经济数学基础教材之一

微积分

朱绍范 主编
刘冠军 主审

大连理工大学出版社

经济数学基础教材之一

微 积 分

主　编　朱绍范
副主编　王玉清
　　　　程　斌
　　　　史长喜

大连理工大学出版社

微　积　分

Weijifen

朱绍范　　主编

大连理工大学出版社出版发行　　（出版社登记证［辽］第16号）

（邮政编码：116024）

大连日报社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　　印张：11　　字数：320千字

1991年6月第1版　　1991年6月第1次印刷

印数：1—6200册

责任编辑：凌　子　　封面设计：边峰光

ISBN 7-5611-0481-2/O·73　　定价：4.90元

前　言

根据财政部教育司颁发的《高等财经院校数学教学大纲》编写的这套经济数学基础系列教材，包括：《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》。本书可作为财经类院校的文科、理工科专业以及理工科院校经济管理专业的教材。

参加本系列教材编写工作的院校有：东北财经大学、沈阳大学财经学院、南京审计学院、陕西工商学院、辽宁税务专科学校、营口大学、本溪大学、甘肃职工财经学院、江西财经管理干部学院、贵州农业管理干部学院等十几所院校（系）。

全书由朱绍范主编。王玉清、程斌和史长喜任副主编。

全书由刘冠军主审。

参加编写工作的有：邢玉香、王淑玉、刘晓青、刘心、赵瑞华、赵万伟、刘鹤年、田文萍、徐松、刘蒲凰。

本书在编写过程中，得到了全国经济院校经济数学学会和各兄弟院校的大力支持，在此谨表谢意！

限于编者的水平，书中定有错误和不当之处，恳请同仁和读者批评指正。

编者

1991年5月于沈阳

目　录

第一章　函　数

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

世界上的一切事物都是在不断地运动和变化的，我们在观察各种现象时，常常会遇到两种不同的量.例如自由落体的下降时间和下降距离是变化的量，而落体的质量在这一运动过程中是不变的量；又如在销售某商品过程中，单价保持不变，而销售量与销售总收入是变化的.那么，在该过程中单价是常量，而销售量与总收入是变量.

通常，我们把在某一变化过程中，数值保持不变的量称为**常量**.用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.可以取不同数值的量，称为**变量**.用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示.

应当指出，一个量是变量还是常量不是绝对的，它与我们所考察的过程有关.

同一个量在某个过程中是常量，在另一个过程中可能就是变量，反之亦然.

二、函数

1. 函数的定义

定义 1　设在某变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于 x 所讨论的范围内的每一个数值，按照某种对应关系，y 都有(唯一)确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的(单值)**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

2. 区间与邻域

定义 2　如果变量是连续变化的，则变量变化的范围称为**区间**.

在数轴上，区间一般是指介于两个实数之间的全体实数. 而这两个实数称为区间的**端点**. 区间通常用记号 (a,b)、$[a,b]$、$(a,b]$ 和 $[a,b)$ 表示. 如记号 (a,b) 表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的**开区间**. 以下类同.

定义 3　设 a 与 $\delta(>0)$ 为实数，则满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的一切实数 x 的集合，称为点 a 的 **δ 邻域**.

3. 函数的定义域

定义 4　使函数有意义的自变量的取值范围称为函数的**定义域**. 求函数的定义域通常参考以下原则：

(1)如果是分式，则分母不能为零.

(2)如果是偶次根式，则偶次根号下不能为负.

(3)如果是对数，则真数必须为正.

(4)如果是正切函数，则要求正切符号下的式子不能等于

$k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(5)如果是反正弦或反余弦函数，则反正余弦符号下的式子绝对值不能大于 1.

如果一个函数中包括偶次根式、对数、分式等，这时将分别求出各自的定义域，然后找出其公共区间即可.

例 1 求函数 $y=\sqrt{x}+\frac{3}{x-1}$的定义域.

解 $\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\geqslant0$，即$[0,+\infty)$，$\frac{3}{x-1}$的定义域为 $x-1\neq0$，即 $x\neq1$，也就是区间$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，所以函数的定义域为其公共区间，即$[0,1)\cup(1,+\infty)$.

例 2 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解 要使$\sqrt{1-x^2}$有意义，只要 $1-x^2\geqslant0$，即 $x^2\leqslant1$，于是$\sqrt{x^2}=|x|\leqslant1$，所以函数定义域为$-1\leqslant x\leqslant1$，即$[-1,1]$.

4. 函数值的求法

对于定义域中每一个 x，根据对应关系，都能得到一个 y 值，称其为**函数值**. 当自变量 x 取定义域内某个特定值 x_0，则 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$表示当 $x=x_0$ 时，所对应的函数值. 当自变量 x 在定义域中遍取每一定值时，所对应的 y 值构成的范围称为**值域**. 函数的对应关系，定义域和值域，是函数的三要素.

例 3 已知 $f(x)=x^2$，求：$f(3)$；$f(a+b)$；$f(x^2)$.

解 $f(3)=3^2=9$；

$f(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

$f(x^2)=(x^2)^2=x^4$.

三、函数的表示法

常用的函数表示法有下列三种：

1. 表格法　用列表的方式表达了因变量与自变量的对应关系.

例如　某皮鞋厂 1984 年 1～12 月份每月鞋产量如表 1—1 所示，此表格表示了鞋产量随月份变化的函数关系. 定义域为 $\{1,2,\cdots,12\}$.

表 1—1　　单位：百双

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
产量 y	495	500	480	560	580	620	590	680	700	720	710	810

2. 图象法　就是用图形表示自变量与因变量的对应关系.

图 1—1，图 1—2，…，都是表示自变量与因变量之间的某种函数关系. 如图 1—1 就是表示函数 $y=|x|$.

3. 公式法（解析法）　它是用数学表达式表示函数关系.

例如　$y=\dfrac{2}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$，这是用数学公式来表达 y 和 x 的函数关系，它的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

四、分段函数

在实际问题中，有的函数用一个数学式子不能够把它全部表示出来. 而需要几个数学公式才能表示出来，称这种函数

为**分段函数**.

例如

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

是定义在$(-\infty,+\infty)$上的分段函数(见图 1—1).

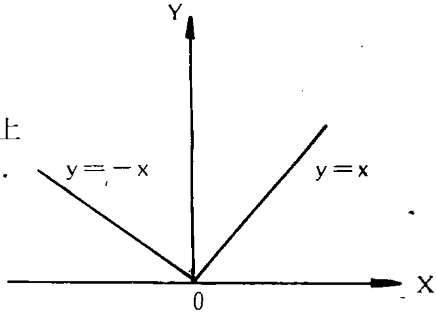

图 1—1

又如函数

$$y=\begin{cases} x+1 & -1\leqslant x<0 \\ 1 & 0\leqslant x<1 \\ x & x>1 \end{cases}$$

它的定义域为

$$[-1,1)\cup(1,+\infty)$$

(见图 1—2).

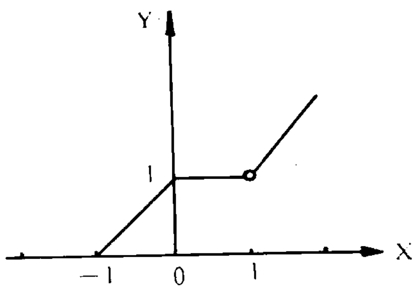

图 1—2

分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.

例 4 用分段函数表示 $y=2-|x-1|$.

解 由绝对值的定义可知

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & x-1\geqslant 0 \quad (\text{即 } x\geqslant 1) \\ -(x-1) & x-1<0 \quad (\text{即 } x<1) \end{cases}$$

于是有

$$y=\begin{cases} 2-(x-1) & x\geqslant 1 \\ 2+(x-1) & x<1 \end{cases}$$

因此

$$y=\begin{cases}3-x & x\geqslant 1\\ 1+x & x<1\end{cases}$$

(见图 1—3).

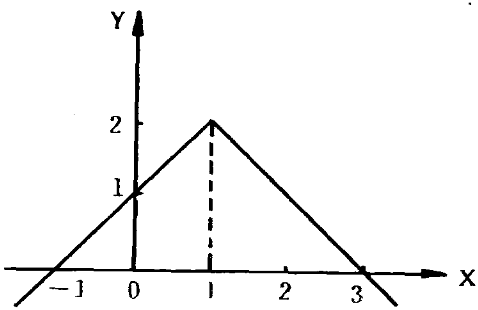

图 1—3

例 5 已知函数

$$y=\begin{cases}2-x & x<0\\ 2 & x=0\\ x^2 & x>0\end{cases}$$

求 $f(x-1)$.

解 $$f(x-1)=\begin{cases}2-(x-1) & x-1<0\\ 2 & x-1=0\\ (x-1)^2 & x-1>0\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}3-x & x<1\\ 2 & x=1\\ (x-1)^2 & x>1.\end{cases}$$

§1.2 函数的几个特性

一、函数的奇偶性

定义 1 如果函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 它的图形关于原点对

称(见图 1—4).

如果恒有

$f(-x)=f(x)$,

则称 $f(x)$ 为偶函数.

它的图形关于 y 轴对称(见图 1—5).

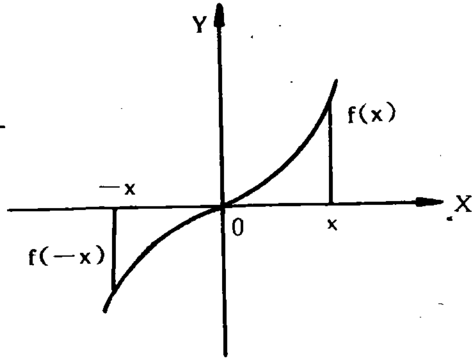

图 1—4

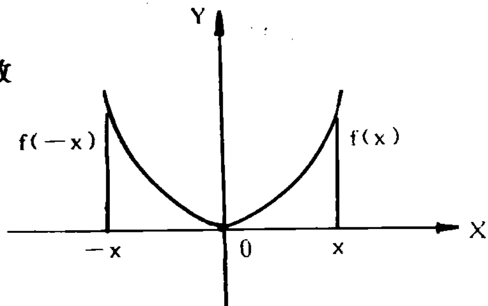

图 1—5

例 1 判断函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的奇偶性.

解 $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$

所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为奇函数(见图 1—6)

例 2 判断函数 $y=x^2+1$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=(-x)^2+1$$
$$=x^2+1$$
$$=f(x)$$

所以 $y=x^2+1$ 是偶函数(见图 1—7).

例 3 判断函数 $y=x^3-1$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1$ 既不等于

$f(x)=x^3-1$，也不等于

$$-f(x)=-(x^3-1)$$
$$=-x^3+1,$$

所以 $y=x^3-1$ 既不是奇函数，也不是偶函数，称**非奇非偶函数**(见图 1—8).

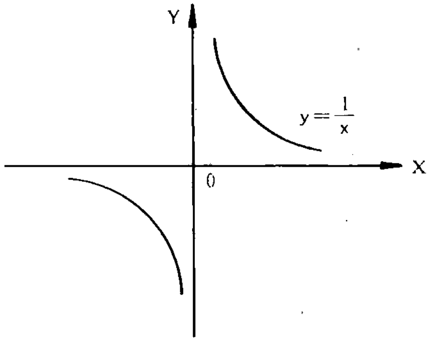

图 1—6

二、函数的周期性

定义 2 对于函数 $y=f(x)$，如果存在着常数 $T>0$，对于定义域内的任意 x，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足这个等式的最小正数 T 称为函数的**周期**.

例如三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期函数，周期均为 2π.

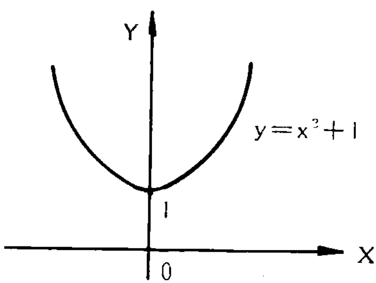

图 1—7

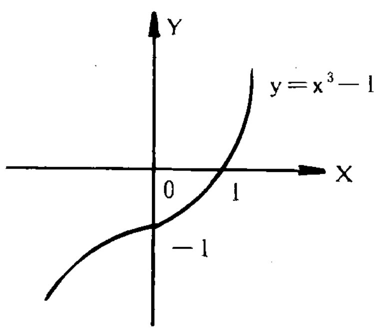

图 1—8

三、函数的单调性

定义 3 函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内**单调增加**；

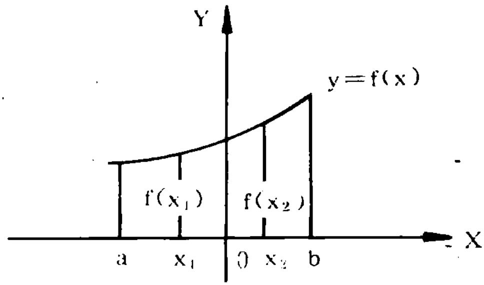

图 1—9

当 $x_1<x_2$ 时总有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内**单调减少**. 单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**.

从图形上看，单调增加函数的曲线总是沿 x 轴正向上升（见图 1—9）；单调减少函数的曲线是沿 x 轴正向下降，见图（1—10）. 使函数保持单调性的自变量区间称为**单调区间**.

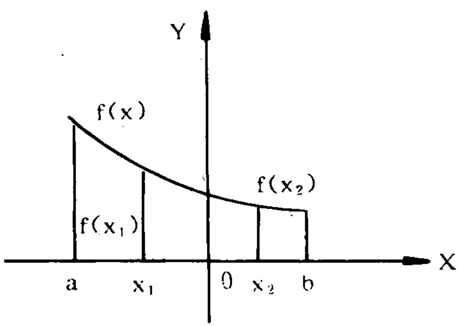

图 1—10

例 4 判断函数 $y=x^3$ 的单调性.

解 对$(-\infty,+\infty)$内任意的 x_1 和 x_2,且 $x_1<x_2$,则 $x_1^3<x_2^3$,因此有 $f(x_1)<f(x_2)$,所以函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

例 5 判断函数 $y=3x^2+1$ 的单调性.

解 对任意的 x_1 和 x_2,且 $x_1<x_2$,有

$$f(x_1)-f(x_2)=3(x_1^2+1)-3(x_2^2+1)=3(x_1^2-x_2^2)$$

在$(-\infty,0)$内,由于 $x_1<x_2$,则 $x_1^2>x_2^2$,于是有 $3(x_1^2-x_2^2)>0$,因此有 $f(x_1)-f(x_2)>0$ 即 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $y=3x^2+1$ 是单调减少的.

同理,在$[0,+\infty)$内,由于 $x_1<x_2$,则 $x_1^2<x_2^2$. 于是有 $3(x_1^2-x_2^2)<0$,因此有

$$f(x_1)-f(x_2)<0,即 f(x_1)<f(x_2),$$

函数 $y=3x^2+1$ 是单调增加的.

四、函数的有界性

定义 4 设函数 $f(x)$在(a,b)内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于(a,b)内的一切 x,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**有界**的. 否则是**无界**的.

例如函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对于$(-\infty,+\infty)$内任意实数,恒有$|\sin x|\leqslant 1$,这里 $M=1$.

又如函数 $y=\dfrac{1}{x}$,在$(1,2)$内有界,因为只要取 M 值大于等于 1 即可,此时$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$. 而 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,2)$内无界,因为对

(0,2)内的一切 x 不存在这样的正数 M，使得 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 恒成立. 当 M 无论取多么大的正数后，在(0,2)内一定能够找到这样的点，使得 $\left|\frac{1}{x}\right| > M$.

§1.3 复合函数与反函数

一、复合函数

定义 1 设 y 是 μ 的函数，$y=f(\mu)$，而 μ 又是 x 的函数，即 $\mu=\varphi(x)$，如果对于 x 在其取值范围内所对应的 μ 值，使得函数 y 有意义，则称 y 为 x 的**复合函数**. 记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 x 称为**自变量**，μ 称为**中间变量**.

例如 $y=\mu^2$，$\mu=\cos x$，则 $y=\cos^2 x$ 就是 x 的复合函数.

又如 $y=\ln\sqrt{x}$ 是由 $y=\ln\mu$，$\mu=\sqrt{x}$ 复合而成的复合函数.

复合函数的中间变量有时不止一个，可以是多个. 如设函数 $y=\sqrt{\mu}$，$\mu=\sin v$，$v=x^2$，则 $y=\sqrt{\sin x^2}$ 就是由 μ 和 v 两个中间变量复合而成的复合函数.

在复合函数定义中“如果对于 x 在其取值的范围内所对应的 μ 值，使得函数 y 有意义”这句话很重要. 如果对 x 值所对应 μ 值，函数 $y=f(\mu)$ 没有意义，那么函数 $y=f[\varphi(x)]$ 就不是 x 的复合函数.

例如 $y=\arcsin\mu$，$\mu=2+x^2$，则 $y=\arcsin(2+x^2)$ 就无意