高等学校经济数学基础教程
全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

线性代数

（第二版）

张从军　时洪波
鲍远圣　陈美霞　编著

博学·经济数学系列

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

高等学校经济数学基础教程
全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

线性代数

（第二版）

张从军　时洪波
鲍远圣　陈美霞　编著

博学·经济数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张从军等编著. —2版. —上海:复旦大学出版社,2010.8
(复旦博学·经济数学系列)
ISBN 978-7-309-07485-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. 张… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 139487 号

线性代数(第二版)
张从军 时洪波 鲍远圣 陈美霞 编著
出品人/贺圣遂 责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
杭州钱江彩色印务有限公司

开本 787×960 1/16 印张 19.5 字数 343 千
2010 年 8 月第 2 版第 1 次印刷
印数 1—5 100

ISBN 978-7-309-07485-7/O·457
定价:30.00 元

内容提要

本书是“高等学校经济数学基础教程”之一，为财经类各专业本科二年级线性代数课程的教材．书中除了介绍通常的线性代数的内容外，还特别介绍了它们的经济应用，并添加了相应的数学软件及数学建模的基本方法．

本书主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性规划等各章，并配有适量习题．书后附有数学的作用与魅力、回首线性代数、21世纪专业人才的数学素养随想等3个附录．

本书贯穿问题教学法的基本思想，对许多数学概念，先从提出经济问题入手，再引入数学概念，介绍数学工具，最后解决所提出的问题，从而使学生了解应用背景，提高学习的积极性；书中详细介绍相应的数学软件，为学生将来的研究工作和就业奠定基础；穿插于全书的数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合．因此，本书可最大限度地适应财经类各专业学习线性代数课程和后续课程的需要，以及报考研究生的需要和将来从事与财经有关的实际工作的需要．

本书适合作为高等学校财经类各专业线性代数课程的教材，也可供自学者选用和经济工作者及有关教师参考．

再版前言

本教材是我们为经济管理类相关专业编写的数学基础课程，自 2006 年出版以来，得到了许多院系师生的充分肯定．经过多年使用，我们收到了许多读者的宝贵意见，同时也发现了不少需要修改与提高之处．

我们一直认为，编写此类教材不是一劳永逸、一蹴而就的事，既要保持相对的连续性和稳定性，又要紧紧围绕人才培养的目标体系、课程体系，吸收最新的教学科研成果，不断修改，方能日臻完善．

为了满足广大学生的实际使用需要，更好地兼顾教材内容的思想性与工具性、科学性与可接受性、先进性与适用性，更有利于提高学生的数学素养和应用能力，我们需要对教材内容作进一步的精雕细琢．

我们主持承担的教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题（教高司 2007-143 号）、江苏省高等教育教改立项研究课题（苏教高〔2007〕18 号）、全国高等学校教学研究中心课题（科技部项目编号 2009IM010400，子项目编号 2009IM010400-1-38）的研究内容之一，就是如何优化经济管理专业数学基础的课程体系和教学内容，如何打造精品教材，这同样要求我们不断学习，不断思考，不断探索．

值此再版机会，我们希望再次表达我们的谢意．感谢各相关学校、院系对我们的支持和鼓励，感谢使用该教材的教师和读者给我们提出的宝贵意见，感谢关心该系列教材不断完善的有关校领导和教务部门，感谢复旦大学出版社，特别是该教材的责任编辑、理科总监范仁梅女士．

仍诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用该教材的教师和学生，提出并反馈你们的宝贵意见．

编　者

于南京财经大学

2010 年 4 月 16 日

前　言

随着社会经济的迅猛发展,随着数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显,随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域,对高等学校财经类各专业人才的数学素养要求越来越高. 作为经济数学基础课程之一的线性代数课程,在提高财经类专业人才的数学素养方面,起着至关重要的基础性作用. 这门课程的思想和方法,是人类文明发展史上理性智慧的结晶,它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具,同时还给学生提供一种思维的训练,帮助学生具备作为复合型、创造型、应用型人才所必需的文化素质和修养.

怎样使经济数学基础课程充分发挥上述作用? 怎样使经济数学基础课程更趋符合培养目标的课程体系? 怎样兼顾经济数学基础课程的理论性与应用性、思想性与工具性? 怎样突出经济数学基础课程的财经类专业特色? 现有的经济数学基础教材固然很多,但要处理好以上问题,仍需认认真真地思考与探索,仍有大量的工作要做. 作为我们主持承担的全国高等教育科学"十五"规划重点研究课题的研究内容之一,我们编写了现在的这套经济数学基础课程教材,本书是其中的线性代数部分. 我们在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面按照上述要求作了一些尝试.

我们特别注重了以下几点:

1. 最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要, 以及报考研究生和将来从事与财经有关的实际工作的需要.

2. 贯彻问题教学法的基本思想,对许多数学概念,先从提出经济问题入手,再引入数学概念,介绍数学工具,最后解决所提出的问题,使学生了解应用背景,提高学习的积极性.

3. 详细介绍相应的数学软件,为学生将来的研究工作和就业奠定基础.

4. 突出了矩阵的主线作用，增加了线性规划的内容，穿插了数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合.

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分，最后对全书进行修改、补充、统稿、定稿. 陈美霞副教授编写了第一、第二章以及全书的软件部分内容，鲍远圣老师编写了第三、第七章，时洪波博士编写了第四至第六章.

复旦大学数学科学学院姚慕生教授审阅了书稿并提出了宝贵意见，香港科技大学王小灵副教授阅读了书稿并提出了有益的建议，南京财经大学应用数学系伍家凤老师协助仔细校对了全部书稿并修改了多处疏漏，一些经济数学基础课程的任课教师在教学中试用了本书内容. 编者在此向他们表示衷心感谢！

我们还要感谢南京财经大学的有关校领导和教学管理部门的负责人，他们对本书的编写工作给予了许多指导和帮助；感谢复旦大学出版社，特别是科技编辑室主任范仁梅女士，他们对该书的出版给予了大力支持. 他们的严谨作风和敬业精神、出色的编辑工作使编者深受感动.

本书在编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的有关内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意.

编写一本教材似乎不难，但编写一本适用的教材绝非易事. 编写此类经济数学基础教材更不是一劳永逸、一蹴而就的事. 因此，既要保持相对的连续性和稳定性，又要紧紧围绕人才培养的目标体系、课程体系，吸收最新的有关教学科研成果，不断修改完善. 作为一项教学研究课题，我们还在探索之中，诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用这套教材的教师和学生，提出并反馈宝贵意见.

yysxx@njue.edu.cn

编　者

于南京财经大学

2006 年 1 月 6 日

目　　录

第一章　行　列　式

行列式的概念始于 300 多年以前，首先引入这一概念的是日本数学家关孝和. 目前形式的行列式记号则是 1841 年英国数学家凯莱(Cayley)首次给出的.

行列式的出现与求解线性方程组密切相关. 由于其简洁明了的表达形式和系统规律的运算性质，它成为许多数学领域表述和计算的工具，在其他学科分支中也有着广泛的应用.

本章从几个实际经济问题入手，表明学习行列式这一数学工具的必要，进而引入其概念，讨论其性质，介绍其常用的计算方法和技巧.

本章是学习线性方程组和以后各章相关内容的基础.

§1.1　从货物交换和费用分摊问题谈起

一、货物交换的经济模型

诺贝尔经济学奖获得者列昂惕夫(Leontief)曾考虑如下的一个经济学模型. 在一个原始部落，根据分工，人们分别从事 3 种劳动：农田耕作(记为 F)、农具与工具的制作(记为 M)，以及织物的编织(记为 C). 人们之间的贸易是实物交易. 图 1-1 给出这 3 组人之间的交易系统. 图中所示表明，农夫们将每年收获的一半留给自己，并分别拿出 $\frac{1}{4}$ 给工匠们和织布者们；而工匠们却平均分配他们制作的用具给每个组；织布者们则留下 $\frac{1}{4}$ 的衣物给自己，并拿出 $\frac{1}{4}$ 给工匠们、$\frac{1}{2}$ 给农夫们. 此交易系统也可以用表给出，见表 1-1.

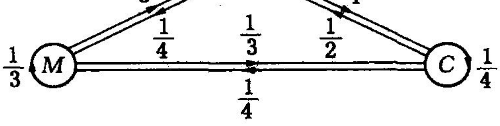


图 1-1

表 1-1

分配比例 分工 \ 分工	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

随着社会的发展,实物交易形式变得十分不方便,于是部落决定用货币进行交易.假设没有资本和负债,那么如何给每类产品定价,使其公正地体现旧有的实物交易系统呢?

令 x_1 为农作物的价值, x_2 为农具及工具的价值, x_3 为织物的价值,那么由表 1-1 的第 1 行,农夫们生产的价值应等于他们交换到的产品(包括留给自己的)价值,即有

$$x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

同理,可得工匠们和纺织者们生产与交换的价值方程为

$$x_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3.$$

整理得如下方程组:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0. \end{cases}$$

因此,该问题可归结为一个**三元一次线性方程组**的求解问题.

二、费用分摊问题

设一个公司有 3 个生产部门 P_1, P_2, P_3 和 4 个管理部门 M_1, M_2, M_3, M_4. 公司规定,每个管理部门的费用由生产部门及其他管理部门分摊,分摊比例由服务量确定,现已知分摊费用比例如表 1-2 所示.

表 1-2

管理部门 \ 分摊比例 \ 部门	M_1	M_2	M_3	M_4	P_1	P_2	P_3	自身费用(万元)
M_1	0	0.04	0.10	0.10	0.27	0.26	0.23	4
M_2	0.08	0	0.15	0.04	0.21	0.30	0.22	3.5
M_3	0	0	0	0.10	0.30	0.30	0.30	15
M_4	0.10	0.08	0.08	0	0.24	0.25	0.25	2.5

设各个管理部门 M_1, M_2, M_3, M_4 的自身费用(如人员工资、办公费用等)依次为 4 万元、3.5 万元、15 万元、2.5 万元. 试确定每个管理部门的总费用(自身费用加上承担其他部门的费用).

设管理部门 M_1, M_2, M_3, M_4 发生的总费用分别为 x_1 万元、x_2 万元、x_3 万元和 x_4 万元,由表 1-2 可知,对管理部门 M_1,应有如下等式:

$$x_1 = 4 + 0.08x_2 + 0.1x_4.$$

同理,对 M_2, M_3, M_4,有如下的 3 个等式:

$$x_2 = 3.5 + 0.04x_1 + 0.08x_4,$$

$$x_3 = 15 + 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.08x_4,$$

$$x_4 = 2.5 + 0.1x_1 + 0.04x_2 + 0.1x_3.$$

因此,费用分摊问题可归结为如下的**四元一次线性方程组**的求解:

$$\begin{cases} x_1 - 0.08x_2 \qquad\qquad - 0.1x_4 = 4, \\ -0.04x_1 + x_2 \qquad\quad - 0.08x_4 = 3.5, \\ -0.1x_1 - 0.15x_2 + x_3 - 0.08x_4 = 15, \\ -0.1x_1 - 0.04x_2 - 0.1x_3 + x_4 = 2.5. \end{cases}$$

大量的社会经济现象的研究最终都可以归结为形如上述的 ***n* 个方程 *n* 个未知数的齐次线性方程组**(右边常数项全部为零)或**非齐次线性方程组**(右边常数项至少有一个非零)的求解. 因此对此类方程组的求解就十分重要而有意义.

在中学数学里,我们曾用加减消元法求解如下的二元一次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1}$$

对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$ 时，该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_2=\dfrac{b_1a_{31}a_{23}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{21}a_{13}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_3=\dfrac{b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{31}a_{12}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

当未知数个数和方程个数增加时，用加减消元法得到的类似(1.1)式、(1.2)式的公式将更加复杂. 这就需要研究上面(1.1)式、(1.2)式所包含的规律，介绍行列式的概念.

§1.2 行列式的概念

一、二阶、三阶行列式

定义 1.1 将 2^2 个数排列成：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称此为**二阶行列式**，记作 D，且定义 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，也称此为**二阶行列式的展开式**，式中数 $a_{ij}\ (i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，其第 1 下标 i 为行标，第 2 下标 j 为列标，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行，第 j 列.

例 1.1 计算 $D_1=\begin{vmatrix} 20 & 11 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$.

解 由定义 1.1，$D_1=20\times(-1)-11\times(-2)=2$，$D_2=a^2-b^2$.

定义 1.2 将 3^2 个数排列成：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称此为**三阶行列式**，记作 D，且定义 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$，也称此为**三阶行列式的展开式**.

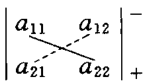
例 1.2 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 的值.

解 由定义 1.2，有

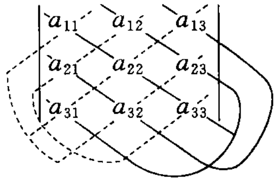
$$D=1\times5\times9+3\times4\times8+2\times6\times7-3\times5\times7-1\times6\times8-2\times4\times9$$
$$=0.$$

二阶、三阶行列式的展开式遵循以下的对角线法则.

对角线法则



$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}$



$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$+a_{11}a_{22}a_{33}$

有了二阶行列式的定义,当 $D\neq0$ 时,二元一次线性方程组的解可以方便地用下式表示:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D},\\ x_2=\dfrac{D_2}{D},\end{cases}\tag{1.3}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}.$$

同理,有了三阶行列式的定义,当 $D\neq0$ 时,三元一次线性方程组的解可以方便地用下式表示:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D},\\ x_2=\dfrac{D_2}{D},\\ x_3=\dfrac{D_3}{D},\end{cases}\tag{1.4}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

D 称为方程组的**系数行列式**, D_j 则是用常数列替代 D 中第 j 列元素所得到的行列式.

例 1.3 解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-3,\\-2x_1+3x_2-x_3=1,\\2x_1-x_2+3x_3=9.\end{cases}$

解 先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}$$
$$=1\times3\times3+(-2)\times(-2)\times(-1)+1\times(-1)\times2-(-2)\times3\times2-1\times(-1)\times(-1)-1\times(-2)\times3=20\neq0,$$

因此原方程组有唯一解.同理可计算得

$$D_1=\begin{vmatrix}-3&1&-2\\1&3&-1\\9&-1&3\end{vmatrix}=20,\ D_2=\begin{vmatrix}1&-3&-2\\-2&1&-1\\2&9&3\end{vmatrix}=40,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&-3\\-2&3&1\\2&-1&9\end{vmatrix}=60,$$

再代入(1.4)式得:$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. 经检验是原方程组的解.

(1.3)式和(1.4)式形式规范,便于记忆,明显地表达了方程组的解与相应的方程组的系数和常数项的关系.这就启发我们考虑:n 个方程 n 个未知数的方程组究竟在什么条件下有解?如果有解,是否能有规律地表达并能求解?要解决上述问题,首先便要引入 n 阶行列式的定义,然后研究:n 阶行列式的展开式会有几项?符号该如何决定?规律是什么?为此,让我们先从三阶行列式的展开式的取值特点开始分析.

二、全排列及其逆序数

分析三阶行列式的展开式,不难发现:

(1) 展开式中共有 3! 项,且每项都是不同行、不同列的 3 个元素之积.如果将每项的第一个下标(即行标号)按自然顺序排列,则任一项可用 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 表示,$p_1p_2p_3$(列标排列)是 1, 2, 3 的某一排列,显然这样的排列的总个数恰为 3! 个;

(2) 展开式中所有项都带符号,一半正,一半负. 3 项正的 $p_1p_2p_3$ 排列依次是:123, 231, 312;而 3 项负的 $p_1p_2p_3$ 排列依次是:321, 213, 132. 符号的决定与排列方式有关.

下面给出排列及逆序的概念.

定义 1.3 由 1, 2, …, n 这 n 个数或 n 个不同元素按某种次序所排成的一个数组或元素序列 $p_1p_2\cdots p_n$ 叫做一个 **n 级排列.**

显然，n 级排列的总个数为 $n!$.

对于 n 个不同的元素，规定由小到大的排列为**标准排列**，也称为**自然排列**. 例如，"$123\cdots n$"即为一 n 级自然排列.

定义 1.4 对于 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中任意取定的两个数 p_k 和 p_s，如果 p_k 在 p_s 前面，而 $p_k > p_s$，则称 p_k 与 p_s 形成一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的个数叫做该排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

如 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数，则称排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为**奇排列**，反之则为**偶排列**. 自然排列的逆序数为 0，也归入偶排列.

例 1.4 求排列 6743215 的逆序数，并指明其奇偶性.

解 $\tau(6743215) = 0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 2 = 16$，即为偶排列.

例 1.5 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 1) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.5 将一个排列中的某两个数互换位置，其余各数不变，称为一次**对换**. 如排列中相邻的两个元素交换位置，称为**相邻对换**.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性.

证 首先考虑相邻对换. 由于相邻两数与其他数是否构成逆序不会因为这两个数的互换而改变，因而这种对换仅使原排列增加(原两数之间未形成逆序)或减少(原两数之间已形成逆序)一个逆序，所以结论成立.

其次考虑一般情况. 一般对换可以看成奇数次相邻对换的结果，即

$$p_1\cdots p_r\cdots p_{r+s}\cdots p_n \xrightarrow[\text{相邻对换}]{p_{r+s}\text{ 往前 } s-1 \text{ 次}} p_1\cdots p_rp_{r+s}\cdots p_{r+s+1}\cdots p_n$$

$$\xrightarrow{p_r\text{ 往后 } s \text{ 次相邻对换}} p_1\cdots p_{r+s}\cdots p_rp_{r+s+1}\cdots p_n.$$

共进行了 $2s-1$ 次相邻对换，元素 p_r 与 p_{r+s} 进行了一次对换，所以排列的奇偶性改变. 证毕.

推论 1.1 奇排列经对换成为自然排列的次数为奇数，偶排列经对换成为自然排列的次数为偶数.

推论 1.2 所有的 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半.

三、n 阶行列式的定义

前面已提到，三阶行列式的展开式的一般项可表达为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中 $p_1p_2p_3$ 是列标排列，且带正号的三项的列标排列为 123，231，312；而带负号的三项的列标排列为：321，213，312. 分别计算它们的逆序数得：