

丘成桐主编
数学翻译丛书

VORLESUNGEN ÜBER DIE
ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK
IM 19. JAHRHUNDERT
(TEIL I)

F. 克莱因 著 齐民友 译

数学在19世纪
的发展 (第一卷)



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

011
33
21

丘成桐主编
数学翻译丛书

数学在19世纪的发展

(第一卷)

Shuxue Zai 19 Shiji De Fazhan

F. 克莱因 著 齐民友 译

011/33
:1
2010

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

 高等教育出版社 · 北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

内容提要

本书是 F. 克莱因的名著, 其内容是作者在临终前一两年给部分同事所作的讲演, 而由他的学生们编辑成书。书中介绍了数学科学在 19 世纪的发展。在本卷 (第一卷) 非常详尽且有批判性地分析了高斯、黎曼、魏尔斯特拉斯、柯西、伽罗瓦等一大批最重要的数学家的数学思想和贡献; 也介绍了一大批物理学 (特别是数学物理学) 大师如开尔文、麦克斯韦、亥姆霍兹的思想和业绩; 并详细讨论了一些最重要的数学分支 (函数论、射影几何、代数几何等) 的缘起和前景。

本书适合从事数学的研究和教学的大学水平以上的学生和教师学习参考, 也适合研究科学史、数学史和关心、研究一般的科学思想文化发展的读者阅读。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学在 19 世纪的发展. 第 1 卷 / (德) 克莱因
(Klein, F.) 著; 齐民友译. —北京: 高等教育出版社, 2010.3
(数学翻译丛书 / 丘成桐主编)

ISBN 978-7-04-028886-5

I. ①数… II. ①克… ②齐… III. ①数学史—研究—世界—19 世纪 IV. ①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 020485 号

策划编辑	王丽萍	责任编辑	李 鹏	封面设计	王凌波
版式设计	王凌波 王 莹	责任校对	金 辉	责任印制	朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京信彩瑞禾印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2010 年 3 月第 1 版
印 张	21.75	印 次	2010 年 3 月第 1 次印刷
字 数	420 000	定 价	68.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28886-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后,国内大学逐渐与国外的大学增加交流。无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长,对中国的科学现代化都大有帮助。但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多。基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写,有些已经比较陈旧,追不上时代了。很多国家,例如俄罗斯、日本等,都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容,对数学的研究都大有裨益。高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此,开始计划做有系统的翻译,由王元院士领导,北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作。参与的教授很多,有杨乐院士,刘克峰教授等等。我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学,丰富他们的知识。海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助,我们谨此鸣谢。

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005年1月

中译本序

现在呈献给读者的这部书，是一部公认的名著。为了了解这部书的意义，我们先介绍一下作者的生平和他对于数学的贡献。这里所用的材料主要来自 www-history.mcs.standrews.ac.uk/biographies/klein.html

克莱因 (Felix Christian Klein) 是著名的德国数学家。1849 年 4 月 25 日生于莱茵河畔的名城杜塞尔多夫 (Düsseldorf)。当时，普鲁士人统治着这座城市，遭到了莱茵河流域人民的激烈反对，而他的父亲就是一位普鲁士官员。克莱因也就继承了普鲁士人特有的顽固，死板；他的社会政治观点也是普鲁士化的。但是，克莱因的数学作风和他的教学却是十分生动活泼。他的女学生 Grace Chisholm Young 就说过，他最喜爱的格言就是“切勿呆板！”(Never be dull)。

克莱因在杜塞尔多夫的中学 (*Gymnasium*) 毕业后，就于 1865—1866 学年进入波恩大学，师从普吕克。当时普吕克同时据有两个教职：实验物理学和几何学，而克莱因是作为物理学生进入波恩大学的，在当学生时就是普吕克的物理学实验室的助理。可是这时，普吕克的兴趣已经完全转向几何学，这就决定了克莱因一生的事业在于数学。1868 年，克莱因在普吕克指导下获得了博士学位，博士论文就以普吕克所研究的线几何学为题。正在这时，普吕克去世，克莱因也就不能再停留在波恩了。他有好几年在柏林，格丁根和巴黎游学。1870 年当他正在巴黎时，俾斯麦一封故意羞辱法国皇帝的信使得普法战争爆发，克莱因也就回到了德国。在这部书的字里行间，处处可看出克莱因对法国 (包括拿破仑) 颇有微词，尽管他充分地估计了拿破仑的统治对于数学的极大的促进。克莱因一直得到克莱布什 (当时起领导作用的德国数学家之一) 的高度评价。他认为克莱因必定会成为当时德国的数学领袖人物，并且推荐他担任爱尔朗根大学的几何学教职。1872 年，克莱因来到爱尔朗根，他的就职演说就是著名的“爱尔朗根纲领”。那时他还只有 23 岁。

但是克莱因并没有留在爱尔朗根, 因为那个大学太小, 没有几个学数学的学生。1875年, 他来到慕尼黑高工, 和克莱布什的另一位学生布里尔一同工作了5年。他们二人都爱好教学, 为学生们开设了许多高深的数学课程; 他们二人又都热衷于数学教学的改革, 例如布里尔就很关心用几何模型来教几何课, 而且自己制作了许多模型。克莱因也有同样的爱好, 克莱因自己制作的模型, 至今仍然陈列在格丁根大学数学系的大厅里。当时在慕尼黑高工, 有许多后来有大成就的数学家和物理学家。最著名的应该是量子物理的创始人普朗克。数学家中则可以举出如赫尔维茨和龙格。其中有一些就是克莱因的学生, 例如赫尔维茨。

1875年, 克莱因在慕尼黑娶 Anne Hegel (哲学家黑格尔的孙女) 为妻。

最重要的转折点是1880年克莱因接任莱比锡大学的几何学教授。当时在那里的还有著名的挪威数学家李 (李群理论的建立者)。二人之间有亲密的关系 (不仅是个人的, 尤其是学术上的)。他们不仅共同做出了许多关于代数几何学的工作, 特别是, 李引导克莱因特别关注群在整个数学 (特别是几何学) 中的关键作用。

可以毫不夸大地说, 克莱因在莱比锡建立起一个几何学派。克莱因在几何学里的贡献, 首先应该举出的是他提出了爱尔朗根纲领, 其中明确了几何学研究的内容就是空间在各种变换群下的不变性质。这一个纲领自然应该包括欧氏几何和非欧几何, 包括度量几何, 仿射几何和射影几何。克莱因对于射影几何有特别的关注。他在这方面的贡献当然首先来自他的老师普吕克, 而且直追古典的法国几何学家们, 如蒙日, 庞塞莱, 还有英国几何学家凯莱。克莱因真正脱离了度量几何的樊篱建立起射影几何。尽管凯莱一直没有接受克莱因的思想, 并且认为其中有循环论证之嫌。克莱因在非欧几何的建立上也有特殊的贡献: 他给出了罗巴切夫斯基几何的所谓射影模型, 用射影几何来说明欧氏几何和罗巴切夫斯基几何的相互关系。得出了欧氏几何相容的充分必要条件就是罗巴切夫斯基几何也相容。这样, 彻底解决了非欧几何相容性的问题。

尽管克莱因在几何学方面有如此重大的贡献, 他自己却认为自己的得意之笔, 即最重要的贡献在于继承和发展了黎曼关于复变量函数的几何理论。克莱因和黎曼并未见过面。黎曼去世时 (1866年) 克莱因还在波恩大学读书。倒是克莱因却直接听过魏尔斯特拉斯的课。不过他不赞成后者的思想和方法, 尽管他们的工作多有互相交叉之处, 而且互相连接。至于黎曼, 克莱因却一直公开声称自己愿继承其思想和工作。他把自己的一些最重要的成就归功于自己发展了黎曼的思想, 把黎曼关于复变量函数理论的几何思想与代数、群论、不变式论和数论结合起来; 特别是, 他自己的领域中的椭圆函数论和自守函数论就是这种结合的产物。他在1882年写的《代数函数及其积分的黎曼理论》一书中还把它与位势理论、共形映射以及流体力学连接起来。克莱因还对于高于四次的代数方程理论有极大的兴趣, 特别是关心五次方程的超越解法。这些当然与伽罗瓦理论有紧密的联系。他在《论二十面体》

一书中彻底解决了这个问题。这些,又引导他进入椭圆模函数理论的研究。由此开始了他与庞加莱的来往与争论。其中最重要的是关于单值化定理的提出与证明。

但是莱比锡的几年工作给克莱因带来的思想负担极重,终于导致了他的重病以致思想几乎崩溃。这以后,克莱因的数学研究生活基本上就结束了。他后来的主要贡献就在于组织工作和数学教育。1886年他来到格丁根。他的目标就是把格丁根建成领导全世界的数学研究中心之一。希尔伯特就是由他在1895年延揽到格丁根的。他的目标实现了。自此,直到希特勒的反犹太清洗使得格丁根元气大伤,格丁根一直是世界上最重要的数学中心之一。

他对数学组织工作的另一个重大贡献,是接手主办《数学年刊》。这份刊物本来是由克莱布什创立的。由于克莱因的苦心经营,终于成了具有世界影响的最重要的数学刊物之一。

从1900年开始,克莱因就注意到中学阶段的数学教育的改革。他的中心主张可以用他的一句话来表述:“每一个了解这门学科(数学)的人都会同意,对于大自然的科学解释的基础,只有那些学过一点微积分初步加上解析几何的人才能懂得。”也就是说,应该把微积分初步加上解析几何,纳入中学的教学大纲之中。他还主张把理论和它的应用结合起来,所以他又说:“像阿基米德、牛顿和高斯这样的最伟大的数学家,总是同样并重地把理论和应用统一起来。”他还写了另一部名著《高观点下的初等数学》共3卷(中译本由复旦大学出版社2009年出版)。到现在,经过了一百多年,人们终于认可了他的思想。现在,世界上的主要国家都在高中阶段教一些微积分初步了。但是这部书里有许多宝贵的思想,至今仍未受到人们足够的重视。特别应该提到,对于这部数学史著作的许多重要问题,克莱因也都在《高观点下的初等数学》一书里,用通俗易懂的语言作了负责任的介绍。

1913年,克莱因退休,然而他还在自己家里为人们开设数学课。本书就是这些课程一部分的讲义。

1925年6月22日,克莱因于格丁根去世。

现在讲一下这部书成书的经过。根据美国数学家史密斯(David Eugene Smith)为美国数学会通报(BAMS)所写的本书的书评(见该刊1928年7—8月号,521—522页)的介绍,曾经有人劝他写这样一部书。因为这一段历史的许多重大事件他都是亲历者,而自己又对这一段时期数学的发展作了如此重大的贡献,所以写这样一部著作非他莫属。克莱因当时并未同意,因为他说这样一项大事业,只有年轻人能够胜任,而且自己又忙于其他事务。所以到他退休以后,他才在自己家里为少数自己很熟悉的格丁根数学家们作了一系列讲演。他去世后这些讲演才由他人编撰成为本书。全书分两卷,第一卷由柯朗(Richard Courant)和诺格鲍尔(Otto Neugebauer)编辑,第二卷则由柯朗和康福森(Stephan Cohn-Vossen)编辑。1926—1927年由Springer出版社发行。后来又有多家出版社印行过。这部书很早就有俄文译本,可惜国内一

直没有见到。1979 年出现了由 R. Hermann 编辑的 M. Ackerman 的英译本。

读这部书有一个感觉：您好像是在读克莱因的回忆录。以第一卷而论，本书从系统地介绍高斯开始，明确地指出，19 世纪的数学区别于以前的数学的特点之一在于纯粹数学与应用数学的分离。尽管克莱因的主要思想是数学的理论与实际应用的融合，他却认为这两个部分的分离是数学进步的表现，终究使得人们有可能更深刻地认识大自然；而进一步他还说，科学的的目的不只在认识大自然，更在于利用这种知识达到自己的目的。他对高斯歌颂如天人，部分地（或者说主要地）就在于此。对于黎曼他同样极为崇敬，原因也在于此。本书接着讨论了法国巴黎高工和德国的柏林大学对于数学发展的贡献，展开了他关于数学在 19 世纪的发展的社会政治条件的许多评论。然后他就以主要力量展开了他自己最关心的数学分支的讨论，当然关注最多的数学家是与他关系最密切的一批。这样，就难免引起人们的议论。例如英译本编者在指出克莱因具有直言无隐的性格特点的同时，也尖锐地批评他难免固执和偏见过多。对此，译者愿意谈谈自己的看法：数学是全人类的事业，19 世纪以来，数学的领域已经空前扩大，又有成千数学家参与数学的创造，谁也不能说自己能对数学有全面的了解，说自己的看法才是公正的、无偏见的。人们在讨论，在交流，而讨论和交流时，不一定能那么平顺，冷静，热烈的讨论常有片面性甚至火气。曹丕在《典论·论文》里说：“文人相轻，自古而然。”又说“夫人善于自见，而文非一体，鲜能备善，是以各以所长，相轻所短。”所以，文人相轻并不可怕，这时常是认识过程中必然出现的。当一个人倾全力沿着一条道路去探求真理时，他当然觉得自己的道路是对的，甚至是唯一合适的，所以“各以所长，相轻所短”也是很自然的。甚至“家有敝帚，享之千金”也是常有的事。真正重要的是要有思想，越深刻越好。克莱因这部书的一个特点是有突出的思想性，不仅他本人富有真知灼见，他对其他人的评论也是从思想角度出发，而且不止是评论个人的思想，还包括对一个时代的风尚的评论，使您感到他评论的就是今天的事。而且因为许多事是他所亲历，许多人是他的师友乃至“对立面”，娓娓道来倍感亲切。时常穿插一些轶闻趣事，用这本书的说法，叫做“具有人性的兴趣”。

然而，对于这部书的读者，最有价值的当然是克莱因对自己和他人（包括高斯和黎曼）的数学成就的实质的评介。对于数学这样一门科学，这样做有特殊的困难。克莱因指出，要想真正理解一个数学理论，唯一的办法是在自己的头脑里把这个理论重新创造一番。这当然是过高的要求，而用我们常用的比较不那么高的标准来要求，就是要自己认真把它弄清楚。如果没有专门的训练，这几乎是不可能的事。克莱因在书中特别以当时人们对伽罗瓦理论的讲解为例，克莱因干脆说都没有讲好，甚至不可能讲好，这当然是就他在自己的研究工作中对伽罗瓦理论的实质的体会而言的。所以为了传播数学知识，就免不了用一些通俗的、类比的语言。这样做，自然会

产生一个情况：当听者以为自己已有所得时，真正的内行会觉得连皮毛也不是。在这种无可奈何的情况下写这样的书，克莱因说只能采取他称之为“好心的哄骗”的方法，也就是说简单化和表面化是难免的。甚至对于他当时的听众——许多人已经是格丁根的成熟的数学家了——尚且有这样的感慨，对我们这些一般读者，困难更加可想而知了。然而，克莱因这部书在这方面取得了很大的成就。它不但使您想读下去，而且确实给您讲了不少数学知识。这与那些只介绍历史事实而不讲解数学的数学史著作有极大的区别。克莱因在这方面有特殊的才能。这部书让您对于他的研究，对于那个时代的数学（还有力学和物理学）的重大进展到底是什么，至少有一个初步了解，而且会有一种自己再钻研下去的欲望！译者前面提到克莱因的另一部名著《高观点下的初等数学》，克莱因甚至把自己关于二十面体的理论的某些点作为中学教师暑期讲习班的内容！克莱因作为一位伟大的教师的风采可见一斑。可见一部书是否真是名著，当然主要是看它是谁写的，是怎么写的，但是，从中能得到多少益处就要看读者怎么读了。我想，对此书的介绍，可以就此打住了。

下面是此书第一卷的译文。第二卷的内容是不变式论和狭义相对论。

此书第一卷有英译本。译者是 M. Ackerman，收入由 R. Hermann 主编的一个丛书中。由 Hermann 撰写的序言对了解本书的基本思想很有价值，所以也译成了中文，放在书前。英译本加的一些脚注也都一概收入。因此此书有许多脚注。有克莱因本人的；有德文版编者的；有英译本编者的；有英译本译者的；当然还有中译本的。除了克莱因本人所作的脚注未加标记外，脚注里均一一标明，以示文责。中译本对涉及的许多数学家都尽可能地查出他们的生卒年月与国籍。有时有一些形容词，如“伟大的”之类，时常就不一定靠谱了。原书有一些文字或印刷上的瑕疵，我作了一些修改。有时为阅读方便，我也作了一些文字上的修饰。这些在文中均未声明。总之请读者多多赐教，不要过分地伤及这部名著的风采，是我自己最低限度的要求。

英译本序

科学史中有这样一类经典著作：它们写得十分生动有趣，具有可读性；本书就是其中之一。更有甚者，本书还是由一位最伟大的数学通才所写的，书中提纲挈领地包含各种至今还非常有用的、堪称典范的数学思想。

如果这还不够说明翻译本书的动机，那么它在说明 19 世纪科学的两个侧面上也是很有价值的，而这两个侧面我们现在几乎完全是茫然无知的，这就是几何(包括微分几何和代数几何)和数学物理。我们习惯于用科学在“进步”这样的思想看问题，所以很难理解有些事情其实一百年前人们理解得还好些！肯定地说，我们现在的研究生教育制度中的每件事情都是按照亨利·福特 (Henry Ford, 1863—1947) 衷心赞赏的“历史是空话 (history is bunk)”这样一种思路来设计的，以此对学生洗脑。^[1]从克莱因的书中，我们还能窥见那个失去了的天堂的一斑，在那里，在纯粹与应用数学之间，在数学与物理学之间，还有一些内在联系与交流；虽然在克莱因的时代，那种今天盛行的专门化和“重新发明车轮”^[2]的趋势已经存在了。请注意，克莱因对于他那个时代的思想气氛的许多抱怨，其声音到今天还可以听到！

和对希尔伯特的文章(见本丛书第 8 卷)一样，我不对原文作直接的评论(如同对本丛书的 1—3 卷所做的那样)，而是附加了一些现代的论题，并对这些论题加以说明。^[3]我相信，这会有助于理解克莱因的真意。然而，这些评论不是为初学者

^[1] 亨利·福特就是美国汽车大王。这句话的意思是：要尊重现在，而不要太相信历史。原话出自 1916 年 5 月 25 日他对《芝加哥论坛》报的访谈，原话是：“历史或多或少是些空话。它是传统。我们不需要传统。我们要的是我们生活的现代，唯一的还值得一分钱的历史，是我们今天正在创造的历史。”——中译本注

^[2] “发明轮子”是一句美国俗语，意思是干一些早就解决了，因而毫无意义的事情。——中译本注

^[3] 英译本有一个很长的附录。因为它主要反映了 R. Hermann 的观点，所以没有纳入中译本中。——中译者注

写的,而是为了那些至少懂得流形理论的初步的人写的。我们现代的流形上的微分和积分理论,恰好就是体现在克莱因和与他旗鼓相当的大师们身上的传统的自然的延续。我确信,如果克莱因能够看到一种想要重新恢复以下各个学科的联系的动作,他一定会很高兴的:这些学科就是几何化的数学,物理学,工程技术等等,力学的微分几何方法,在非线性和场论中微分几何方法的应用,还有控制理论。

有一个我很喜欢的数学神话,说是克莱因和李把群论瓜分了——克莱因拿走了离散群,李拿走了连续群。(我忘记了是在哪里读到这个故事的,可能是在 E. T. Bell 的书中)。在我们的时代,关于离散群与数论和代数几何的关联的知识大大地拓展了。这也是完全符合克莱因的传统的,然而,因为我关于这些领域的知识仅限于与我自己的工作相接触的那一部分,我就不打算对这个方向作评论了。

这本书的风格部分地表明,克莱因对于科学、文化和一些个别的人,评论起来总是直言无隐地表明自己的观点。有些观点是深刻而有意义的,有些则是小气,刻薄而且顽固的。然而,我感到,他关于直觉在数学中的重要性的论述,关于应用在指导这种直觉中可能起的作用的论述,是很有价值的。我们有所谓的“纯粹数学”已经 50 多年了,“纯粹”数学只是按照自己内在的逻辑要求在发展,我很愿意来与人们争辩,迄今为止的结果仍然不及克莱因在本书中所叙述的 19 世纪的光辉业绩。说真的,对于今天的数学,最好的事情可能就是继续我们已经在 19 世纪开始的工作。

我愿感谢 M. Ackerman 在把本书翻译成英文时所付出的赫克里斯式的辛劳。那些读过他的稿子的人都评论说:这个英文译本把克莱因的复杂的德文散文多么流畅而又优雅地翻译成了英文。我还要感谢 Karin Young 的出色的打字工作。

德文版前言

几乎还从未有过哪一位历史学家的著作能引起如此巨大的轰动，并能如此透彻地洞察历史的本质，就像一位身居政坛高层、久经政治沧桑、影响世界政治命运的伟大政治家一样，能把超乎常人的精神上的个人魅力和艺术的、创作的能力完满地结合在一起。

这样的著作在政治历史上已然是绝无仅有，在精密科学历史上更是弥足珍贵。所以，当菲利克斯·克莱因在世纪交替之际撒手离开人世时，不再犹豫结集出版其关于 19 世纪数学和数理历史的讲座报告就显得尤为必要。

这些讲座报告是科学事件中一个沉甸甸的生命结出的丰硕果实，是超越常人的智慧、深邃的历史感知的表达，是高层次的人类文化和杰出的创造力的表现，它必将对所有数学家和物理学家，以及远远超出这一范畴的更大的人群产生极大的影响。在当前，人类的目光太流连于当代，就连科学亦是如此。人们在看待局部时习惯于将它非正常地无限放大并赋予夸张的意义，而忽略了整体。在这样一个时代，克莱因的著作能让许多人重新张开双眼，从总体上认识科学的关联和发展轨迹。

克莱因的这些讲座报告在他生前就以无数种打印抄本广为流传，创造了一个无可比拟的奇迹。第一次世界大战期间，克莱因在他的住所为很亲密的朋友圈子做了这些报告，断断续续，一直坚持到 1919 年。报告的最初起因是他计划在当代文化的框架下准备一次较大的阐述。但是这个想法终未实现。克莱因本人在其人生的最后几年一直在考虑，将这些报告作为自己人生工作的一个总结，再次彻底整理、补充，并将它们作为独立的著作出版。

疾病和死亡最终阻止了计划的实施，留给那些被委以出版克莱因遗作重任的人来做艰难的决定：是否以及在何种程度上对这些报告加以补充和更改。我们最终决定，尽最大可能忠于克莱因的原稿，尽可能只局限于勘误、标注少量的附注以及纯

粹进行外观形式的改变。毫无疑问,现在这本著作所呈现出来的形式带着断片和未完成的印记,与其说是完整的历史表述还不如说更像是草稿,其结构的特征毫无疑问是不统一的。除了对最普遍的关注点和流行的风格进行阐释,我们发现许多具体的表述,尤其是在书的最后部分。第二卷更是特别着重于唯一的一门学科,即不变量理论和相对论的历史发展。他并非平均对所有方向进行历史表述,举例来说,数论、代数和集合论就不占多少笔墨,其他某些阐述和评价或许也有些主观。原本计划撰写的关于“庞加莱的思想”和“李群理论”的章节全都没有完成。但是所有这些瑕疵与克莱因手稿从四面八方让我们感知到的鲜活的精神相比又算得了什么呢?也正因为如此,对他的著作进行更改或者补充在我们看来就是一个不当的行为,哪怕完成这项工作并不算太超出我们的能力范围。

出版过程中浩繁的工作大部分由两位编辑中较年轻的一位一力承担。^[1]

除此之外,我们还想对给出宝贵建议和在校对方面提供帮助的一众同行表示感谢。特别要感谢慕尼黑的卡拉特沃多利先生、代尔夫特的施图易克先生和汉诺威的米勒先生,还有格丁根的贝塞尔-哈根先生。他们细致地审阅校正稿,对某些历史事实的准确性把握对出版人来说具有无比珍贵的价值。

格丁根, 1926年8月

R. 柯朗 (R. Courant, 1888—1972)

O. 诺格鲍尔 (O. Neugebauer, 1899—1990)

^[1] 指诺格鲍尔,他于1990年去世。——中译本注

目 录

《数学翻译丛书》序

中译本序

英译本序

德文版前言

引论	1
第 1 章 高斯	7
应用数学	7
纯粹数学	21
第 2 章 19 世纪前几十年的法国和多科性工业学校	53
力学和数学物理	56
几何	63
分析和代数	67
第 3 章 <i>Crelle</i> 杂志的创立和纯粹数学在德国的兴起	75
<i>Crelle</i> 杂志里的分析学家们	77
<i>Crelle</i> 杂志里的几何学家们	92

第 4 章	默比乌斯、普吕克和斯坦纳以后的代数几何	107
	纯粹射影几何的详细阐述	107
	代数学的平行发展: 不变式理论	127
	N 维空间和广义复数	138
第 5 章	德国和英国 1880 年前后的力学和数学物理	161
	力学	161
	数学物理	182
第 6 章	黎曼和魏尔斯特拉斯的复变量函数的一般理论	209
	黎曼	210
	魏尔斯特拉斯	235
第 7 章	对代数簇和代数结构的本性的更深入的洞察	253
	代数几何的进一步的发展	253
	代数整数的理论及其与代数函数理论的相互作用	274
第 8 章	群论与函数论; 自守函数	287
	群论	287
	自守函数	296

引 论

有过许多人尝试去理解我们时代的理性生活，并且将它的最重要的方面简要而概括地表示出来。每一个对数学有兴趣的人都很明白，如果打算对现代文化生活的各个要素作这样的概括，绝对不能忽略我们的科学——数学。必须努力赋予数学以应有的地位：它是人类精神最古老而又最崇高的活动之一，又是人类精神发展的指导力量之一——不幸的是，它在受过教育的人们的心目中极少得到这样的地位，至少在我们德国是如此。有一个情形要对这个不愉快的情况承担主要的责任，这个情形一直是解决上述问题的道路上的最大的困难。和其他科学不同，数学是建立在少数几个原理之上的，而这些原理依据的则是几个不可逃避的法则。它的这个特有的特性，使它区别于人类心智所创造的任意其他产物，赋予它以著名的“清晰性”，同时也使它成为所有科学中最难接受的。不管什么人，想要进入它，就必须在自己心里，依靠自己的力量，一步一步地把它的发展再现一次。所以，哪怕是掌握一个数学概念，如果不能把它所赖以创立的所有其他概念以及它们的相互联系都加以消化，是不可能的。

数学的这种尖锐的孤立性自然使它引不起外行的兴趣。因为外行人的目的只求大概地掌握他所不熟悉的这一学科的要领，领略一下数学的特殊性和数学的美。外行人的议论似乎是来自上天的启示。然而，如果要在在这方面有所收获的话，那么对于究竟最值得做什么，就要受到很强的限制。有可能只对数学家想做什么加以描绘，也可能只对我们的科学——数学——不断进展中囊括的问题之广阔无垠给出一个图景。而且我想说，如果不搞一点“好心的哄骗”，这是做不到的。每一件系统的东西，如果理解起来需要下特殊的工夫，这些东西就必须尽量减少到最低限度。另一方面，历史的发展则必须放在最显著的地位。因为读者会被他天生就有的发展一事物物的兴趣所推动。他会相信，他已经走得更接近了，哪怕实际上他只是掌握了一点皮毛。这就是一种“好心的哄骗”，没有它，对这个封闭的领域的任何普及都是

办不到的。最后，强调数学对于邻近领域的影响，描述它对整个文化生活的关系，将为每一个有教养的人提供某种起点。

描述数学在 19 世纪的发展，比之描述数学在古代或中世纪，甚至是 16, 17 和 18 世纪的发展要困难得多。因为古代和中世纪的数学只需要处理相对初等的主题；而 16, 17 和 18 世纪则形成一个具有基本上同一特性的时代，通过考虑它和数学相近领域的关系就容易掌握其结果。但是与 19 世纪作一比较，就立刻显示出情况有多么大的区别。

在 16—18 世纪这个较早的时代，最重要的是微积分从 1700 左右开始的发展。它为掌握力学与天文学提供了全新的可能性。它在两位法国数学家的著作中达到了高潮，这两部著作虽然都是在 19 世纪完成的，但在形式和内容上都属于 18 世纪。它们就是：

拉格朗日 (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813, 法国数学家) 的《解析力学》(*Mécanique analytique*) 共 2 卷, 1811—1815, (第一版 1788, 合为一卷)。

拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749—1827, 法国数学家) 的《天体力学》(*Mécanique céleste*) 共 5 卷, 1799—1825。

任何一个关心自己科学的发展的数学家都应该知道这两部书，甚至在今天也是如此。可能我还应该加上

勒让德 (Adrien-Marie Legendre, 1752—1833, 法国数学家) 的《积分学练习》(*Exercices de calcul intégral*) 共 3 卷。

因为此书把到那时为止研究积分的结果都编制出来了，而且着重于数值计算。(椭圆积分与欧拉积分表；请回想一下，十进小数直到 1500 年左右才逐步建立起来，其后在 1600 年左右才随之发现了对数。)

除了在教育数学中的这些伟大成就外，18 世纪在纯粹数学中类似的进展也并不少见。我可以提出牛顿的《三阶曲线详论》(*Enumeratio linearum tertii ordinis*)，还有欧拉和拉格朗日在代数方程方面的巨大进展，很大一块数论，还有椭圆积分的加法定理，也都大大地依赖于他们二位，这还只是略举数例而已。然而，在纯粹数学方面的独立的工作，同把纯粹数学与应用数学结合起来回答时代的要求所取得的强有力的创造相比，就相形逊色了。

19 世纪则表现出完全不同的特性。当然，应用数学并未止步，而且可以说它占领了越来越大的疆域。只需举出整个“数学物理”的创立，这个在物理学除力学以外的各个领域中所用的理论工具就足以证明。然而，现在纯粹数学以两种意义同样重大的方式，大踏步地前进。其一是创造了全新的领域，例如单复变函数论和射影几何；其二是对于继承下来的科学财富进行了严格的检验，以适应重新觉醒了的对严格性的感觉，而在 18 世纪，由于过多的新创造这种感觉多少被压制了。

沿着这些新的思维方向，还有如法国大革命这样的巨大社会变动及其后果，都