数学

DAXUE ZIZHU ZHAOSHENG KAOSHI

大学自主招生考试

Zhuanti Jiangxi

专题讲习

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

主　编：李善良
副主编：尤小平　张士民　蒋建华　陈向阳
编　写：王广余　王思俭　王爱斌　尤小平
史建军　朱　俊　刘　炜　杨子圣
李善良　吴启明　张士民　张　玮
陈向阳　罗会元　周敏泽　倪科技
徐　瑢　凌惠明　戴　喜
审　稿：林伟民　齐文友　李　生　李广修

数学

DAXUE ZIZHU ZHAOSHENG KAOSHI

大学自主招生考试专题讲习

凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社

书　　名　大学自主招生考试专题讲习·数学
作　　者　本书编写组
责任编辑　沙国祥
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市湖南路1号A楼　邮编 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京前锦排版服务有限公司
印　　刷　丹阳兴华印刷厂
厂　　址　丹阳市胡桥镇(邮编 212313)
电　　话　0511-86212151
开　　本　787×1092毫米　1/16
印　　张　16
版　　次　2010年7月第1版
　　　　　2010年7月第1次印刷
书　　号　ISBN　978-7-5343-9826-1
定　　价　30.00元
批发电话　025-83657791,83658558,83658511
邮购电话　025-85400774,8008289797
短信咨询　025-85420909
E-mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025-83658551

前 言

对于我国孩子来说，高考是一件大事.

过去50多年，我国高考多是全国一张试卷，重点大学、普通本科院校、专科学校都靠它招生.这样的试卷要具有各方面的兼容性，同时也有很大的局限性.随着大学自主招生的出现，学生们才多了条选择的渠道.

但选择多了，麻烦也就随之而来.大学自主招生，没有传统的考纲与模式，命题有很大"自由度".这给学生带来很大的烦恼，无法作应试准备.

然而，任何事情只要多次出现，就有一定的规律.大学自主招生命题也不例外.通过研究，可以看到：自主招生考试以中学教育中的知识板块为基础，但范围更为宽泛；自主招生考试注重考查学生综合运用知识的能力，通过这个层面来了解考生的学术潜力；自主招生考试的难度要高于普通高考，但低于数学竞赛.因此，需要帮助学生对中学阶段的知识进行系统梳理，作合理、有效的深化和拓展，对特殊的技能和技巧加以总结、研究，从而对考生给予指导和点拨.

江苏教育出版社组织一个研究小组，对目前一些自主招生试题开展研究.这项研究力图探索：近年来自主招生数学命题的趋势，自主招生数学命题的定位与背景，自主招生对高中数学教学的影响等问题，最终将研究成果汇集成书.研究小组成员来自南师附中、金陵中学、苏州中学、无锡一中、常州中学、丹阳高级中学、泰州中学、徐州一中、淮阴中学、盐城中学、新海高级中学等知名学校，他们中有特级教师和教授级高级教师，也有中青年骨干教师.

本书定位：高于高考，低于竞赛；以高考中档题为起点，避开竞赛的技巧性，关注自主招生命题的创新性；着力于思维的发展，通性通法的运用，数学本质的揭示；避免繁杂的计算训练，寻求简洁、优美的解法；不求面面俱到，只求突出核心内容；既关注高中阶段基础内容，也关注与高等数学衔接内容；是课本的延伸、补充，可以是学生自学材料，也可以是教师专题讲座材料.因此，本书不仅为那些准备参加自主招生的学生准备，同时，也为那些准备进入重点大学的学生参加普通高考准备.

本书体例：按专题式，讲座式.致力于实用、有效；按方法、解决问题的思维过程进行分类，着眼于怎样解决问题；介绍30种左右的思考方法，可以看做解题30法；以"题"(典型考题、传统精典题、重要结论)为载体，进行编写、串通，而不绝对拘泥于内容序列；着重从怎样想的、怎样寻找突破口入手；选择典型的自主招生考试题、高考题作为样例；每个专题选择能说明问题的例题6～8个，配8～10个练习题，每个专题内容为2课时(90分钟)，练习1小时；全书题量控制在500题.每个专题包括[指要][例题][练习][解答]等内容.

本书资料来源：近年的各类自主招生试卷，国内外高考数学试卷，各类竞赛试题、辅导用书，优秀的数学科普读物，优秀教材、教学辅助用书，高等数学教材，各种数学报刊，等等.

为便于查阅，本书附录了高中数学基础知识要点和大学自主招生考试中的一些常识.

本书编写组

目录

第一章 函 数

第 1 讲 函数定义

指 要

函数是高中数学的核心概念，是描述变量之间依存关系的数学模型. 函数不仅是高中数学的重要内容，也是学习高等数学的基础，因此，它是历年高考、各大学自主招生重点考查的内容.

函数概念的核心是"对应"，对应法则、定义域、值域是函数的三要素. 函数的对应关系有三种表示方法：解析法、列表法、图象法，其中解析法是最基本、最重要的表示方法.

1. *求函数解析式的常用方法*

(1) 已知函数解析式的结构求 $f(x)$时，常用待定系数法；

(2) 已知复合函数 $f(g(x))$的表达式求 $f(x)$时，常设 $t = g(x)$ 处理(注意新元 t 的取值范围)，称这种方法为换元法；

(3) 已知以 $f(x)$为元的方程形式求 $f(x)$时，常赋值，或设法构造出含 $f(x)$的另一个方程，组成方程组，解这个方程组求出 $f(x)$，称这种方法为消元法；

(4) 已知抽象的函数表达式，求某些函数的表达式或求某些函数值时，常把已知条件中的某些变量赋值；

(5) 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$(有关反函数的知识见附录 2)：

① 检查 $y = f(x)$ 是否存在反函数(一个函数有反函数的充要条件是确定这个函数的映射为一一映射)；

② 当存在反函数时，把 $y = f(x)$ 看成是关于 x 的方程，解出 $x = f^{-1}(y)$；

③ 把 x，y 互相调换，改写为 $y = f^{-1}(x)$；

④ 由 $y = f(x)$ 的值域确定反函数的定义域.

2. *求定义域的常用方法*

(1) 已知函数的解析式求自变量 x 的取值范围时，应依据函数解析式中所包含的运算对自变量的制约要求，通过解不等式(组)求得定义域；

(2) 已知 $f(x)$的定义域求复合函数 $f(g(x))$的定义域时，应依据函数 $y = f(x)$ 的对应法则 f 对作用对象的取值范围的制约要求，通过解不等式(组)求解；

(3) 解决函数的应用问题时，应认真考察自变量 x 的实际意义，规定自变量的取值范围，求得定义域.

3. *求值域的常用方法*

(1) 利用函数图象的直观性，如求二次函数、分段函数的值域；

(2) 利用导数求出函数在闭区间上的最值，得到函数的值域；

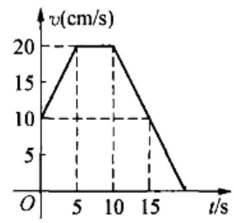
(3) 转化为基本函数，如对于某些无理函数，常用换元法将其转化为有理函数；对于某些简单的分式函数，常用分离常数，或利用基本不等式，或转化为二次方程有解（利用判别式大于或等于0）求得函数的值域；对于复合函数，可将其分解为几个基本函数后再求其值域；

(4) 对于分段函数，可分别求出各段上的值域后再求并集；

(5) 利用函数与其反函数的值域与定义域的关系得到函数的值域.

例 题

例1 如图所示为某质点在 20 s 内作直线运动时，速度函数 $v=v(t)$ 的图象，则该质点运动的总路程 $s=$________cm.（2004年同济大学）



（例 1）

分析 本题的函数关系是用图象表示的，首先要从图象中解读速度 v 与时间 t 的对应关系，然后用定积分求出位移.

解 由图象可知，速度函数 $v=v(t)$ 是分段函数，关系式如下：

$$v(t)=\begin{cases}2t+10 & (0\leqslant t\leqslant 5),\\ 20 & (5<t\leqslant 10),\\ -2t+40 & (10<t\leqslant 20).\end{cases}$$

所以在 20 s 内质点运动的总路程 $s=\int_0^5(2t+10)\mathrm{d}t+20\times 5+\int_{10}^{20}(-2t+40)\mathrm{d}t$

$=75+100+100=275(\mathrm{cm})$.

拓展 1. 函数的图象是函数对应关系的一种表示形式，它从“形”方面刻画了函数的变化规律. 通过观察认识图象，了解函数的有关性质，数形结合解决问题.

2. 对函数对应关系的考查是历年高考与各大学自主招生考试的热点，不仅考查以图象呈现的对应关系，而且考查以表格（如练习1）、解析式（如例2）形式呈现的对应关系.

例2 已知 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|$，求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)$.（2007年北京大学）

分析 本题要求50个函数值的和，显然不能先分别算出50个函数值，然后再求和，需要研究函数解析式的特征. 由于本题的函数解析式含有绝对值，因此，去掉绝对值将函数解析式化简是解题的关键.

解答 令 $x^2-53x+196=0$，则 $(x-4)(x-49)=0$，所以 $x_1=4$，$x_2=49$.

所以 $f(x)=\begin{cases}2(x^2-53x+196) & (x>49 \text{ 或 } x<4),\\ 0 & (4\leqslant x\leqslant 49).\end{cases}$

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=f(1)+f(2)+f(3)+f(50)$.

由对称性知，$f(3)=f(50)$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=f(1)+f(2)+2f(3)=288+188+184=660$.

拓展 1. 求分段函数的函数值，首先要确定自变量的所属区间，然后用该区间的函数表达式求函数值，如练习2.

2. 若函数对应关系以方程形式呈现，则需根据目标对自变量 x 适当赋值，构造方程或方程组，通过解方程或方程组求得函数值，如2005年复旦大学自主招生试题：

定义在 **R** 上的函数 $f(x)\ (x\neq 1)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{x+2\,002}{x-1}\right)=4\,015-x$，则 $f(2\,004)=$ ________.

如何赋值？先从目标开始考虑，求 $f(2\,004)$，当然先令 $x=2\,004$，则有 $f(2\,004)+2f(2)=2\,011$，显然要找 $f(2)$，故令 $x=2$，则有 $f(2)+2f(2\,004)=4\,013$，从两式中解得 $f(2\,004)=2\,005$.

类似的问题还有 2009 年四川省高考试题，见练习 3.

例 3 函数 $y=\dfrac{1}{2x}f(t-x)$，当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{t^2}{2}-t+5$，则 $f(x)=$ ________.（2003 年复旦大学保送生）

分析 由于 $x=1$ 时，$y=\dfrac{1}{2}f(t-1)$，因此"当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{t^2}{2}-t+5$"可以换一种形式，即 $\dfrac{1}{2}f(t-1)=\dfrac{t^2}{2}-t+5$，即"已知 $f(x-1)=x^2-2x+10$，求 $f(x)$"，换元即可.

解答 由于 $x=1$ 时，$y=\dfrac{1}{2}f(t-1)$，所以由题意可得 $\dfrac{1}{2}f(t-1)=\dfrac{t^2}{2}-t+5$，

令 $t-1=u$，则 $t=u+1$，$\dfrac{1}{2}f(u)=\dfrac{(u+1)^2}{2}-(u+1)+5$，

所以 $f(u)=u^2+9$，所以 $f(x)=x^2+9$.

拓展 1. 确定函数解析式还常用待定系数法，如 2000 年交通大学保送生试题，见练习 5.

2. 已知以函数方程形式呈现的式子求函数表达式，常需进行适当的变量代换，或赋值，如 2007 年上海交通大学冬令营试题，见练习 4.

例 4 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\ 1)$，则函数 $g(x)=f(x+c)+f(x-c)$ 在 $0<c<\dfrac{1}{2}$ 时的定义域为________.（2006 年复旦大学）

分析 本题 $f(x)$ 的定义域已知，求 $g(x)$ 定义域时，应依据函数 $y=f(x)$ 的对应法则 f 对作用对象的取值范围的制约要求，列不等式组求解.

解答 由题意，$\begin{cases}0<x+c<1,\\0<x-c<1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-c<x<1-c,\\c<x<1+c.\end{cases}$

因为 $0<c<\dfrac{1}{2}$，所以 $c<1-c<1$，

所以不等式组的解集即函数 $g(x)$ 的定义域为 $(c,1-c)$.

拓展 函数的定义域还可以依据函数解析式中所包含的运算对自变量的制约要求，通过解不等式（组）求得，如 2008 年湖北省高考题：函数解 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}\right)$ 的定义域是________. 解决函数的应用问题时，应注意考察自变量 x 的实际意义.

例 5 已知函数 $f(x)=\lg\left(x+\dfrac{a}{x}-2\right)$，其中 a 是大于零的常数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 当 $a \in (1, 4)$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的最小值；

(3) 若对任意 $x \in [2, +\infty)$，恒有 $f(x) > 0$，试确定 a 的取值范围.（2008 年东南大学）

分析 本题主要考查函数的定义域与最值的求法，注意对参数 a 分类讨论.

(1) 即求不等式 $x + \dfrac{a}{x} - 2 > 0$ 的解集；

(2) 应看成复合函数，先研究 $a \in (1, 4)$ 时 $g(x) = x + \dfrac{a}{x}$ 的最小值，再求 $f(x)$ 的最小值；

(3) 将问题转化为熟悉的问题："$f(x) > 0$" 即 "$x + \dfrac{a}{x} - 2 > 1$" 即 "$a > 3x - x^2$ 对任意 $x \in [2, +\infty)$ 恒成立"，需求 $(3x - x^2)$ 的最大值.

解答 (1) 由 $x + \dfrac{a}{x} - 2 > 0$ 得 $\dfrac{x^2 - 2x + a}{x} > 0$.（*）

方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 的根的判别式 $\Delta = 4(1 - a)$.

分类讨论：①当 $a > 1$ 时，$\Delta < 0$，$x^2 - 2x + a > 0$ 恒成立，由（*）知 $x > 0$.

②当 $0 < a \leqslant 1$ 时，$\Delta \geqslant 0$. $x^2 - 2x + a = [x - (1 - \sqrt{1-a})] \cdot [x - (1 + \sqrt{1-a})]$.

（*）为 $\dfrac{[x - (1 - \sqrt{1-a})] \cdot [x - (1 + \sqrt{1-a})]}{x} > 0$，

解得 $0 < x < 1 - \sqrt{1-a}$ 或 $x > 1 + \sqrt{1-a}$.

综上，当 $0 < a \leqslant 1$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(0, 1 - \sqrt{1-a}) \cup (1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 令 $g(x) = x + \dfrac{a}{x}$.

$g'(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2}$，当 $1 < a < 4$ 时，由于 $x \in [2, +\infty)$，故 $1 - \dfrac{a}{x^2} > 0$，

所以 $g(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 是增函数，

所以 $f(x)_{\min} = f(2) = \lg \dfrac{a}{2}$.

(3) **解法一** 由 $f(x) = \lg\left(x + \dfrac{a}{x} - 2\right) > 0$，得 $x + \dfrac{a}{x} - 2 > 1$，

即 $a > 3x - x^2$，对于 $x \in [2, +\infty)$ 恒成立.

而 $y = 3x - x^2$ 在 $[2, +\infty)$ 上为减函数，$\therefore y_{\max} = 2$.

所以 $a > 2$.

解法二 本题若转化为"$x + \dfrac{a}{x} - 2 > 1$"，则需求 $g(x) = x + \dfrac{a}{x}$ 的最小值.

由(2)得 $g'(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2}$，

① 若 $0 < a < 4$，则 $g'(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上恒大于 0，故 $g(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调增加.

当 $x = 2$ 时，$g(x) = x + \dfrac{a}{x}$ 取最小值 $2 + \dfrac{a}{2}$，

故 $2 + \dfrac{a}{2} - 2 > 1$，$a > 2$，$\therefore 2 < a < 4$.

② 当 $a \geqslant 4$ 时，$g(x)=x+\dfrac{a}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{a}{x}}=2\sqrt{a}$.

当 $x=\dfrac{a}{x}$，即 $x=\sqrt{a}$ 时，$[f(x)]_{\min}=\lg(2\sqrt{a}-2) \geqslant \lg 2>0$.

所以 $a \geqslant 4$ 时，对任意 $x \in [2,+\infty)$，恒有 $f(x)>0$.

综上，a 的取值范围是 $(2,+\infty)$

拓展 1. 分类讨论、等价转化是常用的数学思想方法. 本例将不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题，两种解法选择的函数不同，简繁差异很大. 由于第二种选择的函数含参数，需分类讨论，过程繁琐，因此在选择函数时，应尽量使选择的函数不带参数，可通过恒等变形将参数分离出来，如解法一.

2. 一般地，在研究复合函数的最值与值域时，常分两步：弄清复合过程，充分利用中间变量传递. 如 2004 年复旦大学保送生试题：

$y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$ 的值域是________.

此函数是 $y=2^t$ 与 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的复合，由 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$ 先求出 t 的取值范围，再根据 $y=2^t$ 求得 y 的取值范围.

有些分式函数的最值与值域问题，还可转化为二次方程是否有解的问题来处理，如例 6.

例 6 已知函数 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的最大值为 9，最小值为 1，求实数 a，b 的值. (2005 年上海交通大学)

分析 本题已知的最值条件可转化为函数 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的值域. 我们知道，一个函数的值域就是其反函数的定义域，虽然函数 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 不存在反函数，但可通过类似的方法求其值域，即求所有这样的 y，在对应关系 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 下，存在 x 与 y 对应，也即求使关于 x 的方程 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 有解的 y 的取值范围，这就是通常所称的“判别式法”.

解答 由 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$，得 $(y-a)x^2-8x+(y-b)=0$，考虑 $y \neq a$ 的情形.

$\because$ 此方程有解，$\therefore \Delta=64-4(y-a)(y-b) \geqslant 0$，

整理得 $y^2-(a+b)y+(ab-16) \leqslant 0$，且 $y=a$ 是此不等式的解.

由题意知，9，1 是方程关于 y 的方程 $y^2-(a+b)y+(ab-16)=0$ 的两个根，

$\therefore \begin{cases} a+b=10, \\ ab-16=9. \end{cases}$ 解得 $a=b=5$.

拓展 1. 对于一些分式函数，可通过换元转化为 $y=ax+\dfrac{b}{x}$ $(a>0,\ b\neq 0)$ 型，用导数或用均值不等式，可求得最值或值域，如 2008 年上海交通大学冬令营试题（练习 6）、2001 年上海交通大学联读班试题（练习 7）.

2. 对于一些无理函数，常用换元法化去根号，将其转化为有理函数或三角函数处理. 如同济大学 2003 年保送生试题：

函数 $y=2x\sqrt{2-x^2}$ 的值域是__________.

可设 $x=\sqrt{2}\cos\theta\ (\theta\in[0,\pi])$,则 $y=2\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta=2\sin 2\theta\in[-2,2]$.

例7 若 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, $g(x)=f^{-1}(x)$,则 $g\left(\dfrac{3}{5}\right)=$________.(2008年上海交通大学冬令营)

分析 即求 $f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$,这是求 $f(x)$ 的反函数的函数值,解决的思路有二:

一、先求出 $f^{-1}(x)$ 的表达式,再求函数值;

二、根据函数与反函数的关系,不求 $f^{-1}(x)$ 的表达式,而把求 $f^{-1}(a)$ 的问题等价转化为求方程 $f(x)=a$ 的解的问题来处理.

解法一 由 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 得 $y(1+2^x)=2^x-1$, $2^x(1-y)=1+y$,而 $y\neq 1$,

所以 $2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$,所以 $x=\log_2\dfrac{1+y}{1-y}\ (-1<y<1)$,

所以 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\ (x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$.

所以 $f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)=\log_2 4=2$.

解法二 由函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系可知:

求 $f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ 的值就是求方程 $f(x)=\dfrac{3}{5}$ 的解.

由 $\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=\dfrac{3}{5}$,得 $3(2^x+1)=5(2^x-1)$, $2^x=4$, $x=2$,

所以 $f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)=2$,即 $g\left(\dfrac{3}{5}\right)=2$.

拓展 函数与反函数有如下关系:

(1) 反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域. 本题中,若欲求 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的值域,可转化为求其反函数 $x=\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$ 的定义域 $\{y\mid -1<y<1\}$;

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 两函数的图象关于直线 $y=x$ 对称;

(3) 若 A, C 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域,

则 $f[f^{-1}(x)]=x\ (x\in C)$, $f^{-1}[f(x)]=x\ (x\in A)$.

利用函数与反函数的关系,可将反函数的有关问题与原函数的有关问题进行等价转化,然后再研究,如练习10、例8.

例8 已知函数 $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+a}\left(x\neq -a,\ a\neq\dfrac{2}{3}\right)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,求实数 a 的值.

分析 对“$f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称”的认识是解题的关键,由函数与其反函数的图象关系,可知“$f(x)$ 的反函数就是 $f(x)$ 本身”.

解答 由 $y=\dfrac{3x+2}{x+a}$ 得 $y(x+a)=3x+2\Rightarrow(y-3)x=-ay+2$.

若 $y=3$,则 $-3a+2=0\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$,与条件不符,所以 $y\neq3$,

则 $x=\dfrac{-ay+2}{y-3}$,所以 $f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+2}{x-3}\left(x\neq3,\ a\neq\dfrac{2}{3}\right)$.

因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,所以 $f(x)$ 的反函数就是 $f(x)$ 本身,

所以 $f(x)=f^{-1}(x)$ 对定义域内的任意 x 恒成立,

由 $\dfrac{3x+2}{x+a}=\dfrac{-ax+2}{x-3}(x\neq-a,\ x\neq3)$,

得 $(a+3)x^2+(a^2-9)x-2(a+3)=0$ 对定义域内的任意 x 恒成立,

所以 $a+3=0$,且 $a^2-9=0$,所以 $a=-3$.

拓展 1. 将函数与反函数的图象关系转化为函数的反函数就是它自身,进一步转化为代数式恒成立的关系,形数结合,形数转化,这是研究函数问题的主要方法.

2. 本题若改为选择题或填空题,可用特殊点解决. 由于 $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上,故点 $\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)$ 也在 $f(x)$ 的图象上,据此可得 $a=-3$,类似的问题如2001年复旦大学基地班试题:设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+a}$ 的反函数是自身,则常数 $a=$ ________. 由于 $\left(-1,\dfrac{1}{1-a}\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上,故 $\left(\dfrac{1}{1-a},-1\right)$ 也在 $f(x)$ 的图象上,由此得 $a=-1$ 或 2. 当 $a=2$ 时,$f(x)=\dfrac{x}{x+2}$,由于 $f(1)=\dfrac{1}{3}$,而 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{7}\neq1$,故 $a=2$ 舍去,取 $a=-1$.

练 习

1. 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

高峰时间段用电价格表		低谷时间段用电价格表	
高峰月用电量(单位:千瓦时)	高峰电价(单位:元/千瓦时)	低谷月用电量(单位:千瓦时)	低谷电价(单位:元/千瓦时)
50及以下的部分	0.568	50及以下的部分	0.288
超过50至200的部分	0.598	超过50至200的部分	0.318
超过200的部分	0.668	超过200的部分	0.388

若某家庭5月份的高峰时间段用电量为200千瓦时,低谷时间段用电量为100千瓦时,则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为________元(用数字作答). (2009年浙江省高考)

2. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x),\ x\leqslant0,\\ f(x-1)-f(x-2),\ x>0,\end{cases}$ 则 $f(2\,009)$ 的值

第一章 函数

为________.(2009 年山东省高考)

3. 已知函数 $f(x)$是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的偶函数,且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$,则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$的值是________.(2009 年四川省高考)

4. 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(3x)+f(2-3x)=6x+1$,则 $f(x)=$ ________.(2007 年上海交通大学冬令营)

5. 设三次多项式 $f(x)$满足:$f(x+2)=-f(-x)$, $f(0)=1$, $f(3)=4$,试求 $f(x)$.(2000 年上海交通大学保送生)

6. 函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$ 的最大值为________.(2008 年上海交通大学冬令营)

7. $x\in\mathbf{R}_+$,求 $f(x)=\dfrac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+x^3+\frac{1}{x^3}}$ 的最小值.(2001 年上海交通大学联读班)

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

(1) 若 $f(2)=3$,求 $f(1)$;又若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;

(2) 设有且仅有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)=x_0$.求函数 $f(x)$ 的解析表达式.(2006 年重庆市高考)

9. 设 a, b, c 是非零实数,且存在 α, β, $\gamma\in\{-1, 1\}$,使得 $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$.

(1) 若 $\alpha=\beta=\gamma$,求$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ 的值.

(2) 求 $\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)^2$ 的最小值.

10. 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是____________.(2000 年上海交通大学联读班)

第 2 讲　函数性质

指 要

函数的性质主要包括函数的奇偶性、单调性、周期性、对称性等.

1. 周期性、对称性

(1) 函数的周期性

如果存在常数 T $(T\neq 0)$,对定义域内的任意 x,都有 $f(x+T)=f(x)$,则 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.若 $f(x)$ 的周期中,存在一个最小的正数,则称它为 $f(x)$ 的最小正周期.

若周期函数 $f(x)$的周期为 T,则 $f(\omega x)$ $(\omega\neq 0)$ 是周期函数,且周期为$\dfrac{T}{|\omega|}$.

(2) 函数图象的对称性

① 如果对定义域内的任意 x,都有 $f(a-x)=f(a+x)$,则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 成轴对称;

② 如果对定义域内的任意 x，都有 $f(a-x)+f(a+x)=2b$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 成中心对称.

2. 主要方法

(1) 利用定义

定义是判定函数是否具有奇偶性、单调性、周期性的重要依据.

① 用定义判定函数的奇偶性时，可用以下等价形式：

$$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=1\ (f(x)\neq 0),$$

$$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=-1\ (f(x)\neq 0).$$

② 函数 $y=f(x)$ 是奇函数或偶函数的必要条件是其定义域在数轴上所对应的点集关于原点对称.

③ 如果要证明一个函数不具有奇偶性，则只需在定义域内找到一对非零实数 a 与 $-a$，验证 $f(a)\pm f(-a)\neq 0$ 即可.

(2) 利用函数图象

函数的性质可以通过函数的图象直观地表现出来.

① 函数的图象关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow$ 函数是偶函数；函数的图象关于原点对称 $\Leftrightarrow$ 函数是奇函数；

② 根据图象可判断函数是否有周期性，根据图象可确定函数在某一区间上的单调性.

(3) 利用导函数

可通过导函数 $f'(x)$ 的符号确定 $f(x)$ 的单调区间.

例题

例1 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $f(x)$ 的一个周期是________.
(2000 年上海交通大学联读班试题改编)

分析 由于要求出 $f(x)$ 的最小正周期，故 $f(x)$ 应是周期函数. 根据定义，需找到非零常数 T，使 $f(x+T)=f(x)$.

解答 由题意可得 $f(x+2)=\dfrac{1-f(x+1)}{1+f(x+1)}=\dfrac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$,

所以 $f(x)$ 的一个周期为 2(注：也可以是 4, 6, 8 等其他非零偶数).

拓展 若函数 $f(x)$ 满足：$f(x+a)=f(x-a)$，或 $f(x+a)=-f(x)$，或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}\ (f(x)\neq 0)$，或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}\ (f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 都是以 $2a\ (a\neq 0)$ 为周期的函数，如练习 2.

例2 函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，若对任意实数 x，有 $f(m+x)=f(m-x)$,

则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=m$ 对称.

分析 要证函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=m$ 对称,需证 $f(x)$ 的图象上任意一点关于直线 $x=m$ 对称的点还在 $f(x)$ 的图象上.

证明 设点 $P(x_0, y_0)$为函数 $y=f(x)$ 的图象上任意一点,则它关于直线 $x=m$ 的对称点为 $P_1(2m-x_0, y_0)$.

由已知得 $f(2m-x_0)=f[m+(m-x_0)]=f[m-(m-x_0)]=f(x_0)$,

即 $y_0=f(2m-x_0)=f(x_0)$.

∴ 点 P_1 也在函数 $y=f(x)$ 的图象上,得证.

拓展 如果将对称性与函数的周期性联系起来,则有下列结论:

命题 1 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$ 都对称,则 $f(x)$ 是周期函数,$2(b-a)$ 是它的一个周期.

命题 2 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的图象关于点(a, c)和 (b, c) $(b>a)$ 成中心对称,则 $f(x)$ 为周期函数,$2(b-a)$ 是它的一个周期.

命题 3 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的图象关于点(a, c)成中心对称,又关于直线 $x=b$ $(b>a)$ 成轴对称,则 $f(x)$ 是周期函数,$4(b-a)$ 是它的一个周期.

例3 证明:若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的图象关于点(a, c)成中心对称,又关于直线 $x=b$ $(b>a)$ 成轴对称,则 $f(x)$ 是周期函数,$4(b-a)$ 是它的一个周期.

分析 判断函数的周期性有两个角度,一是根据定义,需找到非零常数 T,使 $f(x+T)=f(x)$,二是根据图象.根据题设,函数 $f(x)$的图象无法画出来,故需根据定义加以判断.

证明 设 $P(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x)$ 的图象上的任一点,则它关于点(a, c) 的对称点为 $(2a-x_0, 2c-y_0)$.

点 $(2a-x_0, 2c-y_0)$ 关于直线 $x=b$ 的对称点为$(2b-2a+x_0, 2c-y_0)$,

∴ $2c-y_0=f(2b-2a+x_0)$.

又 $y_0=f(x_0)$, ∴ $f(2b-2a+x_0)=2c-f(x_0)$.

于是 $f[(4b-4a)+x_0]=f[(2b-2a)+(2b-2a+x_0)]=2c-f(2b-2a+x_0)=f(x_0)$.

即 $f[(4b-4a)+x_0]=f(x_0)$.

∴ $f(x)$为周期函数, $T=4b-4a$ 是它的一个周期.

拓展 1. 命题 1、命题 2 可用类似的方法证明.

2. 将上述命题的结论与奇偶函数图象的对称性联系起来,可得:

推论 若奇函数(或偶函数)$f(x)$的图象存在一条对称轴 $x=a$ $(a\neq 0)$(或关于点$(a, 0)$ $(a\neq 0)$ 对称),则 $f(x)$ 是周期函数.

根据以上结论,可完成练习 3.

例4 设 $F(x)=\left(1+\dfrac{2}{2^x-1}\right)f(x)$ $(x\neq 0)$ 是偶函数,且 $f(x)$ 不恒等于零,则从奇偶性看,$f(x)$ 是________.(1993 年全国高考题改编)

分析 判断函数的奇偶性一般有两种方法,一是利用定义,二是利用图象.由题设知,需根据定义或性质加以判断.

解法一 因为 $F(x)$是偶函数,所以 $F(-x)=F(x)$ $(x\neq 0)$,

即 $\left(1+\frac{2}{2^{-x}-1}\right)f(-x)=\left(1+\frac{2}{2^{x}-1}\right)f(x)$,

整理得 $\frac{1+2^x}{1-2^x}f(-x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}f(x)$,

当 $x\neq 0$ 时,$\frac{2^x+1}{2^x-1}\neq 0$, $f(x)$ 不恒等于 0,

所以 $f(-x)=-f(x)$,又 $f(x)$ 不恒等于零,故 $f(x)$ 是奇函数.

解法二 由题设得 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}F(x)\ (x\neq 0)$, $F(-x)=F(x)$,

所以 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}F(-x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}F(x)=-f(x)\ (x\neq 0)$,

又 $f(x)$不恒等于零,故 $f(x)$是奇函数.

拓展 1. 函数奇偶性有如下性质:奇函数与奇函数的积是偶函数,偶函数与偶函数的积是偶函数.

根据这一性质,本题还可以这样判定:

因为 $F(x)$是偶函数,故只须判断 $u=1+\frac{2}{2^x-1}$ 的奇偶性即可.

因为 $u=1+\frac{2}{2^x-1}$ 是奇函数(上述过程已判断),故 $f(x)$ 也是奇函数.

2. 在用定义判定函数奇偶性时,有时用定义的等价形式更为方便,如 2002 年复旦大学基地班试题:

从奇偶性看:函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是________.

因为 $f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln 1=0$,

所以 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

有时采用等价形式 $f(x)+f(x)=0$ 方便的原因是,通过代数式变形,将寻求 $f(-x)$, $-f(x)$ 之间的关系转化为通过运算判断 $f(-x)+f(x)$ 的运算结果与 0 的关系.

例 5 定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数 $g(x)$和一个偶函数 $h(x)$之和,如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$, $x\in(-\infty,+\infty)$,那么 ( )

A. $g(x)=x$, $h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

B. $g(x)=\frac{1}{2}\lg[(10^x+1)+x]$, $h(x)=\frac{1}{2}\lg[(10^x+1)-x]$

C. $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

D. $g(x)=-\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

分析 本题可以根据题设,分别对每一个选择支进行验算,检查其是否符合要求;也可以将 $g(x)$与 $h(x)$看成未知数,利用"方程思想"求解.

解法一 注意观察四个选项中的每两个函数,容易发现 C 中 $g(x)=\frac{x}{2}$ 为奇函数,

且 $h(-x)=\lg(10^{-x}+1)+\frac{x}{2}=\lg\frac{1+10^x}{10^x}+\frac{x}{2}=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}=h(x)$,