

数学分析复习

与

习题解答

李锦才编

目 录

第一章 函数 极限 连续	(1)
一、函数	(1)
1. 定义	(1)
2. 函数的表示法	(1)
3. 函数的给出方法	(1)
4. 函数的基本特性	(1)
5. 反函数	(2)
6. 基本初等函数的图形	(2)
二、极限	(2)
1. 数列的极限	(2)
2. 函数的极限	(2)
3. 关于无穷小的定理	(2)
4. 极限存在准则	(2)
5. 关于极限的求法	(3)
6. 补充几个极限定理	(3)
三、连续	(4)
1. 定义	(4)
2. 间断点	(4)
3. 连续函数的基本性质	(4)
四、举例	(5)
第一章习题	(8)
第二章 导数及其应用 (包括中值定理)	(12)
1. 导数的定义	(12)
2. 导数的求法	(12)
3. 微分	(13)
4. 高阶导数	(13)
5. 微分中值定理	(13)
6. 应用	(14)
7. 举例	(14)
第二章习题	(17)
第三章 不定积分	(20)
1. 不定积分定义	(86)

2. 不定积分性质	(20)
3. 基本积分表	(20)
4. 换元积分法	(21)
5. 分部积分法	(21)
6. 有理函数的积分	(21)
7. 三角函数的有理式的积分	(22)
8. 简单代数无理式的积分	(22)
9. 举例	(22)
第三章习题	(25)
第四章 定积分及其应用	(28)
1. 定积分定义	(28)
2. 定积分的简单性质 中值定理	(28)
3. 定积分与不定积分的关系 牛—莱公式	(29)
4. 定积分的换元法	(29)
5. 定积分的分部积分法	(30)
6. 定积分的近似积分法	(30)
7. 广义积分	(30)
8. 含参数积分	(31)
9. Γ 函数与 β 函数	(33)
10. 应用	(34)
11. 举例	(36)
第四章习题	(39)
第五章 无穷级数	(42)
一、常数项级数	(42)
1. 无穷级数概念	(42)
2. 无穷级数的基本性质 收敛的必要条件	(42)
3. 正项级数	(43)
4. 任意项级数 绝对收敛	(44)
二、函数项级数	(44)
5. 函数项级数的一般概念	(44)
6. 均匀收敛及均匀收敛级数的基本性质	(44)
三、幂级数	(45)
7. 幂级数的收敛半径	(45)
8. 幂级数的运算	(46)
9. 幂级数的微分与积分	(46)
10. 泰勒级数	(46)
11. 初等函数的展开	(47)
12. 泰勒级数应用于近似计算	(47)
13. 举例	(47)
	(51)

第六章 付里叶级数	(55)
1. 三角级数	(55)
2. 尤拉——付里叶公式	(56)
3. 付里叶级数	(56)
4. 偶函数及奇函数的展式	(57)
5. 函数展为正弦或余弦级数	(57)
6. 任意区间上的付里叶级数	(57)
7. 举例	(58)
第六章习题	(59)
第七章 多元函数的微分法及其应用	(61)
1. 二元函数的极限与连续性	(61)
2. 偏导数	(62)
3. 全增量及全微分	(62)
4. 复合函数的微分法	(63)
5. 隐函数及其微分法	(64)
6. 空间曲线的切线及法平面	(64)
7. 曲面的切平面及法线	(64)
8. 二元函数的泰勒公式	(65)
9. 多元函数的极值	(65)
10. 条件极值——拉格朗日乘数法	(65)
11. 举例	(66)
第七章习题	(70)
第八章 重积分及其应用	(74)
1. 二重积分定义	(74)
2. 二重积分的简单性质 中值定理	(74)
3. 二重积分的计算法 (直角坐标)	(75)
4. 利用极坐标计算二重积分	(75)
5. 三重积分及其计算法	(76)
6. 三重积分在柱坐标系中的计算	(76)
7. 三重积分在球坐标系中的计算	(77)
8. 重积分的换元法	(77)
9. 曲面的面积	(78)
10. 重积分在静力学中的应用	(79)
11. 举例	(80)
第八章习题	(82)
第九章 曲线积分及曲面积分	(85)
1. 对坐标的曲线积分	(85)
2. 对弧长的曲线积分	(86)
3. 两类曲线积分之间的关系	(86)
4. 格林公式	(86)

5. 曲线积分与路径无关的条件	(87)
6. 对坐标的曲面积分	(87)
7. 对面积的曲面积分	(88)
8. 两类曲面积分之间的关系	(88)
9. 奥斯特罗格拉茨基公式	(88)
10. 斯托克斯公式	(89)
11. 举例	(89)
第九章习题	(91)
第十章 微分方程	(94)
1. 变量可分离的微分方程	(94)
2. 齐次方程	(94)
3. 一阶线性方程	(94)
4. 全微分方程	(95)
5. 高阶微分方程的几个特殊类型	(96)
6. 线性微分方程解的结构	(97)
7. 常系数齐次线性方程	(97)
8. 常系数非齐次线性方程	(97)
9. 尤拉方程	(98)
10. 举例	(99)
第十章习题	(103)
附录 不等式应用举例	(105)
习题解答	(111)
第一章	(111)
第二章	(118)
第三章	(128)
第四章	(137)
第五章	(145)
第六章	(155)
第七章	(161)
第八章	(170)
第九章	(177)
第十章	(185)

第一章 函数 极限 连续

一、函数

函数是数学分析的研究对象。

1. 定义 当变量 x 在数轴上某一部分 X 上取某一数值时, 如果变量 y 依照某一法则, 总有一个或多个确定的数值与之对应, 则变量 y 叫做变量 x 的函数。

对函数概念, 要把握变量 y 与变量 x 相对应的那个关系。自变量的取值范围称为函数的定义域, 函数的取值范围称为值域。

用现代的观点讲, 函数是数集到数集的映射。

2. 函数的表示法 有分析法(公式法)、图示法和表格法。分段定义的函数必须弄清楚。

3. 函数的给出方法

i, 初等函数。

ii, 函数可由函数列的极限给出, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 。

iii, 函数可由变上限的定积分给出, 如 $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ 。

由含参数的积分定义给出, 如 $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt, g(x) = \int_a^\infty f(x, t) dt$ 。

iv, 函数可由一无穷级数或无穷连乘积给出, 如

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

数学分析研究这些函数的分析性质, 如连续性, 可微和可积性等。

4. 函数的基本特性

i, 单值性和多值性。

ii, 增减性(单调性)。设 $y=f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上, 在其上任取二数 x_1, x_2 。当 $x_1 < x_2$ 时, 若有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调增; 当 $x_1 < x_2$ 时, 若有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调减。

函数在某点或在某区间上的单调性可利用函数的一阶导数的符号来判断。

iii, 有界性。例如 $|f(x)| < M, x \in (a, b), |\sin x| \leq 1$ 。

iv, 奇偶性。若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数。若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数。

v , 周期性。满足 $f(x+T)=f(x)$ 的 $f(x)$ 叫做以 T 为周期的周期函数。

5. 反函数

y 是 x 的函数: $y=f(x)$, 若把 y 作为自变量, x 作为函数, 则有 $x=\varphi(y)$ 或 $y=\varphi(x)$, 它们都叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数。

$y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

单值单调函数的反函数也是单值单调函数。

6. 基本初等函数的图形 图形的特点应熟记。可借助导数的方法来描绘各个函数的图形。

二、极限

极限是数学分析的最基本的概念和研究问题的最基本的工具。

1. 数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 用 $\varepsilon-N$ 语言表述: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为 x_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

按定义验证极限时, 直接由 $|x_n - a| < \varepsilon$ 解出 $n > N(\varepsilon)$ 常常比较困难, 这时可把 $|x_n - a|$ 适当放大为 y_n , 即令 $|x_n - a| < y_n < \varepsilon$, 然后从 $y_n < \varepsilon$ 解出 n 以求得 $N(\varepsilon)$ 。

2. 函数的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 用 $\varepsilon-\delta$ 语言表述: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。

按定义验证极限时, 直接由 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 解出 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 常常比较困难, 这时可把 $|f(x) - A|$ 适当放大为 $g(x, x - x_0)$, 即令 $|f(x) - A| < g(x, x - x_0) < \varepsilon$, 然后从 $g(x, x - x_0) < \varepsilon$ 解出 $|x - x_0|$ 以求得 $\delta(\varepsilon)$ 。

$x \rightarrow x_0$ 时有所谓左、右极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

当 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ 时叫做 $x \rightarrow x_0$ 时有极限。

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 亦有相应的 $\varepsilon-N$ 表达。

3. 关于无穷小的定理

包括无穷小及极限的四则运算。

无穷小的比较, 设 $\lim \frac{u}{v} = A$, 当 $A = 0$ 时, 称 u 对 v 说是高阶无穷小, 记为 $u = o(v)$;

当 $0 < |A| < +\infty$ 时, 称 u 对 v 说是同阶无穷小, 记为 $u = O(v)$ 。特别当 $A = 1$ 时, 称 u, v 为等价无穷小。

4. 极限存在准则

i, (两头挤中间) 若有 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 而 $\lim y_n = \lim z_n = a$, 则 $\lim x_n = a$ 。

ii, 单调有界数列必有极限。

利用这两个准则, 得下面两个重要的极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

在证明某些具体给定的数列是否有极限时常用到这两个准则.

5. 关于极限的求法

i, 按定义验证.

ii, 若 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

iii, 未定式的定值法 (罗必塔法则)

对 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

对 $0 \cdot \infty$ 和 $\infty - \infty$ 型, 先化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型再用罗必塔法则求. 对 $y = u(x)^{v(x)}$ 型的未定式可

两边先取对数, 再化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 来处理.

iv, 用极限存在准则求. 题目的花样很多.

v, 利用收敛级数的公项趋于零求. 即把数列公项 x_n 组成级数 $\sum x_n$, 证明该级数收敛, 则有 $\lim x_n = 0$.

vi, 其它方法. 如化为积分和的极限等.

在求极限的过程中有时要用到等比级数与等差级数来求和:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

$$a + (a+d) + \cdots + (a+(n-1)d) = (a + \frac{n-1}{2}d)n.$$

另外, 注意到二个数的算术平均值不小于它们的几何平均值对解某些题目将有用处. 即

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \text{ 证明如下: } (a-b)^2 \geq 0, \text{ 即 } a^2 + b^2 \geq 2ab, \text{ 或 } a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab, \text{ 即 } (a+b)^2 \geq 4ab, \text{ 两边开平方即得.}$$

6. 补充几个极限定理

求某些极限, 应用以下几个定理将是方便的.

定理1. (斯托兹 Stolz) 若 y_n 当 $n \geq N$ 时单调增到 $+\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \text{ 存在 } (\pm \infty), \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

证明可在 $\Gamma \cdot M \cdot$ 菲赫金哥尔兹著“微积分学教程”中译本一卷一分册中找到. 这个定理常

在 $\frac{\infty}{\infty}$ 型定值时用到.

定理2. (柯西 Cauchy) 若 $a_n \rightarrow A$ (或 $\pm \infty$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

证: 令 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $y_n = n$, 用斯托兹定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n - (n-1)} = A$$

例. 设 $a_n > 0$, $a_n \rightarrow a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

解: 令 $y_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, 则 $\ln y_n = \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)$, 由柯西

$\ln a$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

定理3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

证: 改虑 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} (n \geq 2)$. 由于 $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的极限存在, 由上面的例子, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

三、连续

1. 定义 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$, 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续.

用 $\varepsilon - \delta$ 语言表达为: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续.

函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续必须同时满足:

- $f(x_0)$ 有定义;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. 间断点 不连续的点叫做间断点, 属于下列三个条件中的任一条件的 x_0 都是间断点:

- $f(x_0)$ 无定义.
- $f(x_0)$ 有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.
- $f(x_0)$ 有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但二者不相等.

间断点主要有可移去间断, 有限间断及无穷间断.

对分段定义的函数要学会分析在某点是否连续及可导等.

3. 连续函数的基本性质

- 在闭区间上连续的函数必取得最大值及最小值.
- (介值定理) 设 $f(a) = m$, $f(b) = n$, 而 $m < k < n$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = k$.
- 设 $y = f(x)$ 连续, 若 $f(a)f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内 $f(x)$ 至少有一个零点.
- 闭区间上的连续函数一定是一致(均匀)连续的.

等函数在定义域内为连续函数.

四、举 例

例1. 设 $F(x, t) = \left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-1}}$, $(x-1)(t-1) > 0$, $x \neq t$, $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} F(x, t)$.

子, 求 $f(x)$ 的连续区间和间断点. 并研究在间断点处的左右极限, 绘出草图.

$$\text{解: } f(x) = \lim_{t \rightarrow x} F(x, t) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-1} \cdot \frac{t}{t-1}} = e^{\frac{x}{x-1}}.$$

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty$, 故 $x=1$ 为无穷型间断点. 连续区间为 $(-\infty, 1)$;

$(1, +\infty)$. 又 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e$, 故 $y=e$ 为水平渐近线. $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$, $f''(x) =$

$$\frac{2(x-\frac{1}{2})}{(x-1)^4} e^{\frac{x}{x-1}}, \text{ 故知曲线永降. } x = \frac{1}{2} \text{ 为拐点的横坐标.}$$

图形为图1.1所示.

例2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, 则在 (x_1, x_n) 中至少有一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

解: 设 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ 中最大最小的数分别为 M 和 m , 则有

$$m = \frac{nm}{n} \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \frac{nM}{n} = M,$$

按介值定理知有 $x_1 < \xi < x_n$, 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$.

例3. 按定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$.

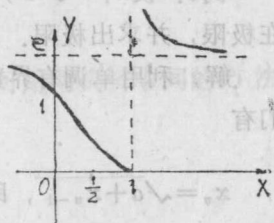


图 1.1

解: 要对任给 $\varepsilon > 0$ 去找 $N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时有 $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ 即可. 今

$$\left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}\right|,$$

当 $n > 2$ 时, 我们有

$$\left|\frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}\right| < \frac{5n}{3 \cdot 3n^2} = \frac{5}{9n}, \text{ 令 } \frac{5}{9n} < \varepsilon, \text{ 得 } n > \frac{5}{9\varepsilon},$$

取 $N = \max(2, (\frac{5}{9\varepsilon}))$ 即可.

例4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t dt}{x^2}$

解: 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 用罗必塔法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

例5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$.

解: 方法1. 令 $y = (\cos x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln \cos x^{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \cos \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} y = e^{-\frac{1}{2}}.$$

方法2. 用 $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ 来做. 令 $\sqrt{x} = y$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \lim_{y \rightarrow 0+} (\cos y)^{\frac{1}{y^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} (1 + (\cos y - 1))^{\frac{1}{\cos y - 1} \cdot \frac{\cos y - 1}{y^2}} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

例6. 设 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, ..., $a > 0$, 证明 $\{x_n\}$ 存在极限, 并求出极限.

解, 利用单调有界数列必有极限准则来做. 显然 $\{x_n\}$ 是单调增数列, 今再证其有上界. 我们有

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \text{ 即 } x_n^2 = a + x_{n-1}, \quad x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{a}{x_n} + 1, \text{ 又因 } x_n \geq \sqrt{a},$$

($n=1, 2, \dots$) 故 $x_n < \frac{a}{\sqrt{a}} + 1 = \sqrt{a} + 1$, 即 x_n 有上界. 故 $\{x_n\}$ 有极限. 设为 l , 则有

$$l^2 = a + l, \text{ 即 } l^2 - l - a = 0,$$

解得 $l = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$, 因 $l > 0$, 应取 $l = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$.

例7. $\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = A$, $a_i \geq 0$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \quad (m \text{ 固定})$$

解: 用两头挤中间的方法做

$$A = \sqrt[n]{A^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{mA} \rightarrow A \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = A.$$

例8. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

解: 方法1. 用两头挤中间的方法做. 先证 $n! > (\frac{n}{3})^n$. 用数学归纳法证. $n=1$ 时显然

成立, 设对 n 时成立, 证明对 n 为 $n+1$ 时也成立.

$$(n+1)n! > (n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

$$(\because (1+\frac{1}{n})^n < 3)$$

即 $(n+1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$. 于是

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} = \frac{3}{n}, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

方法2. 用补充的定理3做, $a_n = \frac{1}{n!}$, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} = 0.$$

例9. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

解: 利用收敛级数的公项趋于零的办法做. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$, 用比值法判敛,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(n+1)^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= 0 \cdot e = 0 < 1,$$

故级数收敛, 于是其公项的极限趋于零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$. (本例也可用两头挤中间的方法做)

例10. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

解: 把求极限的式子写成积分和式的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

例11. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}\right)$.

解: 由于 $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1. \end{aligned}$$

例12. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

解: 由于 $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$, $n \geq 2$,

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 1}{2^2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3^3} \cdot \frac{5 \cdot 3}{4^2} \cdots \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

例13. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$, (k 为正整数)

解: 用斯托兹定理做. 令 $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$, 由定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

例14. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

解: 用柯西定理. 令 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 由定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

第一章 习题

1. 设 $f_n(x) = f(f(\cdots f(x)))$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

2. 若 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x > 0$, 求 $f(x)$.

3. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \text{的连续性并作简图.}$$

4. 研究函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1, \\ \text{任意数}, & x = 1, \end{cases}$ 的连续性并作简图.

5. 研究函数 $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ 的连续性.

6. 研究函数 $y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$ 的连续性.

7. 研究函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ x-1, & x < 1, \end{cases}$ 的连续性及其可导性.

8. 作函数 $y = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ 的图形.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 证明 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数, $f(1) = a$, 且对任何 x 值有 $f(x+2) - f(x) =$

$f(2)$, i) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$. ii) 问 a 取什么值, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上二阶导数连续, 且 $f(0)=0$, 对于函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

i) 确定 a 的值使 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续.

ii) 证明对确定的 a 值, $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一阶导数连续.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$,

1) 证明若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数.

2) 证明若 $f(x)$ 非增, 则 $F(x)$ 非减.

13. a, b 取何值时, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+x^2+3, & x \leq 0, \\ ax+b, & x > 0, \end{cases}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内连续、可导?

14. 试证数列 $x_n = \frac{11 \cdot 12 \cdots (n+10)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$, $n=1, 2, \dots$, 有极限, 并求其值.

15. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right]$.

16. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt$.

17. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, ($a_i > 0, i=1, 2, \dots, n$)

18. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

19. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$.

20. 已知 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内为可导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 12} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow 12} f'(x)=992$, 求

极限

$$\lim_{x \rightarrow 12} \frac{\int_{12}^x \left\{ t \int_t^{12} f(\theta) d\theta \right\} dt}{(12-x)^3}.$$

21. 设函数序列 $f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$, a) 当 $x \geq 0$ 时, 研究 $\{f_n(x)\}$ 的收敛性, b) 证明

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 序列的收敛是一致的, c) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^2+1)f_n(x)dx$.

22. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx$, n 为正整数.

23. 设函数 $f(x)$ 处处可导, 且 $0 \leq f'(x) \leq \frac{k}{1+x^2}$, (k 为正常数) 试证由下列关系所确定的 x_n , 当 $n \rightarrow \infty$ 时有极限: $x_n = f(x_{n-1})$, x_0 任意, $n=1, 2, \dots$, 且证此极限满足 $x = f(x)$.

24. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$, ($p > 0$).

25. 设 $f(x)$ 对于 $x \geq 1$ 为非负的增函数, 证明

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n f(k);$$

当 $f(x) = \ln x$ 时, 证明不等式 $e \cdot e^{-n} \cdot n^n < n! < e \cdot e^{-n} \cdot n^{n+1}$, 由此证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{e}.$$

26. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$.

27. 设 $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

28. 按定义证明 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3-1}{t-1} = 3$.

29. 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

30. 数列 $\{a_n\}$ 由下式定义: $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$, $n=1, 3, \dots$, 设 $a_1=1$, $a_2=2$, 试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{3}.$$

31. 若 $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, ($a < b$), $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

32. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})$, $|x| < 1$.

33. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})(1-x^{\frac{1}{3}})\dots(1-x^{\frac{1}{n}})}{(1-x)^{n-1}}$

34. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}$.

35. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \dots \sin x}^{n \text{ 次}}$.

36. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$.

37. 判断 $x_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \cdots (1 + \frac{1}{2^n})$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有否极限.

38. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{\pi} \arctg \frac{1}{x})$.

39. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x < 0, \\ 5 & x = 0, \\ \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

40. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$.

41. 证明数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛.

42. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [(n^k+1)^{-\frac{1}{k}} + (n^k-1)^{-\frac{1}{k}}]$.

第二章 导数及其应用(包括中值定理)

导数是数学分析的核心内容之一. 凡是一个变量相对于另一个变量的变化问题都是导数的问题.

1. 导数定义 设 $f(x)$ 在 (a, b) 区间上定义, 若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 称这个极限值为函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的导数. 记为 $f'(x_0) = y' \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x=x_0}$ 等.

导数的几何意义是曲线上某点的切线斜率, 物理上可看作直线运动的速度.

函数可导一定连续, 连续不一定可导.

2. 导数的求法

(I) 基本初等函数的导数公式

$$\begin{aligned} (c)' &= 0, & (x^n)' &= nx^{n-1}, & (a^x)' &= a^x \ln a, \\ (e^x)' &= e^x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x} \log_a e, & (\ln x)' &= \frac{1}{x}, \\ (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, & (\operatorname{tg} x)' &= \sec^2 x, \\ (\operatorname{ctg} x)' &= -\operatorname{csc}^2 x, & (\sec x)' &= \sec x \operatorname{tg} x, & (\operatorname{csc} x)' &= -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x, \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\ (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \text{ 等.} \end{aligned}$$

(II) 求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = uv' + vu', \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

$$\text{若 } y = f(u), \quad u = \psi(x), \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

若 $y = u(x)^{v(x)}$, 可先取对数再求导数.

(III) 反函数、参数方程所表示的函数和隐函数的导数

$$\text{i, 设函数 } y = f(x), \text{ 其反函数为 } x = \psi(y), \text{ 则 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

$$\text{ii, } \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi'(t)}.$$