

有色金属继续教育丛书

选矿数学模型

尹 蒂 李松仁 编著

号010字登祿册

中南工业大学出版社

序

继续教育，是对在职专业技术人员不断进行知识技能补充、更新、拓宽和提高的一种追加教育，这种与科研、生产任务密切结合的教育形式，对于专业技术人员提高科技水平和创造能力，并使最新的科技成果迅速转化为生产力，具有重要的意义。总公司教育局根据有色金属企事业单位专业技术人员在在职学习的特点，组织有关企业、科研院所、高等学校的专家，编写了这一套有色金属继续教育丛书，为广大专业技术工作者在职学习提供了方便，这是一件很有意义的工作。

邓小平同志曾精辟地指出：“科学技术是第一生产力”。我们搞改革、搞开放、搞建设，不抓科学技术这一生产力是没有出路的。有色金属工业的发展也必须重视教育和科学技术。随着有色金属企业经营机制的转换，企业要直接在商品经济的海洋中搏击，没有科学技术这一第一生产力做后盾是不行的。发展科技，最重要的是人才，企业的竞争最终是人才的竞争。当前科学技术发展迅猛，日新月异，仅靠在大学里学到的知识是远远不够的，经济发达国家的教育模式正在从“一次教育”向“终身教育”过渡。

需要指出的是，各单位要积极创造条件，采取有力措施，为广大专业技术工作者学习提供条件，支持他们不断提高水

平；同时，从事专业技术工作的同志要勤于学习，学习本专业、本岗位需要的新理论、新技术、新工艺以及新的管理方法。只有勤于学习，才能适应改革开放的新形势，才能为有色金属工业的发展更好地贡献自己的聪明才智。

中国有色金属工业总公司

副 总 经 理 何伯泉

1992年7月24日

前 言

先进工业国家60年代开始研究电子计算机在选矿工程中的应用，70年代逐步进入实用阶段并初见成效，80年代以来，计算机应用已渗透到矿石可选性预测、试验研究、选矿厂设计、过程控制、生产规划和管理决策等各个领域，取得了明显的技术、经济效益。计算机在选矿中的应用，往往要有数学模型为基础。因此，数学模型和计算机的应用水平已成为衡量选矿现代化的重要标志之一，引起国内外选矿界的普遍重视和浓厚的兴趣，专家们力图通过数学模型和计算机技术来促进传统的选矿工程的改造，提高选矿技术水平和经济效益，增强企业的竞争能力。

我国选矿数学模型和计算机应用的研究起步较晚，大体始于70年代末、80年代初，但是发展很快。1983年，胡为柏教授和本书作者之一出版了我国第一部矿物工程数学模型的专著（《数学模型在矿物工程中的应用》，湖南科学技术出版社），1984年又正式成立了中国选矿科技情报网数学模型及计算机应用网，此后，中国金属学会、中国有色金属学会亦相继成立了计算机应用专业委员会，这对我国选矿数学模型和计算机应用的迅速发展起到了良好的推动作用。目前，我国磨矿、分级模型，浮选模型，以及某些重选设备模型的研究，已达到国外同类研究的水平，在一些新技术的引入方面，例如随机过程、模糊数学、系统辨识和专家系统的引入，已进入国际先进水平的行列，前景是光明的。

本书是顺乎选矿科学技术发展的趋势，适应继续工程教育之需要，根据作者十多年来从事该领域教学、科研的经验而编写的。针对读者的特点，着重论述选矿数学模型的建立方法，以及如何运用数学模型来解决实际的选矿问题，书中各章之后均附有例题和习题，附录给出了实用程序，便于读者学习和应用。选矿数学模型是一门新课程，要在修完选矿专业课、应用统计、计算方法、最优化方法和计算机语言的基础上进行学习。鉴于选矿专业学生对上述数学内容学得不多，为了使读者能较顺利地阅读本书，对所涉及的数学内容作了扼要的介绍。

在本书的编写过程中，得到了中国有色金属工业总公司教育局有关领导的关心和支持，并承全国有色系统继续工程教育选矿专业组邀请国内有关厂矿企业、科研设计院所和高等学校的部分专家集体审阅，提出了许多宝贵的意见和建议，中南工业大学函授学院成人教育部的有关同志也为本书的出版付出了辛勤的劳动，仅在此一并表示谢意。

由于对继续工程教育的特点和规律认识不足，加之作者的水平有限，书中错漏和不足之处在所难免，敬请读者指正。

作 者

1992年7月于长沙

目 录

1 绪论	(1)
1.1 数学模型的意义.....	(1)
1.2 数学模型的分类.....	(2)
1.3 建立数学模型的步骤.....	(4)
1.4 选矿数学模型的应用.....	(5)
2 经验模型	(7)
2.1 概述.....	(7)
2.2 数据处理.....	(9)
2.3 一元线性回归模型.....	(15)
2.4 多元线性回归模型.....	(24)
2.5 非线性回归模型.....	(41)
3 粒度分离模型	(60)
3.1 概述.....	(60)
3.2 粒度分离模型的基本概念.....	(61)
3.3 振动筛模型.....	(64)
3.4 水力旋流器模型.....	(71)
3.5 螺旋分级机模型.....	(85)
4 粉碎模型	(97)
4.1 概述.....	(97)
4.2 破碎机模型.....	(99)
4.3 球磨机模型.....	(118)
4.4 棒磨机模型.....	(158)
4.5 自磨机模型.....	(158)

5 磨矿分级回路模型	(178)
5.1 磨矿分级回路模型方程组.....	(178)
5.2 磨矿分级回路模型的应用.....	(181)
5.3 磨矿分级回路的序贯模块模拟法.....	(185)
6 浮选模型	(191)
6.1 概述.....	(191)
6.2 浮选动力学.....	(192)
6.3 分批浮选模型.....	(196)
6.4 连续浮选模型.....	(219)
7 重磁选模型	(247)
7.1 概述.....	(247)
7.2 比重分配曲线.....	(248)
7.3 重介质选矿模型.....	(251)
7.4 螺旋选矿机模型.....	(255)
7.5 摇床模型.....	(262)
7.6 筒式磁选机模型.....	(265)
8 物料平衡和数据调整	(269)
8.1 概述.....	(269)
8.2 二产品作业物料平衡计算.....	(271)
8.3 多产品作业物料平衡计算.....	(277)
8.4 选矿流程物料平衡计算.....	(283)
附录一 选矿经验模型及物料平衡常用程序	(302)
附录二 伽玛函数近似算法	(385)
附录三 附表	(386)
附录四 习题答案	(400)
参考文献	(404)

1 绪 论

1.1 数学模型的意义

矿物工程的基本任务是对各种矿物分选和预处理过程进行工程分析,开展为技术开发所必须的各项研究,制定最合适的技术方案和操作条件,设计和选择最合适的设备和流程。在这些任务中,尽管有些只需依靠定性的概念,即能获得一定程度的解决,但是要“心中有数”,做到“知其然,知其所以然”,还需要提高到定量的高度。从定性到定量是一个质的飞跃,没有这个飞跃,就不能真正彻底解决上述问题,也谈不上实现最优化。

随着矿物工程学的深入发展和计算机技术的广泛应用,60年代开始逐步发展了“数学模拟”技术。它是实践知识、理论研究和计算机技术三方面发展到一定阶段相结合才出现的新生事物。

所谓“数学模拟”就是根据矿物工程学的原理,通过必要的实验,在一些近似假定之下,对选矿过程进行数学的描述,这就是数学模型。然后按照数学模型在电子计算机上进行数值计算或在计算机上改变模型各种参数作模拟实际装置的“数学实验”(又叫“模拟实验”)。这样,就可以求出在各种不同条件下的过程的各种行为,从而进行工程放大和实现选矿生产的最佳操作和控制。这种方法叫“数学模拟方法”。通常又称为过程模拟。

过程模拟离不开数学模型。数学模型是客观过程中变量关系的数学抽象，是描述过程运行规律的数学式，一般是一组或几组代数方程、微分方程、偏微分方程或差分方程。

数学模型的建立是数学模拟方法中最复杂、最关键的一步，也是最困难的部分，是整个模拟过程的核心，是计算机高级技术在工业过程中得到成功应用的关键。

1.2 数学模型分类

根据模型性质和建立数学模型的方法不同，对数学模型可以作不同的分类。

从建立数学模型的根据，可将模型分为：由过程机理推导而得的机理模型，由经验数据归纳而得的经验模型和介于二者之间的综合模型。

机理模型又称为理论模型，是从分析选矿过程的物理和化学本质的机理出发，利用物理化学基本规律建立系统的数学描述方程式。这种模型的优点是：科学性严密，物理意义明确，充分利用基础理论研究的成果来探索新的过程，对于从理论上指导实际生产有重大意义。缺点是：必须对机理有较深入的分析，要求比较全面的基础数据，而这些往往是缺乏的；而且由于实际过程的影响因素太多，模型的建立十分困难，且往往必须做各种简化，从而影响了模型的实用性。

经验模型是以小型实验、中间试验或生产过程中的实测数据为基础的模型。根据测定结果，撇开过程的本质不管，直接对数据进行数理统计分析，得到各变量之间的函数关系。这种模型又分为两种情况：一种是被动法，即利用正常操作数据作统计分析。根据大量生产操作测定的数据，通过回归分析方法找

出变量之间的函数关系。但因为正常生产数据的工艺条件变化不大，测量也不甚准确，往往不易找出其固有的规律。另一种是主动法，又称为试验设计法，即通过有计划地做一些因子试验，然后测定这些因子变化引起的因变量变化，通过数理统计归纳出函数关系。这种方法若利用生产过程进行，往往要影响正常生产。

经验模型的优点是：不必做大量基础理论研究，得出的模型较简便，因为直接从实践中来，故不必担心理论与实际的差距。缺点是：过程实质被掩盖起来，模型没有外推性。

综合模型是通过理论分析，确定变量之间的函数关系形式，再通过正常操作或试验数据来确定此函数式中各参数的值，也就是把机理模型法和经验模型法结合起来而得到的一种模型，又称为现象学模型 (phenomenological model)。

从过程的时间因素考虑，可将模型分为稳态模型 (steady-state model) 和动态模型 (dynamic model)。前者不包括时间变量，并且假定其他变量也不随时间变化；后者不仅包含时间变量，而且其他变量或参数也可能随时间而变化。

按照选矿过程的操作方式，可以将模型分为分批过程模型 (batch process model) 或半分批过程模型 (semi-batch process model) 和连续过程模型 (continuous process model)。分批过程的特点是一次加料，处理结束之后一次出产品。最典型的例子是实验室磨矿。半分批过程中，有些物料是一次加入，而另一些物料则是连续加入或连续排出。典型的是实验室浮选试验，浮选物料是一次加入，但空气是连续引入和排出，泡沫产品也是连续排出的。为了方便起见，本书中将半分批过程归入分批过程一类。连续过程是物料连续地通过实验或生产装置，选矿生产过程大多是连续过程。

数学模型的分法方法还很多，但常用的是上述三种分法。

1.3 建立数学模型的步骤

建立数学模型的步骤（图1-1）应包括：

1. 模型对象分析。首先应确定模型的对象。对象不同，模型不同。模型的范围可以小到一个单元操作，大的可以是包括整个过程或系统。另外，目的不同，模型亦异。例如，对于

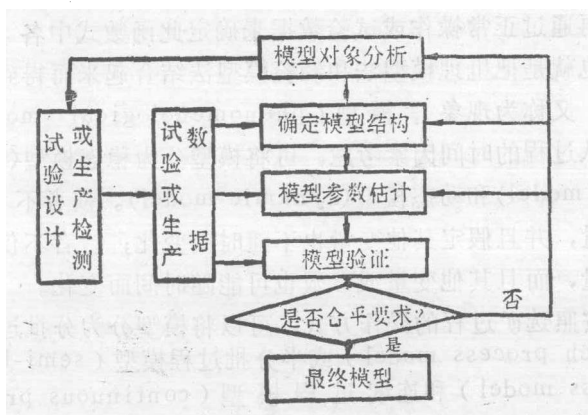


图1-1 建立数学模型的步骤

同一分选过程，如目的在于研究各项因素对回收率的影响，则主要牵涉到药剂用量、充气量、浮选时间、磨矿细度等因素；如目的在于确定最经济的操作条件，那末模型中就应包括有关经济核算的公式才行。确定对象和目标的过程，还必须对其作深入的分析，找出那些有可能影响过程状态的主要因素及其相

互关系。

2. 确定模型结构。根据对象的特点以及我们对对象本质了解的程度，首先用物理的语言对过程加以描述，然后才用数学的语言表达，得出模型函数式。这种描述应将实际过程合理地简化，对各种因素取主舍次，简化成能够进行描述，抽象为一个数学模型。数学模型的特征是“简化”，没有简化就不能成为“模型”。模型的优劣也取决于对过程简化的合理性。一般说来，应当做到：简化而不丢失真实性；简化而能满足应用的要求；简化而能适应当前实验条件；简化而能适应现有计算机能力。

3. 模型参数估计。模型参数估计是一个十分重要的问题。首先应合理地选择用以描述模型的适当参数，然后根据实验数据来求取模型式中所含参数的值。模型参数除个别可以根据过程机理推导而得到外，大部分通过下面两种方法得到：一种是用现阶段的实验技术独立进行测定；另一种是通过模型计算的结果和实验结果相比较，反推而得。这种方法主要用于难以测定或不能独立测定的参数。不管采用哪种方法，其基本原则是一致的，即选取参数值以使模型计算值与实测值最接近。

4. 模型验证。模型来源于实践，又高于实践；反过来，它又不断接受实践的检验。检验的内容是：简化的合理性，数学表达式的正确性，参数估计的可靠性，条件和环境的变动性等。检验的标准仍然是模型预测值与试验观察值是否吻合。

1.4 选矿数学模型的应用

矿物工程涉及矿产资源的开发利用，在整个科研、设计和生产过程中，都可以应用数学模型。数学模型与选矿科研、设

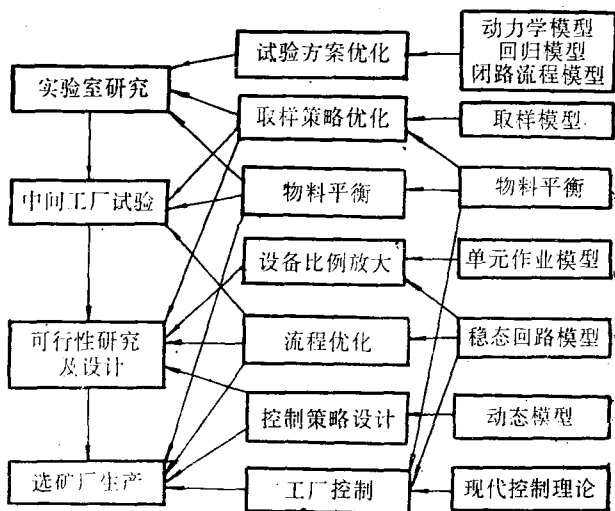


图1-2 数学模型在选矿科研、设计和生产中的应用

设计和生产的联系如图1-2所示。

从图1-2中可以看出，数学模型和过程模拟的广泛应用，必将对传统的矿产资源开发过程产生深刻的变革。根据小型试验及矿物工程资料建立的数学模型，可剔除不合理的闭路流程方案，用来指导中间试验。中试结果又可以修正数学模型使之适用化。修正后的模型又可用于工厂流程的优化设计。工厂开工后的实际生产数据对模型作进一步修正，可用来指导生产操作及生产过程的计算机控制。数学模型的应用，大大减少了试验的盲目性，能够节约人力、物力和时间，并把生产技术建立在较高的技术水平之上。

2 经验模型

2.1 概述

经验模型的形式和参数均来自生产检测和试验测定的结果。任何事物或过程总是受着许多因素的影响。这些因素或变量是相互联系、相互制约的，也就是说，它们之间客观上存在着一定的关系。建立经验模型，即是从生产数据或试验数据中找出描述这些变量之间依存关系的数学表达式。

变量之间的关系分为两类。一类是它们之间具有确定性函数关系，在数学分析中就是以完全确定的函数关系为研究对象的。另一类是不确定关系，或所谓相关关系。这是指两个或两个以上的变量间，当一个量唯一地确定以后，另一个量并不唯一确定，但它又不是毫无规律地任意取值，而是按一定的概率分布取各种可能值。例如，人的体重与身长；树高与树径；钢球的耐磨性与其自身的硬度等。

确定性关系与相关关系之间没有严格界限。它们彼此相互区别而又相互联系，在一定条件下又可以相互转化。在实验过程中往往由于因素的错综复杂，或是存在误差及随机因素的影响，使确定性关系通过相关关系表现出来。

本章的目的，就是利用数理统计的方法，找出具有相关关系的变量之间的数学表达式（数学模型），并讨论这些模型将在多大程度上反映这些变量之间的相关关系。利用这些模型以及这些模型的精度估计，就可以用来预报未知变量或控制变量

的变化。这种应用统计方法对大量试验或观测数据进行加工处理，以寻求各变量相关关系的统计规律性的理论和方法就是回归分析，它是数理统计的一个重要分支，是建立经验模型的主要方法。这种方法的特点是不需要对过程的机理作透彻的了解，而是把过程本身当作“黑箱”，仅仅研究输入（自变量）和输出（因变量）之间的定量关系，不管“黑箱”内部的变化，如图2-1所示。

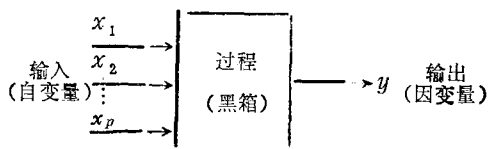


图2-1 建立经验模型的黑箱观点

利用回归分析建立经验模型的步骤是：

1. 通过试验或现场检测获取必要而充分的数据。
2. 对数据进行必要的处理，主要包括判别和剔除异常数据以及弥补遗漏数据。

3. 根据试验或检测数据、实际操作经验以及专业理论知识，确定模型形式。其具体做法是：当只有一个自变量时，可利用散点图形状选择适当的模型形式，如果有多个自变量，一般先选择线性模型，如果失败，再选择非线性模型，反复修正，最终找出合适的模型形式。

4. 根据最小二乘原理估计模型参数。

5. 对所建立的模型进行统计检验，以考查模型的显著性、精度和拟合度。

6. 根据试验或观测数据与模型计算结果的偏差大小以及要

求的精度判断模型是否适用。如果不适用，返回到第3步，重新选择模型形式，改进模型，直到模型适合于实际情况。

根据获取数据的途径可以把建立经验模型的方法分了两类：

主动法 在实验室中按照试验设计的原理主动安排试验条件，获取试验数据，或者对生产过程进行有计划的干扰试验，并在各种干扰条件下搜集生产数据。这种方法的优点是针对性强，搜集数据的时间和所需数据的数量都较少，所建立的模型适应性强。

被动法 利用现有的试验研究资料，或者利用选矿厂正常操作条件下的大量生产数据进行统计分析，建立模型。被动法的优点是可利用现有的资料和数据，不需要对生产过程施加任何干扰；但所需搜集的数据量大、时间长，所建模型的适应性较差。

经验模型的建立所涉及的数学知识较少，一般说来，具有线性代数、概率论和数理统计的基本知识即可。

经验模型的最大优点是容易建立，只要掌握有关建模对象的必要而充分的数据就可以建立模型，不需要对过程机理有深入的了解；其次，经验模型在一定的条件和范围内具有足够的精度，可以满足对生产过程进行分析、预测、模拟和控制的需要。经验模型的主要缺点是没有令人满意的外推性，即在一定条件、一定范围内建立的模型一般不能在另一条件、另一范围内加以推广应用。

2.2 数据处理

实验数据是建立数学模型的依据，是科学研究的前提。在

一批实验数据中，如混杂有异常数据，则必然会歪曲实验结果。因此，必须正确地剔除异常数据。另一方面，由于在特定条件下进行实验测量的随机波动性，致使测量数据有一定的分散性。如果人为地丢掉一些误差较大的但不属于异常的数据，就会造成虚假的高精度，这也是不正确的。

人们对异常数据的判别与剔除，往往采用两种方法：

1. 物理判别法 即在实验过程中，根据常识或经验，判断由于事故、误读等原因造成的异常数据，随时发现，随时剔除。

2. 统计判别法 给予一置信概率（例如0.99），并确定一个置信限，凡超过此限的误差，就认为它不属于随机误差范围，而属于异常数据，应予剔除。

现介绍几种剔除异常数据的方法如下：

一、拉依达（Raùta）准则

对实验数据 x_1, x_2, \dots, x_n ，计算均值 \bar{x} ：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

和标准差 σ ：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

若某个测量值 x_j 的残差 $v_j = x_j - \bar{x}$ ($1 \leq j \leq n$) 满足

$$|v_j| > 3\sigma$$

则认为 x_j 是异常数据，应予剔除。这里， 3σ 作为极限误差，因此拉依达准则又称为 3σ 准则。应指出的是 3σ 准则是建立在 $n \rightarrow \infty$ 的前提下，当 n 较小时 3σ 准则不十分可靠，这时可用其他准则。