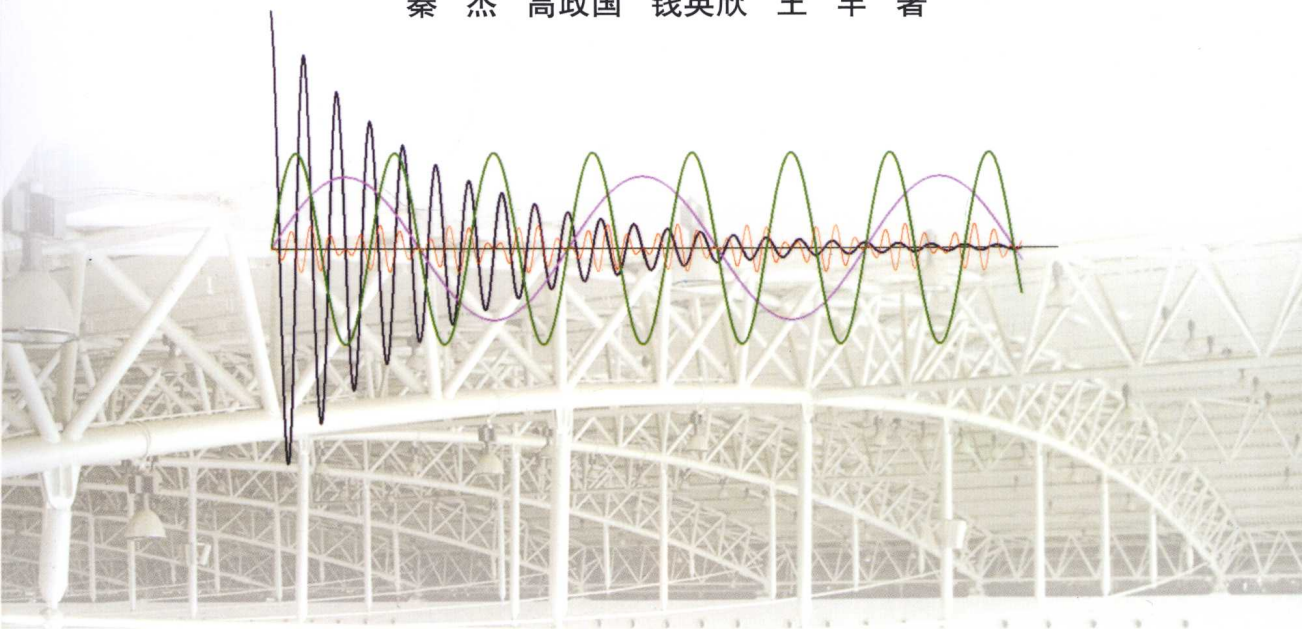


北京市科技计划项目

预应力钢结构 拉索索力测试理论与技术

秦杰 高政国 钱英欣 王丰 著



中国建筑工业出版社

预应力钢结构拉索索力测试 理论与技术

秦 杰 高政国 钱英欣 王 丰 著

中国建筑工业出版社

前 言

作为最近五年来我国最活跃的空间结构形式,预应力钢结构以气势宏伟、现代感强、造型丰富等特点日益得到业主和建筑师的青睐,目前在我国体育场馆、会展中心、大型公建中得到广泛应用,其结构类型也从以张弦梁结构为主的一枝独秀发展到目前十余种结构类型并存的百花争艳,我国在预应力钢结构方面的飞速发展受到国际上同行的关注和肯定。

借北京奥运会场馆建设和随后国内大规模基础设施开工的东风,近八年来,从规模宏大的体育场馆到精巧细致的中庭小品,从造型丰富的会展中心到充满灵性的休闲建筑,作者主持完成了国内外 70 余项预应力钢结构工程的施工任务。在不断攻克预应力钢结构施工技术难题、实现不断的跨越之后,如何进行拉索索力监测与检测成为不容回避、越来越紧迫的现实问题。尽管作者相继完成了全国农展馆新馆、奥运会国家体育馆、上海虹桥机场、黄河口模型厅等工程的健康监测工作,但在拉索索力测试这部分,仅能够对设置仪器的拉索进行监测,而未设置仪器的拉索索力还是未知的,这实际上也是国内在拉索索力测试方面的真实水平。如何在拉索索力测试方面实现突破,能够使用经济、便捷、快速的方法对任意拉索进行索力测试,是近年来时时刻刻萦绕在作者心头的一个必须攻克的难题。

2008 年初,我们把索力测试研究作为一个亟待研究的课题向北京市科委作了多次汇报,科委领导非常赞同并给予了立项支持。在两年多的时间里,我们完成了大量的理论工作、模型试验,尤其是结合近十项分布在全国各地的实际工程进行了系统研究工作,作者及其团队完成了《大跨度预应力钢结构安全监测系统研究》课题,提出了多频率拟合法和半波法两种基于拉索动力特性的索力测试方法,在索力测试方面实现了突破。本书的内容主要取材于此课题的成果报告。

本书包括五个章节。第一章绪论部分对预应力钢结构拉索索力测试技术进行了回顾与总结,提出了本书拟采用的动力测试方法;第二章对单跨索结构、多跨索结构的振动特性进行了理论研究,推导完成了不同边界条件单跨索、多跨索的索力识别方程,解决了拉索索力测试的基础理论问题;第三章和第四章详细介绍了本书提出的两种索力测试方法:多频率拟合法和半波法。分别对两种方法的理论基础、测试技术和工程实例等方面详细进行了阐述;第五章介绍了预应力钢结

构拉索安全监测系统，包括硬件和软件两个部分，为拉索索力测试提供了实用技术。

本书能够得以面世，首先，要感谢北京市科委，正是科委给予《大跨度预应力钢结构安全监测系统研究》课题资助后形成的强大推动力，才使得索力测试理论与技术的研究成果得到突破；其次，要感谢北京市建筑工程研究院预应力研究所，五十多年来，经过几代人奋斗，从预应力混凝土结构到预应力钢结构，这个团队始终坚持“创新源自实践，创新服务实践”的传统，以大量工程实践为基础不断创新。只有在这样一个充满激情、奋发向上同时又脚踏实地的集体中，才能完成立足基础理论、服务生产实践的重大课题；最后，要感谢课题组所有成员，这本册子的确不厚，但却是课题组所有成员共同努力的心血结晶。

本书是作者在预应力钢结构拉索索力测试方法探讨方面的初次尝试，真诚期望它能对我国工程和学术界起到抛砖引玉的作用。书中提出的两种索力测试方法，肯定存在不尽完善甚至有所谬误之处，希望大家在验证和使用的过程中不断进行修正，使之日臻完善，从而为我国预应力钢结构更健康、更快速地发展奠定坚实的基础。受学识和实践所限，书中必定还存在其他不少问题乃至错误，敬请各位专家和读者不吝批评指正。

目 录

1 绪论	1
1.1 预应力钢结构拉索测试技术	1
1.2 索力测试理论研究与应用现状	2
1.2.1 索力测试理论与应用技术	2
1.2.2 频率法索力测试理论研究与应用现状	6
1.3 本书的主要内容	8
2 基于振动原理的索力计算理论	9
2.1 索振动基本方程与解答	9
2.2 单跨索振动理论模型与索力计算方法研究	10
2.2.1 两端铰接拉索振动方程解析解与索力计算	11
2.2.2 两端固定拉索振动方程解析解与索力计算	12
2.2.3 一端铰接一端固定拉索振动方程解析解与索力计算	15
2.3 多跨索单元振动理论模型研究	15
2.3.1 多跨索单元振动模型建立	15
2.3.2 特殊边界情况验证	19
2.4 多跨索振动理论模型及索力计算方法研究	20
2.4.1 任意弹性边界索力分析	20
2.4.2 多跨索索力计算方法	23
3 多频率拟合法索力测试理论及工程实例	26
3.1 多频率拟合法原理及算法	26
3.1.1 基于优化方法的多频率拟合算法原理	26
3.1.2 基于有限元方法的多频率拟合算法	28
3.2 多跨索索力测试工程实例	28
3.2.1 燕郊模型试验	29
3.2.2 长沙火车站新站	37
3.2.3 最高人民法院人民来访接待站	70
3.2.4 黄河口模型试验厅	86

3.2.5 初步结论	101
3.3 单跨索索力测试工程实例	101
3.3.1 单索索力检测试验	101
3.3.2 张家口通泰大桥	117
3.3.3 全国农业展览馆工程	124
3.3.4 初步结论	129
4 半波法索力测试理论及工程实例	133
4.1 半波法原理及算法	133
4.2 半波法索力识别条件与识别精度分析	135
4.2.1 铰支边界索对称振型	135
4.2.2 任意边界索对称振型	136
4.2.3 半波法精度分析	137
4.2.4 有限元数值验证	140
4.3 半波法索力测量技术	143
4.4 半波法工程实例	144
4.4.1 试验目的	144
4.4.2 试验仪器与数据处理设备	144
4.4.3 试验方案	145
4.4.4 试验结果	146
5 拉索安全监测系统硬件集成及可视化软件开发	152
5.1 监测系统的平台方案设计	152
5.2 监测系统硬件集成	152
5.2.1 传感器	153
5.2.2 信号采集设备	154
5.2.3 数据处理工具	155
5.2.4 激振器	158
5.3 监测系统可视化软件	159
5.3.1 软件功能设计方案	159
5.3.2 软件功能实现	159
附录 塑料护套半平行钢丝拉索规格	165
参考文献	168

1 绪 论

1.1 预应力钢结构拉索测试技术

近年来,随着我国城市化建设规模的不断扩大,大型公共设施与交通设施建设需求日益增长。预应力钢结构作为一种新兴的建筑物形式正大量应用于机场、车站、体育馆、大型商场、会展大厅等大跨空间建筑及各式桥梁工程^[1~2]。预应力钢结构中的刚性构件与索组合成一体,这一空间受力结构整体刚度好,能有效地改善结构性能,减轻结构自重,降低工程造价。同时,预应力钢结构与网壳、网架等空间结构相比,构件和节点的种类和数量大大减少,使结构的加工制作、运输和施工费用降低,能源消耗少。预应力钢结构形式的建筑造型通透轻盈,可以利用太阳能解决内部照明和采暖等需求,是现代城市建设最具发展前景的一种结构形式。

索力控制是预应力钢结构设计与施工技术中最重要的组成部分。索力状态决定着整个结构的安全。要保证结构物的安全,就必须采取措施保障拉索处于受控状态。可是在预应力钢结构预应力施工过程中,索的张拉(特别是分批张拉)会使拉索之间相互影响:每一次张拉几乎都会使先前张拉的索力发生变化,使结构索力偏离设计值,造成索力的失控。索力失控带来不可知的结构内力重分布,甚至造成整个结构的失效。预应力钢结构施工中索力的精确测量是保障工程安全的关键性技术。

由于我国在现阶段大跨度预应力钢结构的应用还不多,总体还处于发展的起步阶段,有许多方面有待深入研究。在这个阶段,重视拉索安全监测理论与应用技术的研究开发,对今后预应力钢结构在我国大规模的推广提供应用基础。

从当前预应力钢结构工程应用现状和研究现状来看,对于直径小于44mm的细索以及长径比大于100的单索,采用力平衡法和振动法可以比较精确地测量索力,但对于长径比小于100,直径大于44mm的短粗拉索现有各种方法都难以进行精确有效的索力测量。这种短粗索在工程中应用占到总量的80%以上。特别是边界条件不同的短粗索,传统索力分析方法难以有效地计算短粗索索力。另外,预应力钢结构中多跨拉索的索力测量方法基本处于空白状态。预应力钢结构中撑杆支承的多跨拉索,由于支承和组成结构构造复杂,其振动表现出复杂的动力行为,依赖单索振动理论进行预应力钢结构拉索索力精确识别难以实现,因此,需要考虑预应力钢结构构造特性研究多撑杆拉索的动力学模型,建立相应的振动理论和索力测量方法。

1.2 索力测试理论研究与应用现状

1.2.1 索力测试理论与应用技术

当前,工程中采用的索力测量方法有压力表测试法、传感器读数法、力平衡法、波动法、频率法(振动法)等^[3]。下面对这些方法进行简要介绍。

(1) 压力表测试法

拉索通常使用液压千斤顶张拉施工。该方法的原理是利用千斤顶油缸中的液压与千斤顶的张拉力成比例这一关系,通过测定油箱的液压,推算千斤顶的张拉力,并认为该张拉力等于拉索索力^[4]。一般是通过精密压力表或液压传感器测定液压,将油压表读数换算成千斤顶的张拉力直接读出(图 1-1)。事先经过标定的千斤顶测试索力可以达到很高的精度,其精度可以达到 1%~2%。

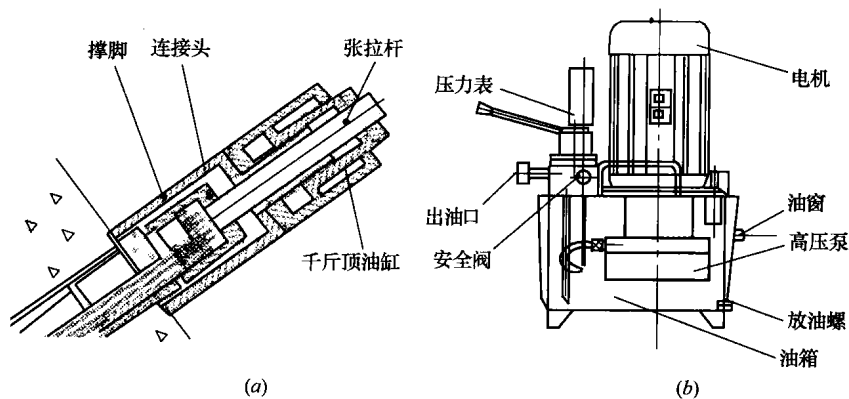


图 1-1 压力表测试法
(a) 千斤顶; (b) 油泵

压力表测试法比较直观,简单易行,不需要添置另外的仪器设备,是施工中控制索力最适用的方法。但该法所用仪器较笨重,移动不便,一般应用于施工阶段的拉索索力控制。

(2) 压力传感器(锚索计)测试法

压力传感器(锚索计)测试法测量索力的原理是:在千斤顶张拉活塞和连接杆螺母之间套一个穿心式压力传感器,在拉索张拉时,千斤顶的张拉力通过连接杆传递到拉索锚具上,张拉活塞和连接杆螺母之间的传感器受压后就输出电信号,这样就可以在配套的二次仪表上读出千斤顶的张拉力(图 1-2)。如需长期测试索力,也可以将穿心式压力传感器放在锚具和索孔垫板之间,进行长期监测。

这种方法精度可达 0.5%~1.0%,但压力传感器售价高,特别是大吨位的压力传感器花费更高;传感器自身重量也大,测试操作时不方便、费时且劳动强

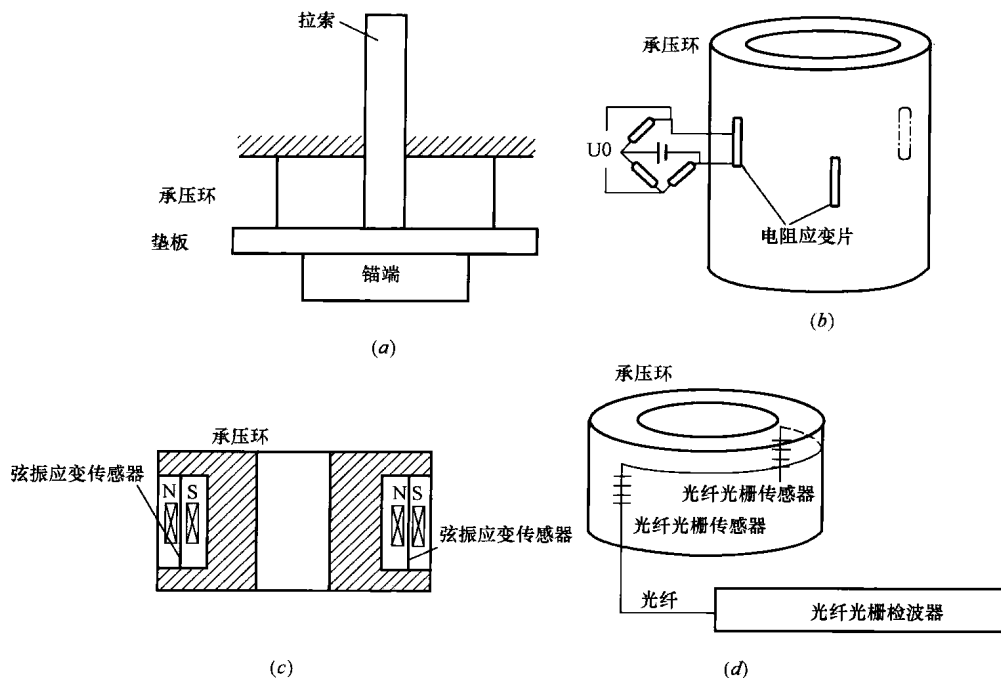


图 1-2 压力传感器测试法

(a) 压力传感器测试原理；(b) 电阻式：承压环上贴电阻应变片；

(c) 弦振式：弦振式应变传感器代替电阻应变片；(d) 光纤光栅式：光纤光栅式传感器代替电阻应变片

度大。常用的压力传感器主要有弦振式压力传感器、电阻式压力传感器、压电式压力传感器、光纤光栅式压力传感器四种^[5~7]。

(3) 频率法

频率法也叫振动法。是利用附着在拉索上的精密传感器，在环境激励或人工激励下采集拉索的振动信号，经过滤波、放大和频谱分析，再由频谱图确定拉索的自振频率，然后根据自振频率与索力的关系确定索力，是斜拉桥索力测试应用最广泛的一种方法^[8~10](图 1-3)。

用频率法测试索力，设备可重复使用。现有的仪器及分析手段，测试频率的精度可以达到 0.001Hz。只要准确建立索力和频率的对应关系，利用频率法测索力

便可达到很高的精度。该法测试索力具有操作简单、费用低和设备可重复利用的优点，特别适用于对索力的复测和测试活载对索力的影响。本书中重点介绍频率法在预

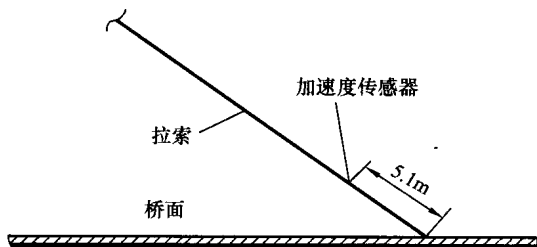


图 1-3 频率法

应力钢结构拉索索力测试中的理论与技术。

(4) 振动波法

振动波法也称反弹波法或敲振法，它的作用原理是通过测定敲击拉索所产生的振动波传递速度来求索的张拉力。两端固定的张紧索，如同张紧的弦，敲击后即产生振动，其振动波将沿着弦线传播，碰到另一端的障碍便反射回来。只要测出振动波沿承载索的传播速度，利用振动波在张紧弦上的传递速度与弦张力之间的对应关系，便可求得索的张拉力^[11]。这样的敲击振波实际上是驻波形式的振动原理。基本原理如图 1-4 所示。

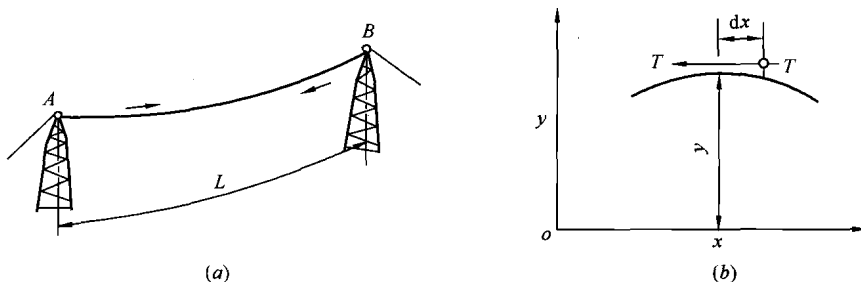


图 1-4 振动波法原理

(a) 振动波在张紧拉索中传播；(b) 振动波形曲线模型

在图 1-4 中，设张紧弦线的线形曲线为 $y=f(x)$ ，张力为 T ，弦线体积质量为 ρ ，当由静止状态产生微小位移（ T 值不变）时，取弦线一微段 dx 考虑，则其左边的垂直分力为 $T \frac{\partial y}{\partial x}$ ，右边的垂直分力为 $T \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial (T \frac{\partial y}{\partial x})}{\partial x} dx$ 。

微段 dx 的质量为 ρdx ，若设位移的时间为 t ，则其运动方程为：

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1-2)$$

式 (1-1)、式 (1-2) 存在 $y=0$ 时， $x=0$ 的边界条件。当这种微振动以驻波形式出现在张紧的弦线上时，若以 v 表示振动波沿线传递的速度，则又可得到：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1-3)$$

比较式 (1-1) ~ 式 (1-3)，可以得到：

$$v^2 = \frac{T}{\rho} \quad (1-4)$$

$$T = \rho v^2 \quad (1-5)$$

式 (1-4)、式 (1-5) 表示敲击后的振动波沿着体积质量为 ρ 的弦线传递速度 v 与张紧弦线张力 T 之间的关系。以 q 表示钢丝绳单位长度质量 (kg/m)， g 为重力加速度 ($g=9.81\text{m/s}^2$) 代入式 (1-4)、式 (1-5)，得

$$T = \rho v^2 = \frac{q}{g} v^2 = 0.102 q v^2 \quad (1-6)$$

式(1-6)即为振动波法测定索张力的实用公式。式中单位长度的质量 q 为已知,只要测出振动波沿承载索的速度 v (m/s),即可按式(1-6)计算出钢索所承受的张力。

此方法在国外工程中已被广泛用来测定高压输电线、矿井提升机和架空索道等大跨度缆索的张力,而对于预应力钢结构拉索的测试技术还不成熟,尚未在工程中广泛应用。

(5) 三点弯曲法^[12~13]

三点弯曲法是基于拉索受力和变形特点,考虑拉索抗弯刚度对测力的影响,利用“纵横弯曲”原理建立索张力计算模式。张紧的柔性索,其横向刚度与索的张拉力之间存在函数关系。通过测试索的横向刚度,便可求出索的张拉力。

图1-5为测力器上的钢索三点弯曲的局部变形。在 C 点相对于 A 、 B 两点向下压紧过程中,产生位移 δ 和压紧力 P 。设柔索中心线偏折角为 α ,被测索视为“完全柔性”,则有:

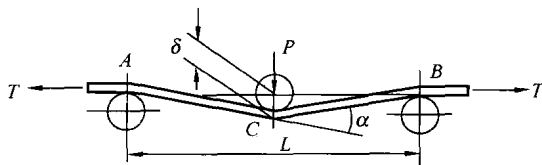


图1-5 “三点弯曲式”索张力测定器的工作原理

$$P = 2T \sin(\alpha/2) \quad (1-7)$$

$$\delta = PL / (4T) \quad (1-8)$$

由式(1-7)、式(1-8)可知,由压紧力 P 、测力器上确定的 δ 值和 L 值,即可求得索张力 T 。

三点弯曲法对于截面较小的柔性索有较高的测量精度。但对于截面较大的钢索,尤其是封闭式钢索,索截面抗弯能力对测量值 P 的影响不容忽略, P - T 之间不呈线性关系,测量误差较大。

(6) 弹性磁学(磁通量)法

弹性磁学法又称为磁通量法。是利用小型电磁传感器,测试磁通量变化,再根据索力、温度与磁通量变化的关系推算索力^[14~15]。弹性磁学法所用的仪器是电磁传感器,如图1-6所示。由两个线圈组成一个电磁感应系统,主要线圈通入直流电,通电瞬时,由于有铁芯存在,会产生电磁感应现象。也就是说,会在次要线圈中产生瞬时电流,因此在次要线圈中会测得一个瞬时电压。通过双线圈系统,直流电输入主要线圈,次要线圈输出感应电压,此感应电压

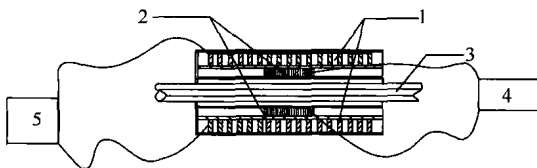


图1-6 电磁传感器基本原理

1—主要线圈; 2—次要线圈; 3—钢索;

4—输出电压; 5—直流电源

通过双线圈系统,直流电输入主要线圈,次要线圈输出感应电压,此感应电压

为瞬时, 须通过放大器经由数据采集系统得到。

这种传感器除磁化拉索外, 它不会影响拉索的其他任何力学特性和物理特性。电磁感应产生的电流强度以及电压的大小依赖于铁芯材料本身, 或者说与铁芯材料的磁导率有着直接的关系。而且, 铁芯材料的磁导率又与铁芯的应力状态相关, 可以通过该电磁感应系统测量得到的输出电压以及铁芯材料的其他参数(例如横截面积, 温度)等换算得到材料的磁导率, 因而也就可以间接地得到铁芯材料的应力状态。只要通过试验得出某种铁磁材料的磁通量随应力、温度变化规律, 就可使用弹性磁学法测试该种材料制造的拉索索力。

测试索力除了以上常用的方法外, 还有电阻应变片测试法、拉索伸长量测试法、索拉力垂度测试法。这三种方法仅在理论上可行, 实际操作中存在困难, 一般不采用。

上述方法中, 目前只有前三种在现场测试中得到广泛应用。其中压力表测试法仅适用于正在张拉的索力测试, 很难对已经张拉到位的索力进行复测。压力传感器法测试精度较高, 适合对正在张拉的索力测试, 也可用于对已张拉到位的拉索进行索力测试, 但考虑到经济原因, 一般不采用(若用此法测量张拉到位的拉索索力, 须在每根拉索的锚固端安装一个压力传感器, 花费很大)。频率法不仅具有测试仪器日趋小型化, 携带方便, 容易安装, 可以重复使用的优点, 而且其测试精度高, 因此频率法成为目前索力测试的最佳选择。

1.2.2 频率法索力测试理论研究与应用现状

随着频率法在预应力钢结构索力测试上的应用越来越广, 国内学者在索力测试频率法的研究方面也做了大量的工作。

对于单跨细长索, 大量研究结果表明, 基于弦振动理论所建立的索力与频率之间的线性关系具有很高的索力识别精度。Irvine and Caughey 系统地研究了垂跨比小于 1:8 的拉索平面内和平面外线性振动, 并通过试验验证了理论的正确性^[16~17]; B. H. Kima 等通过对拉索抗弯刚度和轴向刚度识别, 建立了索弯曲刚度影响的索力测量理论方法, 并与其他文献理论和试验结果对比说明其适用性^[18]; 对于索边界约束问题, 众多学者通过理论与工程试验研究证实, 对长索(>60m)索力测量时影响很小^[19~21]; 索斜度对索力测量的影响, 通过定性的分析研究表明, 当拉索的倾角由 20°增加到 80°时, 相同频率下索力的变化不超过 1%, 将索倾角分别取为 0°与 90°, 分析表明斜度对短索的影响小于对长索的影响, 而且对低阶频率实测索力与对高阶频率实测索力影响一样。很多研究考虑了索的刚度、垂度、边界条件以及加装减振器等因素对测试结果精度的影响^[22], 以及针对日照温度变化、雨、雪以及风等环境因素对索的基频影响的研究^[23~24]。另外, 有学者开展了利用误差分析、数理统计和循环迭代等数学方法来提高拉索

索力估算精度的研究工作^[25~26]。

从当前预应力钢结构工程应用现状和研究现状来看,对于直径小于44mm的细索以及长径比大于100的单索,采用振动法手段可以精确的测量;但对于长径比小于100,直径大于44mm的短粗拉索,现有各种方法都难以进行精确有效的测量。以上学者的研究基本上都是采用均匀拉索(均匀拉索是指两锚固点之间索段的横截面为等截面、材质均匀、材料的应力应变符合虎克定律的拉索)的振动模型,忽略了拉索锚头部分的刚度边界条件差异,且没有考虑边界约束条件对拉索自振频率的影响。在斜拉桥的索力测试中,由于斜拉索较长,忽略拉索边界部分的刚度边界差异,不会对测试精度造成显著影响。但是,对于短索,忽略此影响,会给测试结果造成较大的误差甚至错误,无法满足工程需要。

目前,预应力钢结构中多跨索的索力测量仍基于单索索力方法开展。大跨预应力钢结构多撑杆索索力测量问题的研究还处在起步阶段,还没有成熟的技术成果借鉴。应用弦振动理论和受拉直梁振动理论的索力测量公式分别对实际张弦钢桁架结构进行了索力分析结果表明,弦振动理论的测量结果误差很大。有学者根据预应力静定结构受力特征,提出了利用激光测量仪器观测索段各节点的空间位置和支座反力推算出各段索力^[27]。但此法是根据使用荷载已知的前提下提出的,当结构投入使用后,精确确定实际荷载比较困难,使用时有很大限制。也有学者研究了使用弦振计测出弦支梁结构某个撑杆的内力,然后使用磁通量法或振动法测得端部索段的索力,再通过受力平衡分析得到各跨索的索力^[28]。因为磁通量法是一种最新的测量方法,其测量精度有待于进一步研究,这些技术方法并不成熟。如何进行修正并改进提高索力的测量精度,仍需要进行深入研究。

预应力钢结构拉索索力检测核心的内容是要快速准确地测量撑杆间拉索的索力,基于振动特性识别的频率法仍然是最适合现场工程采用的测量方法。虽然在形式上撑杆间拉索可以看作特殊边界条件的短粗型单索,但是振动时相邻两跨索产生耦合振动,不但振动频率识别分析困难,更重要的是撑杆支承的边界条件随振动响应改变而变化。因此,现有的单索索力测量理论不能直接应用于多撑杆索索力的检测。需要考虑预应力钢结构构造特性建立拉索整体振动模型,研究边界及约束等条件下索力与频率分布关系。

从目前索力测试理论与技术研究来看,短粗索索力测量和带支撑多跨索索力测量问题仍然是预应力钢结构索力测试面对的主要困难。本书结合单索振动理论研究以及带撑杆多跨索索力测试理论与技术研究成果,介绍了短粗索和多跨索索力测试理论与技术的研究进展和新的思路方法,并通过工程实践和试验检验研究了索力测试理论适用性。

1.3 本书的主要内容

本书主要介绍了频率法在预应力钢结构拉索索力测量理论与技术的研究成果。本书共分为五章，各章具体内容如下。

第一章是绪论，介绍了预应力钢结构拉索索力测试技术现状和相关领域的研究现状。

第二章介绍了索的振动理论及索力计算相关的 4 个部分的内容：第 1 部分介绍了考虑不同边界条件和索刚度影响下单跨索振动模型的理论求解方法，介绍各种边界条件下建立的索力计算公式；第 2 部分是针对预应力钢结构多跨索问题，介绍预应力索单元的振动理论模型和相应的预应力索单元的刚度方程，以及方程的普适性验证，提出了由索单元组成任意多跨索振动模型的索力分析方法；第 3 部分根据任意多跨索振动模型建立的特征方程和特征方程解的优化算法，提出了多频率拟合为理论基础的索力与边界参数识别的算法；第 4 部分介绍拉索高阶模态特性，提出了高阶模态振型半波作为等效索振动模型的索力识别方法思想。

第三章介绍了多频率拟合法索力测试理论及工程应用验证。详细介绍多频率拟合法的原理、索力分析的优化算法，并通过现场试验和多个实际工程对多频率拟合法的适用性进行了验证。

第四章介绍了半波法索力测试理论及方法。介绍了半波法的实现原理、索力分析的精度，并通过现场试验和工程进行了方法验证。

第五章介绍了拉索安全监测系统的实现与开发。介绍了集成索力测试技术研究成果，进行索力安全计算与分析软件开发的内容。

2 基于振动原理的索力计算理论

2.1 索振动基本方程与解答

预应力钢结构拉索截面较小、跨度较大时，索的自由振动可以按照弦振动理论进行计算；当拉索截面较大，需要考虑索弯曲刚度影响时，通常可按照受轴向力作用的欧拉梁模型建立振动分析。本节根据工程中索实际情况，介绍忽略垂度与索力变化对振动影响的拉索振动的基本方程。拉索模型如图 2-1 所示。

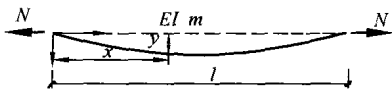


图 2-1 索振动分析模型

索拉力为 N ，定义受拉为负；索弯曲刚度 EI ；索单位质量为 m ；索长度为 l 。有弯曲刚度的拉索在静荷载作用下的挠度微分方程为

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M \quad (2-1)$$

若有轴向力 N 作用，索弯曲时轴向力将产生弯矩 $N \cdot y$ (如图 2-1 所示)，因此总弯矩为

$$M = M_q + N \cdot y \quad (2-2)$$

式中， M_q 是竖向荷载 q 作用产生的弯矩。将式 (2-2) 代入式 (2-1)，再微分两次后，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q - N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2-3)$$

在自由振动情况下，索竖向荷载就是惯性力 $q = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ，代入式 (2-3)，得到自由振动的情况下索基本微分方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2-4)$$

考虑等截面索， EI 不变，式 (2-4) 变为

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2-5)$$

分离变量法求解，设

$$y(x, t) = Y(x) \cdot T(t)$$

代入

$$EIY^{(4)}(x)T(t) + NY''(x)T(t) + mY(x)\ddot{T}(t) = 0$$

$$EI \frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} + N \frac{Y''(x)}{Y(x)} = -m \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

$$\frac{EI}{m} \frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} + \frac{N}{m} \frac{Y''(x)}{Y(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2$$

分解成两个常微分方程

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2-6)$$

$$Y^{(4)}(x) + \frac{N}{EI}Y''(x) - \frac{\omega^2 m}{EI}Y(x) = 0 \quad (2-7a)$$

方程 (2-7a) 写成

$$Y^{(4)}(x) + \alpha^2 Y''(x) - \lambda^4 Y(x) = 0 \quad (2-7b)$$

其中,

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}, \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}$$

式 (2-6) 是简谐振动方程, 表明索在时间历程上为简谐振动, 频率为 ω 。需要求解式 (2-7) 确定频率表达。

式 (2-7) 设其特解形式 $Y(x) = Ae^{Sx}$, 代入得出特征方程:

$$S^4 + \alpha^2 S^2 - \lambda^4 = 0$$

特征根为:

$$S_{1,2} = \pm \gamma i, S_{3,4} = \pm \beta$$

其中,

$$\gamma = \sqrt{\left(\lambda^4 + \frac{\alpha^4}{4}\right)^{1/2} + \frac{\alpha^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\left(\lambda^4 + \frac{\alpha^4}{4}\right)^{1/2} - \frac{\alpha^2}{2}}$$

振动方程的通解为:

$$Y(x) = C_1 \operatorname{ch}\beta x + C_2 \operatorname{sh}\beta x + C_3 \cos\gamma x + C_4 \sin\gamma x \quad (2-8)$$

其中, $C_1 \sim C_4$ 为待定常数。

考虑刚度影响的单跨拉索振动的解析解如式 (2-8)。从解表达的物理意义上来看, 拉索振动的振型形式是由三角函数与双曲函数构成的曲线。需要根据边界条件来确定振动曲线形式。

2.2 单跨索振动理论模型与索力计算方法研究

单跨拉索两端边界约束情况不同, 索振动模态会有所不同。特别是对于撑杆分割的拉索, 需要根据工程实际情况确定单跨拉索两端约束条件。显然, 由于振型表达式 (2-8) 是三角函数与双曲函数的组合形式, 复杂边界条件得到的频率

方程难以得到显式的索力与频率关系公式, 需要采用近似方法建立。一般情况下, 可以采用只有三角函数形式的振型表达式代替式 (2-8), 用能量法推导拉索索力与自振频率间的近似关系^[29~30]。

本书将采用新的近似形式, 建立不同边界条件下索力与频率的关系。

2.2.1 两端铰接拉索振动方程解析解与索力计算

两端铰接拉索边界条件 (图 2-2) 为

$$Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0;$$

$$Y(l) = 0, \quad Y''(l) = 0$$

由 $Y(0)=0, Y''(0)=0$, 代入式(2-8), 有

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ \beta^2 C_1 - \gamma^2 C_3 = 0 \end{cases}$$

可知, $C_1 = 0 \quad C_3 = 0$

式 (2-8) 变为

$$Y(x) = C_2 \operatorname{sh} \beta x + C_4 \sin \gamma x \quad (2-9)$$

同样, 由 $Y(l)=0, Y''(l)=0$ 代入式(2-8), 有

$$\begin{cases} C_2 \operatorname{sh} \beta l + C_4 \sin \gamma l = 0 \\ C_2 \beta^2 \operatorname{sh} \beta l - C_4 \gamma^2 \sin \gamma l = 0 \end{cases}$$

建立特征方程为

$$(\gamma^2 + \beta^2) \sin \gamma l \operatorname{sh} \beta l = 0$$

其中 $(\gamma^2 + \beta^2) \operatorname{sh} \beta l \neq 0$, 所以有

$$\sin \gamma l = 0 \quad (2-10)$$

方程的根为

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2-11)$$

自振频率为

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\left(\frac{EI}{m} - \frac{Nl^2}{n^2 \pi^2 m} \right)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2-12)$$

得到两端铰接拉索索力计算公式为

$$T = -N = 4 \frac{mf_n^2 l^2}{n^2} - \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (2-13a)$$

$$T = 4mf_n^2 \left(\frac{l}{n} \right)^2 - \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{n} \right)^2}$$

$$T = 4mf_n^2 L_n^2 - \frac{\pi^2 EI}{L_n^2} \quad (2-13b)$$

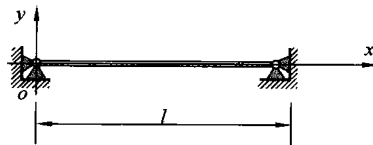


图 2-2 两端铰接拉索