

普通高等教育规划教材

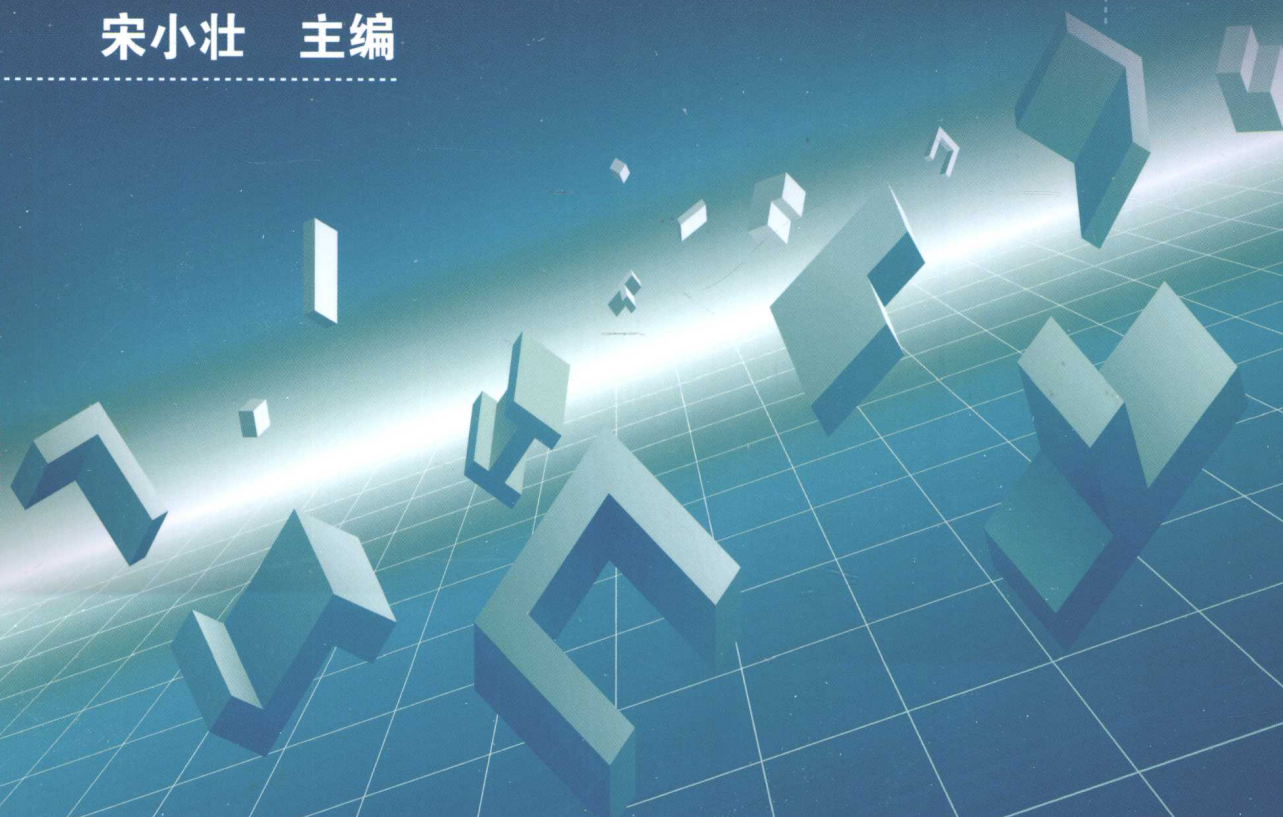
工程力学



附光盘

GONGCHENG LIXUE

宋小壮 主编



化学工业出版社

普通高等教育规划教材

工 程 力 学

			宋小壮	主 编
陈 平	于苏民	陈 敏	副主编	
	徐道远	王向东	主 审	



化学工业出版社

· 北 京 ·

本教材按大学本科 70~90 学时教学用编写的,也适合高职高专教学(但学时数应适当增加)。涵盖了理论力学、材料力学和结构力学中与工程实际紧密相关的主要内容。

全书共十章,主要内容有静力学分析基础、力系的平衡问题、静定结构的内力分析、构件失效分析基础、杆件的应力与强度计算、静定结构的位移计算与刚度问题、压杆稳定、超静定问题的基本解法、点和刚体的平面运动、动力学基础。

本书可作为大学本科中、少学时及高职高专各专业工程力学(或理论力学、材料力学、建筑力学和结构力学)课程的教材,亦可供各类成人教育及工程技术人员自学或参考用。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学/宋小壮主编. —北京:化学工业出版社,
2010.6

普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-122-08449-1

I. 工… II. 宋… III. 工程力学 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 078661 号

责任编辑:李仙华 王文峡
责任校对:陈 静

装帧设计:韩 飞

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装:大厂聚鑫印刷有限责任公司

787mm×1092mm 1/16 印张 16 $\frac{3}{4}$ 字数 444 千字 2010 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:33.00 元

版权所有 违者必究

前 言

本教材是根据大学本科“工程力学”安排为中、少学时的各专业并兼顾到高职高专教学要求编写的。适合于70~90学时（高职高专应略放宽）教学用。

本教材涵盖了理论力学、材料力学和结构力学中与工程实际紧密相关的主要内容，并在体系上融为一体，使学习更为流畅，有效地提高教学效率，加强了应用的针对性。根据目前实际情况，降低了对学习者知识基础的要求，即使没掌握高等数学和大学物理的学习者一样可以完成工程力学的学习。

教材中内容丰富，以便各专业选用，不同的专业可根据需要决定取舍内容。近机械类应突出构件的分析以及机构的运动和动力问题。近土木类应突出构件和结构的静力分析。每章后附有小结、思考题和习题，书末附有大部分习题答案。为更好地为教学服务，书中附有教学光盘，除涵盖教材中教学内容还有一定数量的补充例题，并有大量的图片和动画，供教学和课后复习使用。

本书承蒙河海大学徐道远教授和王向东教授审阅，由宋小壮主编，陈平、于苏民、陈敏副主编。参加本书编写的人员还有黄平、鲁明亮、童世虎、金仁超、钱晓琳、唐明文。

书中难免有不足之处，欢迎大家批评指正。

编 者
2010年4月

目 录

引言	1
第一章 静力学分析基础	3
第一节 力与力偶	3
一、力	3
二、力的投影	4
三、力矩	6
四、力偶	7
第二节 受力分析基础	9
一、荷载的分类与简化	9
二、力学计算简图作法要点	11
三、约束与约束力	12
四、受力分析与受力图	15
小结	17
思考题	18
习题	18
第二章 力系的平衡问题	22
第一节 平面力系的简化	22
一、力的平移	23
二、平面力系向一点的简化	24
第二节 平面力系的平衡	24
一、平衡条件	24
二、平衡方程	24
三、平面力系的几个特殊情况	26
第三节 物体系统的平衡	29
* 第四节 考虑摩擦的平衡问题	32
一、滑动摩擦	32
二、考虑滑动摩擦时的平衡问题	35
三、滚动摩擦简介	36
* 第五节 空间力系平衡的介绍	37
一、力在空间坐标轴上的投影	37
二、力对轴的矩	38
三、平衡方程	39
第六节 重心、质心和形心的概念及坐标	42
一、重心的概念及坐标	42
二、质心的概念及坐标	43
三、形心的概念及坐标	43
四、重心和形心位置的求法	43
小结	45

思考题	46
习题	47
第三章 静定结构的内力分析	56
第一节 内力计算基础	56
一、变形固体的基本假设	56
二、内力	56
三、杆件的基本变形	56
四、内力的形式	57
第二节 轴向拉(压)杆的内力	57
一、轴力	57
二、轴力图	59
第三节 扭转杆件的内力	59
第四节 静定单跨梁的内力	60
一、基本概念	60
二、剪力和弯矩	61
三、剪力图和弯矩图	65
第五节 静定多跨梁和刚架的内力分析	71
一、概述	71
二、内力分析	71
第六节 平面静定桁架的内力分析	76
一、概述	76
二、内力分析	77
小结	80
思考题	81
习题	81
第四章 构件失效分析基础	89
第一节 应力、应变、胡克定律	89
一、应力	89
二、应变	89
三、胡克定律	91
第二节 材料拉伸和压缩时的力学性能	92
一、低碳钢在拉伸时的力学性能	92
二、铸铁在拉伸时的力学性能	94
三、材料在压缩时的力学性能	94
第三节 应力状态分析介绍	94
一、点的应力状态	94
二、平面应力状态分析	95
三、广义胡克定律	99
* 第四节 构件的强度失效及强度理论	101
一、强度失效	101
二、强度条件	101
三、四种常见的强度理论和判别准则介绍	102
第五节 截面图形的几何性质和质点系惯性性质	103

一、面积矩	103
二、惯性矩和极惯性矩	103
三、转动惯量	103
四、惯性半径和回旋半径	104
五、惯性矩和转动惯量的平行移轴公式	105
小结	107
思考题	107
习题	107
第五章 杆件的应力与强度计算	111
第一节 轴向拉压杆的应力与强度	111
一、轴向拉压杆横截面上的应力	111
二、轴向拉压杆的强度条件	111
三、轴向拉压杆的强度计算	111
四、应力集中	113
第二节 连接件的实用计算	113
一、剪切的实用计算	114
二、挤压的实用计算	114
第三节 圆轴扭转时的应力与强度	117
一、圆轴扭转时的应力	117
二、圆轴的强度计算	119
第四节 梁弯曲时的应力和强度	119
一、梁纯弯曲时的应力	119
二、梁弯曲时正应力强度计算	121
三、梁的合理截面	122
四、梁弯曲时切应力及切应力强度计算介绍	123
五、梁的主应力迹线介绍	126
第五节 组合变形杆件的强度计算	126
一、组合变形杆件的计算方法	126
二、拉伸（压缩）与弯曲组合的强度计算	126
三、两相互垂直平面的弯曲	128
四、弯曲与扭转组合变形的强度计算	129
小结	130
思考题	131
习题	132
第六章 静定结构的位移计算与刚度问题	138
第一节 轴向拉（压）杆的变形	138
第二节 圆轴扭转时的变形与刚度计算	139
一、圆轴扭转时的变形计算	139
二、圆轴扭转时的刚度计算	140
第三节 静定结构的位移计算	141
一、功、广义力、广义位移	141
二、虚功原理	142
三、单位荷载法	142

四、图乘法	144
第四节 单跨静定梁的变形与刚度计算	149
一、挠度和转角	149
二、叠加法求梁的位移	149
三、梁的刚度条件	152
四、提高梁承载能力的措施	152
小结	154
思考题	154
习题	155
第七章 压杆稳定	159
第一节 压杆的失稳失效	159
一、失稳的概念	159
二、和临界荷载有关的因素	159
三、临界应力	160
四、临界应力的计算公式	161
第二节 压杆的稳定条件	162
一、稳定条件	162
二、折减因数法	162
三、压杆的稳定性计算	163
四、提高压杆承载能力的途径	166
小结	167
思考题	168
习题	168
第八章 超静定问题的基本解法	172
第一节 超静定问题及其解法原理	172
第二节 力法	173
一、力法原理	173
二、力法典型方程	175
第三节 力法应用举例	176
第四节 超静定结构中的特殊问题	180
一、支座移动时超静定结构的内力计算	180
二、装配应力	181
三、温度应力	182
小结	183
思考题	183
习题	184
第九章 点和刚体的平面运动	187
第一节 点的运动	187
一、点在直线上的运动	187
二、点的曲线运动	189
第二节 刚体的平动和定轴转动	193
一、刚体的平行移动	193
二、刚体绕定轴转动	194

第三节 点的合成运动	197
一、点的合成运动概念	197
二、点的速度合成定理	198
第四节 刚体的平面运动	200
一、刚体平面运动的运动方程	200
二、平面图形上各点的速度	202
第五节 平面体系的几何组成分析	206
一、结构组成的几何规则	206
二、结构组成分析方法	209
三、体系的几何组成与静定性的关系	211
小结	211
思考题	212
习题	213
第十章 动力学基础	218
第一节 质点与刚体的动力学方程	218
一、动力学基本方程	218
二、质点与刚体平动的运动微分方程	218
三、刚体定轴转动的动力学方程	219
第二节 动静法	220
一、惯性力的概念	220
二、达朗贝尔原理	221
三、刚体惯性力系的简化	223
四、质点系动静法	224
五、构件作匀加速直线运动或匀速转动时的应力计算	225
第三节 动能定理	228
一、常见力的功	228
二、动能	229
三、动能定理	231
第四节 冲击应力	232
一、冲击的概念	232
二、冲击应力计算	233
三、提高构件承受冲击能力的措施	234
小结	234
思考题	234
习题	235
附录	240
附录一 型钢规格表	240
附录二 习题参考答案	246
参考文献	258

引 言

工程力学是属于经典力学范畴内偏重于工程应用的一门技术基础课程。力学作为一门基础的自然学科，是人类认识世界、改造世界的锐利武器。它形成了一套朴素的辩证唯物论的严谨思想体系，是人类文明中一颗璀璨的明珠。因此学习力学对形成辩证唯物论世界观是非常有利的，对学习者的思维训练也是极有益的，通过力学的学习可以培养严谨、理性的思维习惯。

工程是包括机械、航空、建筑、道路桥梁、水利等国计民生的领域，工程力学是各类工程实施的理论基础，通过学习可以逐步形成工程理念，同时只有学好了工程力学才能真正为掌握好各类工程的专业知识奠定基础，才能不断地更新专业知识。

工程力学在工程各专业文化基础课与专业课教学中，起着承上启下的关键作用。大量的事实证明，只有学好了本课程才可能具备良好的工程素质，才能在工作现场用理性的思维解决千变万化的工程实际问题。

工程中各种各样的建筑物、机械等承受外力作用的部分，都是由若干构件或零件按照一定的规律组合而成的，称为结构（图 0-1）。结构和构件就是工程力学的研究对象。

物体在空间的位置随时间的改变，称为机械运动，例如车辆的行驶、机器的运转等。在绝大多数工程问题中，都把地球作为参考体。若物体相对于地球静止或做匀速直线运动，则称物体是平衡的。平衡是机械运动的特殊状态。探求物体的平衡和运动规律是工程力学的一项重要任务。

工程结构和构件受力作用而丧失正常功能的现象，称为失效。在工程中，要求构件和结构必须安全正常地工作而不能发生失效；同时又要求构件和结构在工程中经济节约，外形美观。三者如何有机的统一，是工程力学的另一项重要任务。

理论分析、试验分析和计算分析是工程力学中三种主要的研究方法。理论分析是以基本概念和定理为基础，经过数学推演，得到问题的解答。它是广泛使用的一种方法。工程力学的基本概念和定理都是以试验为基础，构件的失效与所选材料的力学性能有关。材料的力学性能是材料在力的作用下，抵抗变形和破坏等表现出来的性能，它必须通过材料试验才能测定。另外，对于现有理论还不能解决的某些复杂的工程力学问题，有时要依靠试验方法加以解决。试验分析方法在工程力学中既是理论分析的基础，同时又与理论分析互为补充。因此，试验分析方法在工程力学中占有重要的地位。随着计算机技术的飞速发展，工程力学的计算手段发生了根本性变化，使计算得到简化，例如几十层的高层建筑的结构计算，现在仅用几小时便得到全部结果。不仅如此，在理论分析中，可以利用计算机得到难于导出的公式或不便于用公式进行的计算；在试验分析中，计算机可以整理数据、绘制试验曲线，选用最

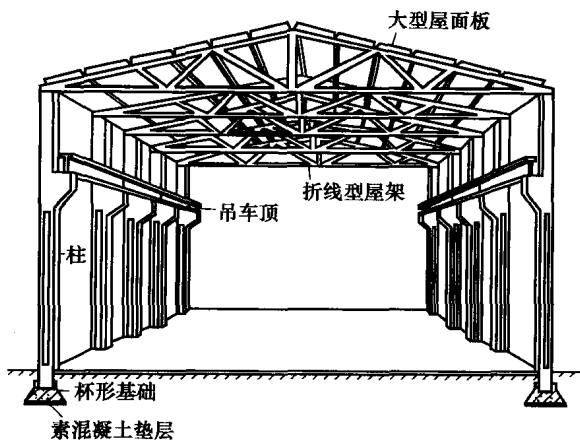


图 0-1 单层厂房结构

优参数，甚至可以模拟试验，得出试验结果，包括在试验室无法进行的试验等。计算机分析已成为一种独特的研究方法，其地位将越来越重要。应该指出，上述工程力学的三种研究方法是相辅相成、互为补充、互相促进的。学习工程力学首先应掌握好传统的理论分析与试验分析方法，因为它是进一步学习工程力学其他内容以及掌握计算机分析方法的基础。

工程力学并不是高深莫测的，在生活的方方面面都有许多力学问题，我们只不过自觉或不自觉地在运用力学规律。在学习工程力学时，必须理论联系实际，遇到实际问题尽量用学到的理论加以定性或定量的解释。如遇到实际问题能自觉地使用学到的力学知识，常常可以很大程度上提高工作效率。身边随手找到的物品如纸张、小木棒、粉笔等都可以用来进行力学小实验，而通过这些小实验可以激发创新意识，对今后的生活和工作会有很大帮助。学习土木工程力学应重视运算能力的提高，很多工程最终是要用数据来表达的，因而运算能力是一名工程技术人员应具备的重要素质之一。因此，认真完成一定数量的习题是必不可少的。

第一章 静力学分析基础

第一节 力与力偶

一、力

1. 力的概念

人们对力的认识是在长期的生活实践中逐步形成的，用手提起重物时，手臂的肌肉会感到紧张，我们说手臂正在用力。而手臂所起的作用也可以用其他物体来代替，比如，手可以拿住重物，绳子也可以拴住重物，对重物两者的效果完全一样，这说明如人对物体有力的作用，物体之间也有力的作用。物体之间可以互相影响或称为作用，这类的作用称为力。这样可以不注重研究对象具体受哪个物体作用，而由问题的共同特征，注重研究对象所受的力。力作用在物体上就一定会产生某种效果或称为效应。如用足够的力推静止的小车，小车就会运动起来；用力拉弹簧，弹簧就会变形等。因此，在力学中所讲的力是：

力是物体之间的相互机械作用，这种作用使物体的运动状态发生变化（运动效应），或者使物体的形状发生改变（变形效应）。

力对物体的作用会产生两种效应：**运动效应**和**变形效应**。其中运动效应可以分解成**移动效应**和**转动效应**两种。例如在打乒乓球时，为造成对手接球困难，通常打出各种旋转的球，需要通过在击球时，使球向前运动的同时还需使球绕球心转动。前者为移动效应，后者为转动效应。

为了抓住研究问题的共性，仅关注力的效应，至于产生力的原因不在本学科的研究范围。也就是说，对同一物体产生相同效应的力都是可以相互替代的，称为**等效**。那么力的什么因素与对物体产生的效应有关？同一重物，力气小的人可能抬不动，换一个力气大的人就可能将其搬开，这说明力的大小与对物体产生的效应有关。一个人用同样大但方向相反的力去推门，其结果，门一个是开，一个是关，这说明力的方向与对物体产生的效应有关。图 1-1 (a) 是用两个大小相同方向相反的力 F 去拉一根绳子，此时绳子是直的。如将这两个力位置互换，也就是这两个力的作用位置发生改变如图 1-1 (b) 所示，此时，绳子就不可能是直的了，这说明力的作用位置与对物体产生的效应有关。

实践表明，力对物体的效应取决于力的**大小**、**方向**和**作用点**三个要素，称为力的**三要素**。也就是说，某一物体只要所受到的力其三要素相同，结果是一样的，与谁施加的力无关。

要准确的描述力的大小，就必须有力的单位。按照国家规定，我国使用的是国际单位制 (SI)，力的单位为牛顿 (N)。工程实际中也常采用牛顿的倍数单位千牛 (kN)， $1\text{kN}=10^3\text{N}$ 。

作用于一个物体上的两个或两个以上的力所组成的系统（一群力），称为**力系**。对物体

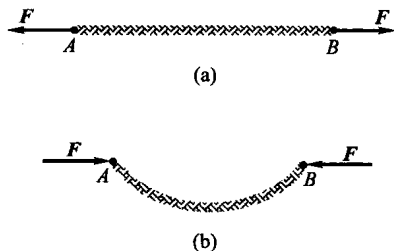


图 1-1 力作用位置对效应的影响

作用效果相同的力系,称为等效力系。如果一个力和一个力系等效,则该力为此力系的合力,而力系中的各个力称为这个力的分力。

2. 力的性质

力是一个有大小和方向的量,所以力是**矢量**,可以用一段带箭头的线段来表示,线段的长短代表大小,箭头表示力的指向(图 1-2)。规定用黑体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量,而用普通字母 F 表示力的大小。图 1-2 中力的大小可表示为 $F=150\text{N}$ 。通过力的作用点并沿着力的方向作一条直线,这条直线称为力的作用线。

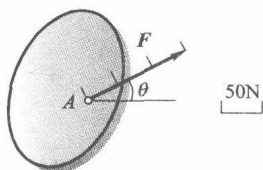


图 1-2 力矢量

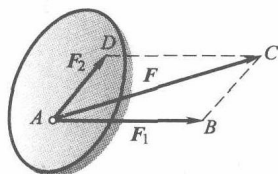


图 1-3 两力合成

实践表明,作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个合力,合力也作用于该点,合力的大小、方向由这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示。图 1-3 中作用于 A 点的两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,由这两个力为邻边所构成的平行四边形 ABCD 的对角线 AC 由 A 到 C 的箭头为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$ 。这一性质称为力的平行四边形法则,可用矢量式 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 表示。即两个交于一点力的合力,等于这两个力的矢量和;反过来,一个力也可以依照力的平行四边形法则,按指定方向分解成两个分力。平行四边形法则也适合其他矢量进行和的运算,如速度和加速度。

同理,作用于物体上同一点的 n 个力组成的力系,多次采用两两合成的方法,最终可合成为一个合力 $\boldsymbol{F}_R$,它等于这个力系中所有力的矢量和。

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{F}_i=\sum\boldsymbol{F} \quad (1-1)$$

即 n 个力交于一点,则可以合成为一个合力,合力的作用线通过原力系的交点 ($\sum\boldsymbol{F}$ 是 $\sum_{i=1}^n\boldsymbol{F}_i$ 在力学中的简化表示)。

由于力是物体间的相互作用,力的产生必定牵涉两个相互作用的物体,当一个物体受到另一个物体作用的同时,此物体也对另一个物体产生作用。这种两物体间相互作用的力,总是大小相等、方向相反、沿同一直线,分别作用在这两个物体上。这一性质称为力的作用与反作用定律(在物理学中称为牛顿第三定律)。

作用在同一物体上的两个力如大小相等、方向相反、沿同一直线[图 1-1(a)],那么这两个力对物体的运动效应没有影响,则物体是平衡的;反过来,一物体上只作用了两个力,而此时物体是平衡的,那么这两个力必定大小相等、方向相反、沿同一直线。这一性质称为二力平衡原理(或二力平衡公理)。

物体在一个力系作用下处于平衡状态,则称这个力系为平衡力系,在平衡力系作用下的物体不产生运动效应。因此,可知一物体上增加或减去一个平衡力系,不改变物体的运动状态。这一性质称为加减平衡力系原理(或加减平衡力系公理)。

以上很多内容是学习工程力学的基本原理。

二、力的投影

前面提到力是矢量,而矢量运算比较繁琐,如求矢量和就要用到平行四边形法则。为了便于计算,在力学计算中常常通过力在直角坐标轴上的投影将矢量运算转化为代数运算,这

是必须掌握好的运算基本功。

1. 力在直角坐标轴上的投影

如图 1-4 所示, 在力 F 作用的平面内建立直角坐标系 Oxy 。由力 F 的起点 A 和终点 B 分别向 x 轴引垂线, 垂足分别为 x 轴上的两点 A' 、 B' , 则线段 $A'B'$ 称为力 F 在 x 轴上的投影, 用 F_x 表示, 即

$$F_x = \pm A'B'$$

投影的正负号规定如下: 若从 A' 到 B' 的方向与轴正向一致, 投影取正号; 反之取负号, 力在坐标轴上的投影是代数量。同样, 力 F 在 y 轴上的投影 F_y 为

$$F_y = \pm A''B''$$

由图 1-4 可得

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \pm F \cos \alpha = \pm F \sin \beta \\ F_y &= \pm F \sin \alpha = \pm F \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 α 为力与 x 轴所夹的锐角, 图 1-4 中 F_1 、 F_2 是力 F 沿直角坐标轴方向的两个分力, 是矢量。它们的大小和力 F 在轴上投影的绝对值相等, $F_1 = |F_x|$; $F_2 = |F_y|$, 而投影的正(负)号代表了分力的指向和坐标轴的指向一致(或相反), 这样投影就将分力大小和方向表示出来了, 从而将矢量运算转化成了代数运算。在后面的运算中, 也常常利用投影和沿直角坐标轴方向两力的关系, 确定这两力的大小, 将一个力分解成两个相互垂直的分力, 称为力的正交分解, 是运算中常采用的方法, 必须熟练掌握。

为了计算方便, 往往先根据力与某轴所夹的锐角来计算力在该轴上投影的绝对值, 再由观察来确定投影的正负号。

【例 1-1】 试分别求出图 1-5 中各力在 x 轴和 y 轴上投影。已知 $F_1 = 100\text{N}$, $F_2 = 150\text{N}$, $F_3 = F_4 = 200\text{N}$, 各力方向如图 1-5 所示。

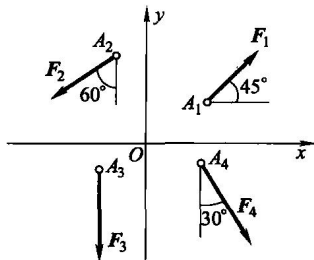


图 1-5 力的投影

解 由式 (1-2) 可得出各力在 x 、 y 轴上的投影为

$$F_{1x} = F_1 \cos 45^\circ = 100\text{N} \times 0.707 = 70.7\text{N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 45^\circ = 100\text{N} \times 0.707 = 70.7\text{N}$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos 30^\circ = -150\text{N} \times 0.866 = -129.9\text{N}$$

$$F_{2y} = -F_2 \sin 30^\circ = -150\text{N} \times 0.5 = -75\text{N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0$$

$$F_{3y} = -F_3 \sin 90^\circ = -200\text{N} \times 1 = -200\text{N}$$

$$F_{4x} = F_4 \cos 60^\circ = 200\text{N} \times 0.5 = 100\text{N}$$

$$F_{4y} = -F_4 \sin 60^\circ = -200\text{N} \times 0.866 = -173.2\text{N}$$

反过来, 如已知一个力在直角坐标系的投影, 可以求出这个力的大小和方向。由图 1-4 可知:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \alpha &= \arctan \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

其中, 取 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, α 代表力 F 与 x 轴的夹角, 具体力的指向可通过投影的正负值来判定, 如图 1-6 所示, 此法也常用于其他矢量运算。

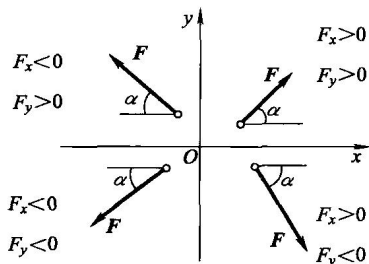


图 1-6 力方向的判断

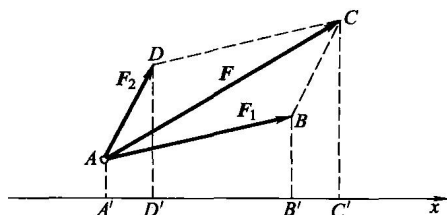


图 1-7 合力投影定理证明

2. 合力投影定理

由于力的投影是代数量，所以各力在同一轴的投影可以进行代数运算，由图 1-7 不难看出，由 F_1 与 F_2 的和组成力系的合力 F 在任一坐标轴 (x 轴) 上的投影 $F_x = A'C' = A'B' + B'C' = A'B' + A'D' = F_{1x} + F_{2x}$ ，对于多个力组成的力系以此推广，可得合力投影定理：合力在直角坐标轴上的投影 (F_{Rx} , F_{Ry}) 等于各分力在同一轴上投影的代数和。即

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum F_y \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

如果将各个分力沿直角坐标轴方向进行分解，再对平行于同一坐标轴的分力进行合成 (方向相同的相加，方向相反的相减)，可以得到合力在该坐标轴方向上的分力 (F_{Rx} , F_{Ry})。可以证明，合力在直角坐标系坐标轴上的投影 (F_{Rx} , F_{Ry}) 和合力在该坐标轴方向上的分力 (F_{R1} , F_{R2}) 大小相等，而投影的正 (负) 号代表了分力的指向和坐标轴的指向一致 (相反)。

【例 1-2】 试分别求出图 1-8 中各力的合力在 x 轴和 y 轴上投影。已知 $F_1 = 20\text{kN}$, $F_2 = 40\text{kN}$, $F_3 = 50\text{kN}$, 各力方向如图 1-8 所示。

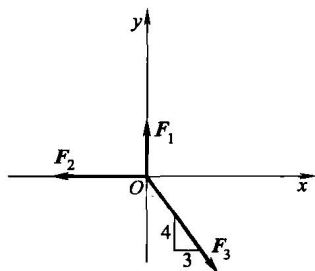


图 1-8 合力的投影

解 由式 (1-4) 可得出各力的合力在 x 、 y 轴上的投影为

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x = F_1 \cos 90^\circ - F_2 \cos 0^\circ + F_3 \times \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= 0 - 40\text{kN} + 50\text{kN} \times 0.6 = -10\text{kN} \\ F_{Ry} &= \sum F_y = F_1 \sin 90^\circ + F_2 \sin 0^\circ - F_3 \times \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= 20\text{kN} + 0 - 50\text{kN} \times 0.8 = -20\text{kN} \end{aligned}$$

三、力矩

1. 平面问题中力对点之矩

在生活中，常常遇到物体转动的问题，如图 1-9 所示，用扳手拧紧螺母时，作用于扳手上的力 F 使扳手绕 O 点转动，使扳手和螺母绕 O 点旋转。在此， O 点称为矩心。力对物体的转动效应不仅与力的大小和方向有关，而且与矩心 O 点到力作用线的垂直距离 d 有关。将乘积 $F \cdot d$ 再冠以适当的正、负号对应力绕矩心 O 点的转向，称为力 F 对 O 点的矩，简称力矩，它是力 F 使物体绕矩心 O 点转动效应的度量，用 $M_O(F)$ 表示，即

$$M_O(F) = \pm F \cdot d \quad (1-5)$$

式中 d 称为力臂。式中的正负号用来区别力 F 使物体绕矩心 O 点转动的方向，规定力

F 使物体绕矩心 O 点逆时针转动时为正, 反之取负号。

力矩在下列两种情况下等于零: 力等于零或力的作用线通过矩心 (即力臂等于零)。

当力沿作用线移动时, 不会改变它对矩心的力矩。这是由于力的大小、方向及力臂的大小均未改变的缘故。

力矩的单位常用 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$, 有时为运算方便也采用 $\text{N} \cdot \text{mm}$ 的单位。其中 $1\text{kN} \cdot \text{m} = 10^3 \text{N} \cdot \text{m} = 10^6 \text{N} \cdot \text{mm}$ 。

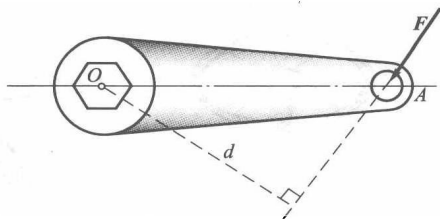


图 1-9 力矩的定义

【例 1-3】 如图 1-10 所示, 当扳手分别受到 F_1 、 F_2 、 F_3 作用时, 求各力分别对螺帽中心 O 点的力矩。已知 $F_1 = F_2 = F_3 = 100\text{N}$ 。

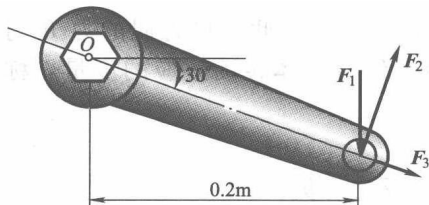


图 1-10 扳手上的力矩

解 根据力矩的定义可知

$$\begin{aligned} M_O(F_1) &= -F_1 \cdot d_1 = -100\text{N} \times 0.2\text{m} = -20\text{N} \cdot \text{m} \\ M_O(F_2) &= F_2 \cdot d_2 = 100\text{N} \times 0.2\text{m} / \cos 30^\circ = 23.1\text{N} \cdot \text{m} \\ M_O(F_3) &= F_3 \cdot d_3 = 100\text{N} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

2. 合力矩定理

由于一个力系的合力产生的效应是和力系中各个分力产生的总效应是一样的。因此, 合力对平面上任一点的矩等于各分力对同一点的矩的代数和。这就是合力矩定理。即

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum_{i=1}^n M_O(F_i) \quad (1-6)$$

【例 1-4】 如图 1-11 所示每 1m 长挡土墙所受土压力的合力为 F_R , 如 $F_R = 150\text{kN}$, 方向如图 1-11 所示。求土压力使墙倾覆的力矩。

解 土压力 F_R 可使挡土墙绕 A 点倾覆, 故求土压力 F_R 使墙倾覆的力矩, 就是求 F_R 对 A 点的力矩。由已知尺寸求力臂 d 不方便, 但如果将 F_R 分解为两分力 F_1 和 F_2 , 则两分力的力臂是已知的, 故由式 (1-6) 可得

$$\begin{aligned} M_A(F_R) &= M_A(F_1) + M_A(F_2) = F_1 \cdot h/3 - F_2 \cdot b \\ &= 150\text{kN} \times \cos 30^\circ \times 1.5\text{m} - 150\text{kN} \times \sin 30^\circ \times 1.5\text{m} \\ &= 82.4\text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

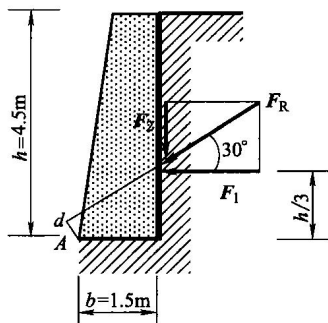


图 1-11 挡土墙

四、力偶

1. 力偶的概念

在日常生活和工程中, 经常会遇到物体受大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力作用的情形。例如, 汽车司机用双手转动方向盘 [图 1-12 (a)], 钳工用丝锥攻螺纹 [图 1-12 (b)], 以及用拇指和食指拧开水龙头或钢笔帽等。实践证明, 这样的两个力 F 、 F' 组成的力系对物体只产生转动效应, 而不产生移动效应, 把这种力系称为力偶, 用符号 (F, F') 表示。

组成力偶的两个力 F 、 F' 所在的平面称为力偶的作用面, 力偶的两个力作用线间的垂直距离称为力偶臂, 用 d 表示。

在力偶作用面内任取一点 O 为矩心, 如图 1-13 所示。设点 O 与力 F 作用线之间的垂直

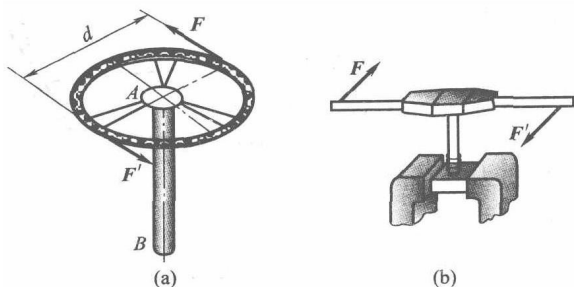


图 1-12 力偶的实例

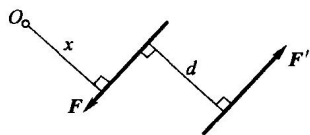


图 1-13 力偶

距离为 x ，力偶臂为 d ，则力偶的两个力对 O 点之矩的和为

$$-Fx + F'(x+d) = F \cdot d$$

这一结果表明，力偶对作用面内任意一点的矩与点的位置无关。因此，将力偶的力 F 与力偶臂 d 的乘积冠以适当的正负号对应力偶的转向，作为力偶对物体转动效应的度量，称为**力偶矩**，用 M 表示，即

$$M = \pm F \cdot d \quad (1-7)$$

式中的正负号规定为：力偶的转向是逆时针时为正，反之为负。

力偶矩的单位与力矩的单位相同，常用 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

2. 力偶的性质

力偶作为一种特殊力系，具有如下独特的性质：

性质 1. 力偶对物体只产生转动效应，而不产生移动效应。因此，一个力偶既不能用一个力代替，也不能和一个力平衡（力偶在任何一个坐标轴上的投影等于零）。力与力偶是表示物体间相互机械作用的两个基本元素。

性质 2. 力偶对物体的转动效应，用力偶矩度量而与矩心的位置无关。

如果在同一平面内的两个力偶，它们的力偶矩彼此相等，则这两个力偶等效。

性质 3. 在保持力偶矩大小和力偶转向不变的情况下，力偶可在其作用面内任意搬移，或者可任意改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，力偶对物体的转动效应不变。

根据这一性质，可在力偶作用面内用 $M \curvearrowright$ 或 $M \curvearrowleft$ 表示力偶，其中箭头表示力偶的转向， M 则表示力偶矩的大小。

必须指出，力偶在其作用平面内移动或用等效力偶替代，对物体的运动效应没有影响，但会影响变形效应。

3. 平面力偶系的合成

设在物体某平面内作用两个力偶 M_1 和 M_2 [图 1-14 (a)]，任选一线段 $AB = d$ 作为公共力偶臂，将力偶 M_1 、 M_2 移动，并把力偶中的力分别改变为

$$F_1 = F'_1 = M_1/d \quad F_2 = F'_2 = -M_2/d$$

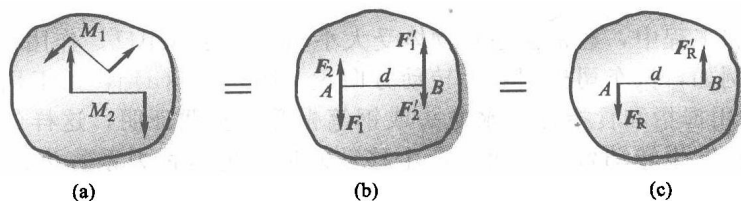


图 1-14 力偶合成

如图 1-14 (b) 所示。根据性质 3，图 1-14 (a) 与图 1-14 (b) 中，力偶作用是等效的。于是，力偶 M_1 与 M_2 可合成为一个合力偶 [图 1-14 (c)]，其力偶矩为