数学分析复习

与

习题解答

李锦才编

目录

第一章　函数　极限　连续

一、函　数

函数是数学分析的研究对象。

1.定义　当变量x在数轴上某一部分X上取某一数值时，如果变量y依照某一法则，总有一个或多个确定的数值与之对应，则变量y叫做变量x的函数。

对函数概念，要把握变量y与变量x相对应的那个关系。自变量的取值范围称为函数的定义域，函数的取值范围称为值域。

用现代的观点讲，函数是数集到数集的映射。

2.函数的表示法　有分析法（公式法）、图示法和表格法。分段定义的函数必须弄清楚。

3.函数的给出方法

i，初等函数。

ii，函数可由函数列的极限给出，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。

iii，函数可由变上限的定积分给出，如$f(x)=\int_a^x g(t)dt$。

由含参数的积分定义给出，如$g(x)=\int_a^b f(x,t)dt$，$g(x)=\int_a^\infty f(x,t)dt$。

iv，函数可由一无穷级数或无穷连乘积给出，如

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\quad f(x)=\prod_{n=1}^{\infty} u_n(x)。$$

数学分析研究这些函数的分析性质，如连续性，可微和可积性等。

4.函数的基本特性

i，单值性和多值性。

ii，增减性（单调性）。设$y=f(x)$定义在区间$[a,b]$上，在其上任取二数x_1，x_2。当$x_1<x_2$时，若有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在$[a,b]$上单调增；当$x_1<x_2$时，若有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在$[a,b]$上单调减。

函数在某点或在某区间上的单调性可利用函数的一阶导数的符号来判断。

iii，有界性。例如$|f(x)|<M$，$x\in[a,b]$，$|\sin x|\leqslant 1$。

iv，奇偶性。若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。若$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数。

v，周期性。满足$f(x+T)=f(x)$的$f(x)$叫做以T为周期的周期函数。

5.反函数

y是x的函数：$y=f(x)$，若把y作为自变量，x作为函数，则有$x=\varphi(y)$或$y=\varphi(x)$，它们都叫做函数$y=f(x)$的反函数。

$y=f(x)$与$y=\varphi(x)$的图形关于直线$y=x$对称。

单值单调函数的反函数也是单值单调函数。

6.基本初等函数的图形 图形的特点应熟记。可借助导数的方法来描绘各个函数的图形。

二、极　限

极限是数学分析的最基本的概念和研究问题的最基本的工具。

1.数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 用$\varepsilon-N$语言表述：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称a为x_n当$n\to\infty$时的极限。

按定义验证极限时，直接由$|x_n-a|<\varepsilon$解出$n>N(\varepsilon)$常常比较困难，这时可把$|x_n-a|$适当放大为y_n，即令$|x_n-a|\leqslant y_n<\varepsilon$，然后从$y_n<\varepsilon$解出$n$以求得$N(\varepsilon)$。

2.函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 用$\varepsilon-\delta$语言表述：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)$，当$0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称$A$为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限。

按定义验证极限时，直接由$|f(x)-A|<\varepsilon$解出$|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$常常比较困难，这时可把$|f(x)-A|$适当放大为$g(x, x-x_0)$，即令$|f(x)-A|<g(x, x-x_0)<\varepsilon$，然后从$g(x, x-x_0)<\varepsilon$解出$|x-x_0|$以求得$\delta(\varepsilon)$。

$x\to x_0$时有所谓左、右极限：

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0),\qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0).$$

当$f(x_0-0)=f(x_0+0)$时叫做$x\to x_0$时有极限。

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$亦有相应的$\varepsilon-N$表达.

3.关于无穷小的定理

包括无穷小及极限的四则运算.

无穷小的比较，设$\lim\dfrac{u}{v}=A$，当$A=0$时，称u对v说是高阶无穷小，记为$u=o(v)$；当$0<|A|<+\infty$时，称u对v说是同阶无穷小，记为$u=O(v)$．特别当$A=1$时，称u，v为等价无穷小。

4.极限存在准则

i，（两头挤中间）若有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，而$\lim y_n=\lim z_n=a$，则$\lim x_n=a$.

ii，单调有界数列必有极限.

利用这两个准则，得下面两个重要的极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$$

在证明某些具体给定的数列是否有极限时常用到这两个准则．

5．关于极限的求法

i，按定义验证．

ii，若$f(x)$为连续函数，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

iii，未定式的定值法（罗必塔法则）

对$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，有$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$．

对$0\cdot\infty$和$\infty-\infty$型，先化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型再用罗必塔法则求．对$y=u(x)^{v(x)}$型的未定式可两边先取对数，再化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$来处理．

iv，用极限存在准则求．题目的花样很多．

v，利用收敛级数的公项趋于零求．即把数列公项x_n组成级数$\sum x_n$，证明该级数收敛，则有$\lim x_n=0$．

vi，其它方法．如化为积分和的极限等．

在求极限的过程中有时要用到等比级数与等差级数来求和：

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

$$a+(a+d)+\cdots+(a+(n-1)d)=(a+\frac{n-1}{2}d)n.$$

另外，注意到二个数的算术平均值不小于它们的几何平均值对解某些题目将有用处．即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$．证明如下：$(a-b)^2\geqslant0$，即$a^2+b^2\geqslant2ab$，或$a^2+b^2+2ab\geqslant4ab$，即$(a+b)^2\geqslant4ab$，两边开平方即得．

6．补充几个极限定理

求某些极限，应用以下几个定理将是方便的．

定理1．（斯托兹Stolz）若y_n当$n\geqslant N$时单调增到$+\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\text{存在}(\pm\infty)\text{，则}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

证明可在Γ·M·菲赫金哥尔兹著“微积分学教程”中译本一卷一分册中找到．这个定理常在$\frac{\infty}{\infty}$型定值时用到．

定理2．（柯西Cauchy）若$a_n\to A$（或$\pm\infty$），则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

证：令$x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$y_n=n$，用斯托兹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n-(n-1)}=A$$

例．设$a_n>0$，$a_n\to a$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$．

解：令$y_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，则$\ln y_n=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$，由柯西定

$\ln a$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$。

定理3．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

证：改虑 $b_1=a_1$，$b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$．由于 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 的极限存在，由上面的例子，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}=\lim_{n\to\infty}b_n,$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

三、连　续

1.定义　若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续．

用 $\varepsilon-\delta$ 语言表达为：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续．

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续必须同时满足：

i，　$f(x_0)$ 有定义；

ii，　$\lim f(x)$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$；

iii，　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

2.间断点　不连续的点叫做间断点，属于下列三个条件中的任一条件的 x_0 都是间断点：

i，　$f(x_0)$ 无定义。

ii，　$f(x_0)$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在。

iii，　$f(x_0)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但二者不相等。

间断点主要有可移去间断，有限间断及无穷间断。

对分段定义的函数要学会分析在某点是否连续及可导等．

3．连续函数的基本性质

i，在闭区间上连续的函数必取得最大值及最小值．

ii，（介值定理）设 $f(a)=m$，$f(b)=n$，而 $m<k<n$，则在 $(a,\ b)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=k$．

iii，设 $y=f(x)$ 连续，若 $f(a)f(b)<0$，则在 $(a,\ b)$ 内 $f(x)$ 至少有一个零点．

iv，闭区间上的连续函数一定是一致（均匀）连续的。

一等函数在定义域内为连续函数．

四、举 例

例1．设$F(x,\ t)=\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$，$(x-1)(t-1)>0$，$x\neq t$，$f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,\ t)$．求$f(x)$的连续区间和间断点．并研究在间断点处的左右极限，绘出草图．

解：$f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,\ t)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-t}\cdot\frac{t}{t-1}}=e^{\frac{x}{x-1}}$．

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=+\infty$，故$x=1$为无穷型间断点．连续区间为$(-\infty,\ 1)$，$(1,\ +\infty)$．又$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=e$，故$y=e$为水平渐近线．$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}$，$f''(x)=\frac{2(x-\frac{1}{2})}{(x-1)^4}e^{\frac{x}{x-1}}$，故知曲线永降．$x=\frac{1}{2}$为拐点的横坐标．

图形为图1.1所示．

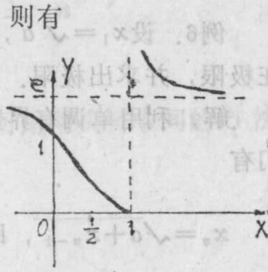

图1.1

例2．若$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在$[x_1,\ x_n]$中至少有一点ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

解：设$f(x_1)$，$f(x_2)$，…，$f(x_n)$中最大最小的数分别为M和m，则有

$$m=\frac{nm}{n}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant\frac{nM}{n}=M,$$

按介值定理知有$x_1<\xi<x_n$，使$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$．

例3．按定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$．

解：要对任给$\varepsilon>0$去找$N(\varepsilon)$，使当$n>N$时有$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$即可．今

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|,$$

当$n>2$时，我们有

$$\left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|<\frac{5n}{3\cdot 3n^2}=\frac{5}{9n}，令\frac{5}{9n}<\varepsilon，得n>\frac{5}{9\varepsilon},$$

取$N=\max\left(2,\ \left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]\right)$即可．

例4．求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{arctg}t\,dt}{x^2}$

解：这是$\frac{0}{0}$型未定式，用罗必塔法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

例5．求 $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ ．

解：方法1．令 $y=(\cos x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{1}{x}\ln\cos x^{\frac{1}{2}}$，

$$\lim_{x\to 0+}\ln y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0+}y=e^{-\frac{1}{2}}.$$

方法2．用 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 来做．令 $\sqrt{x}=y$，有

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{y\to 0+}(\cos y)^{\frac{1}{y^2}}$$

$$=\lim_{y\to 0+}(1+(\cos y-1))^{\frac{1}{\cos y-1}\cdot\frac{\cos y-1}{y^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例6．设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，…，$a>0$，证明 $\{x_n\}$ 存在极限，并求出极限．

解，利用单调有界数列必有极限准则来做．显然 $\{x_n\}$ 是单调增数列，今再证其有上界．我们有

$$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}，即 x_n^2=a+x_{n-1}，x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{a}{x_n}+1，又因 x_n\geqslant\sqrt{a}，$$

$(n=1,2\cdots)$ 故 $x_n<\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$，即 x_n 有上界．故 $\{x_n\}$ 有极限．设为 l，则有

$$l^2=a+l，即 l^2-l-a=0，$$

解得 $l=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$，因 $l>0$，应取 $l=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$．

例7．$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=A$，$a_i\geqslant 0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\ (m固定)$$

解：用两头挤中间的方法做

$$A=\sqrt[n]{A^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}A\to A\ (当 n\to\infty 时)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A.$$

例8．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$．

解：方法1．用两头挤中间的方法做．先证 $n!>(\frac{n}{3})^n$．用数学归纳法证．$n=1$ 时显然

成立，设对n时成立，证明对n为$n+1$时也成立．

$$(n+1)n!>(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

$$\left(\because\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\right)$$

即$(n+1)!>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$．于是

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}}=\frac{3}{n}，\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

方法2．用补充的定理3做．$a_n=\frac{1}{n!}$，$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=0.$$

例9．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$．

解：利用收敛级数的公项趋于零的办法做．考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$，用比值法判敛，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=0\cdot e=0<1,$$

故级数收敛，于是其公项的极限趋于零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$．（本例也可用两头挤中间的方法做）

例10．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$．

解：把求极限的式子写成积分和式的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2.$$

例11．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}\right)$．

解：由于$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，故

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1.$$

例12．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$．

解：由于 $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$，$n\geqslant 2$，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 1}{2^2}\cdot\frac{4\cdot 2}{3^3}\cdot\frac{5\cdot 3}{4^2}\cdots\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

例13．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$，（$k$为正整数）

解：用斯托兹定理做．令 $x_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$，$y_n=n^{k+1}$，由定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

例14．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$．

解：用柯西定理．令 $a_n=\sqrt[n]{n}$，由定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

第一章　习题

1．设 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$，若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$．

2．若 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，$x>0$，求 $f(x)$．

3．研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$ 的连续性并作简图．

4．研究函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x\neq 1,\\ 任意数, & x=1,\end{cases}$ 的连续性并作简图．

5．研究函数 $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ 的连续性．

6．研究函数 $y=\sqrt{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$ 的连续性．

7．研究函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ x-1, & x<1,\end{cases}$ 的连续性及可导性．

8．作函数 $y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$ 的图形．

9．设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 证明 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续．

10．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$，且对任何 x 值有 $f(x+2)-f(x)=$

$f(2)$，i) 试用a表示$f(2)$与$f(5)$．ii) 问a取什么值，$f(x)$是以 2 为周期的周期函数．

11．设$f(x)$在$(-\infty, \infty)$上二阶导数连续，且$f(0)=0$，对于函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$$

i) 确定a的值使$g(x)$在$(-\infty, \infty)$上连续．

ii) 证明对确定的a值，$g(x)$在$(-\infty, \infty)$上一阶导数连续．

12．设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，且$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$，

1) 证明若$f(x)$是偶函数，则$F(x)$也是偶函数．

2) 证明若$f(x)$非增，则$F(x)$非减．

13．a，b取何值时，函数$f(x)=\begin{cases}2x+x^2+3, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$ 在$(-\infty, \infty)$内连续、可导？

14．试证数列$x_n=\dfrac{11\cdot 12\cdots\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots\cdots(3n-1)}$，$n=1, 2\cdots$，有极限，并求其值．

15．求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$．

16．求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}dt$．

17．求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$，$(a_i>0, i=1, 2, \cdots, n)$

18．求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$．

19．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}\pi\right]$．

20．已知$f(x)$在$x=12$的邻域内为可导函数，且 $\lim\limits_{x\to 12}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 12}f'(x)=992$，求极限

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^x\left[t\int_t^{12}f(\theta)d\theta\right]dt}{(12-x)^3}.$$

21．设函数序列$f_n(x)=\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$，$a$) 当$x\geqslant 0$时，研究$\{f_n(x)\}$的收敛性，$b$) 证明当$0\leqslant x\leqslant 1$时，序列的收敛是一致的，$c$) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(x^2+1)f_n(x)dx$．

22．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\,dx$，$n$为正整数．

23. 设函数$f(x)$处处可导，且$0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{k}{1+x^2}$，（$k$为正常数）试证由下列关系所确定的$x_n$，当$n\to\infty$时有极限：$x_n=f(x_{n-1})$，$x_0$任意，$n=1,2,\cdots$，且证此极限满足$x=f(x)$.

24. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0$，$(p>0)$.

25. 设$f(x)$对于$x\geqslant1$为非负的增函数，证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\leqslant\int_1^n f(x)dx\leqslant\sum_{k=2}^{n}f(k);$$

当$f(x)=\ln x$时，证明不等式$e\cdot e^{-n}\cdot n^n<n!<e\cdot e^{-n}\cdot n^{n+1}$，由此证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=\frac{1}{e}.$$

26. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

27. 设$S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

28. 按定义证明 $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^3-1}{t-1}=3$.

29. 设$x_1=\sqrt{2}$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

30. 数列$\{a_n\}$由下式定义：$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$，$n=1, 3\cdots$，设$a_1=1$，$a_2=2$，试证

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{3}.$$

31. 若$x_1=a>0$，$y_1=b>0$，$(a<b)$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

32. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$，$|x|<1$.

33. 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})(1-x^{\frac{1}{3}})\cdots(1-x^{\frac{1}{n}})}{(1-x)^{n-1}}$

34. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

35. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n\text{ 次}}x$.

36. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

37. 判断$x_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{2^n})$，当$n\to\infty$时有否极限.

38. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x})$.

39. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0,\\ 5 & x=0,\\ \displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

40. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

41. 证明数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

42. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}+\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$.

第二章　导数及其应用(包括中值定理)

导数是数学分析的核心内容之一．凡是一个变量相对于另一个变量的变化问题都是导数的问题．

1．导数定义　设$f(x)$在$[a, b]$区间上定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，称这个极限值为函数$f(x)$在点$x=x_0$的导数．记为$f'(x_0)=y'\Big|_{x=x_0}=(\frac{dy}{dx})\Big|_{x=x_0}$等．

导数的几何意义是曲线上某点的切线斜率，物理上可看作直线运动的速度．

函数可导一定连续，连续不一定可导．

2．导数的求法

(Ⅰ) 基本初等函数的导数公式

$(c)'=0$，　$(x^n)'=nx^{n-1}$，　$(a^x)'=a^x\ln a$，

$(e^x)'=e^x$，　$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$，　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，

$(\sin x)'=\cos x$，　$(\cos x)'=-\sin x$，　$(\mathrm{tg}\, x)'=\sec^2 x$，

$(\mathrm{ctg}\, x)'=-\csc^2 x$，　$(\sec x)'=\sec x\,\mathrm{tg}\, x$，　$(\csc x)'=-\csc x\,\mathrm{ctg}\, x$，

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　$(\mathrm{arctg}\, x)'=\frac{1}{1+x^2}$，

$(\mathrm{arcctg}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$，等．

(Ⅱ) 求导法则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$，$(uv)'=uv'+vu'$，$(\frac{u}{v})'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$，

若$y=f(u)$，$u=\psi(x)$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$，

若$y=u(x)^{v(x)}$，可先取对数再求导数．

(Ⅲ) 反函数、参数方程所表示的函数和隐函数的导数

i，设函数$y=f(x)$，其反函数为$x=\psi(y)$，则$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$．

ii，$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\varphi(t),\end{cases}$　$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{\varphi'(t)}$．