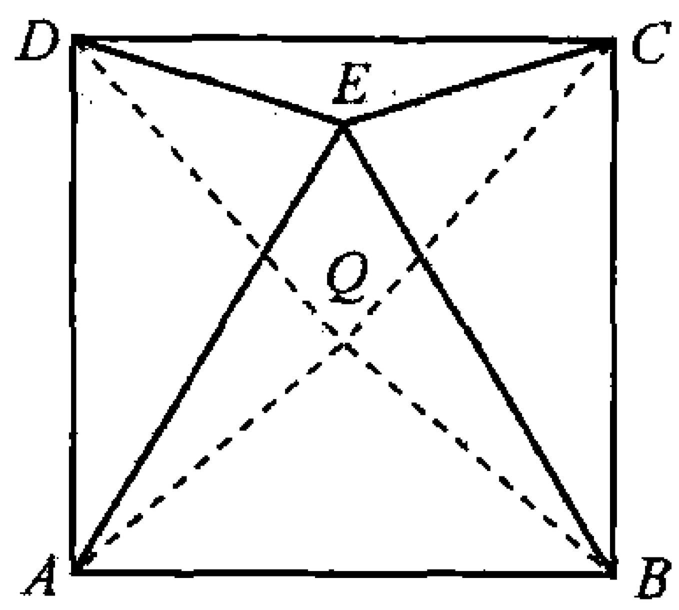


图 1-6

思维过程：显然可以用直接证明方法，

即利用 $\triangle ADE\cong\triangle BCE$，再求角. 也可以利用同一法证明.

证明：向正方形 $ABCD$ 内作等边三角形 $\triangle QAB$，

并连接 QC，QD，这时 $\triangle BCQ$ 是一个等腰三角形，

它的顶角 $\angle CBQ=90°-60°=30°$.

$\angle BCQ=\dfrac{180°-\angle CBQ}{2}=90°-15°=75°$.

于是 $\angle QCD=90°-75°=15°$， 同理 $\angle QDC=15°$.

而已知 E 在正方形 $ABCD$ 内，并且 $\angle ECD=\angle EDC=15°$，所以 Q 与 E 实际上是同一点，由于 $\triangle QAB$ 是等边三角形，所以 $\triangle EAB$ 是等边三角形.