# 中学数学方法论

李翼忠 编著

广东高等教育出版社

# 中学数学方法论

李翼忠　编著

广东高等教育出版社

中学数学方法论
李翼忠编著
・ ・ ・
广东高等教育出版社出版
华南师范大学印刷厂印刷
787×1092毫米 32开 7.875印张 157.5千字
1986年7月第1版 1988年8月第2次印刷
印数 6,001—3,000
统一书号：7343·30 定价：1.80元

# 前　　言

本书是为了高等师范数学专业培养中学数学教师开设选课而编写的。还可供大专院校数学专业学生、数学教育研究人员和中学数学教师参考。

本书内容是针对中学数学教学的需要着重讨论有关中学数学方法论问题。

编写时还注意以辩证唯物主义的观点来指导研究数学方法论问题；注意以数学发展史中典型事例来阐述数学方法论的理论、观点和方法；注意联系中学数学教学实际，探讨如何运用数学方法论的理论观点来指导数学教学和学习数学问题。

由于本书涉及的知识较广，问题的探讨是新的尝试，特别由于编者水平有限，错误缺点难免。恳请多提宝贵意见，以便改正。

编　　者

1986年于广州华南师范大学

# 目　　录

# 绪　论

中学数学方法论研究的对象、主要内容和意义。

## 一、中学数学方法论研究的对象

方法论是一门关于认识世界和改造世界的根本方法的哲学学说。哲学观点不同就有不同的方法论。辩证唯物主义认为世界本来是永恒发展着的物质世界，这是辩证唯物主义世界观，用这种世界观去观察世界去研究自然和社会问题，去指导学习和工作，就是辩证唯物主义的方法论，也就是科学方法论，简称方法论。

人们在各门科学的研究过程中也逐步总结出各门学科的发展规律以及具体的科学研究方法和创造发明的方法。因此，各门科学都有它的方法论。哲学上所说的科学方法论是各门学科方法论概括得来的，反过来对各门学科研究起着指导的作用。一般来说，作为具体学科的方法论或方法学（*methodology*）是以这门学科的发展规律和研究方法为讨论的对象。

在数学发展史中，数学的发明与应用都与哲学、逻辑学有密切的关系。数学哲学和数学方法向来都是数学家十分重视研究的问题。数学科学研究的重大成果都是在数学科学方法的创新的基础上取得的。例如古代希腊数学家欧几里得（*Euclid*，公元前330—275)应用了逻辑方法就创造出数学公理方法，把经验几何整理成为理论几何。以后，公理方法的研究与运用大大促进了数学的发展。特别在十九世纪以后，数

学基础论（*Theory of mathematical basic*）成为数学科学研究的重大课题。有关数学方法论的理论和著作纷纷出现，又进一步促进了数学科学的重大发展。数学也有它自己的方法论。

数学方法论研究的问题范围很广，大体来说，数学方法论研究的对象主要是数学的发展规律，数学的思想方法，数学的发明与创新以及解决数学问题的科学方法。

中学数学方法论，主要是研究中学数学知识范围内的数学方法论问题以及如何运用数学思想方法来指导学习数学问题，因此也包括中学生学习数学方法问题。

**二、中学数学方法论的主要内容**

由于数学方法论必受哲学思想影响和支配，因此，我们必须以辩证唯物主义的反映论为指导思想来研究数学方法论问题。又因为逻辑方法在数学中有着广泛的、重要的、特殊的应用，所以，逻辑方法是数学科学研究的重要方法之一。此外，数学科学研究既要应用到一般的科学研究方法又要有数学本身特殊的科学研究方法。此外，中学数学方法论还要研究如何运用数学方法论的理论、观点、方法来指导中学数学教学和学习数学问题。综合上述问题，中学数学方法论所讨论的内容有

1．辩证唯物主义数学观；

2．数学科学研究方法；

3．数学中逻辑方法和公理方法；

4．数学解题方法；

5．中学数学学习方法。

## 三、研究和学习数学方法论的重要意义

在数学发展的过程中，数学科学每一次的重大发展，首先是思想得到解放，同时，数学科学方法要有所创新。例如，法国数学家笛卡尔（*Descartes*，1596—1650年）把方程中的未知数看作变量来研究，创造了坐标法，使得形数结合，为解析几何和微积分的产生和发展提供了新的数学思想和方法。我们知道，任何事物的发生发展是有规律性的，数学的发生发展过程也是有规律的。例如，数学概念、公式、定理和方法都是从客观现实的数量关系和空间形式抽象得来的数学模型，运用数学模型又能解决更多的同类型的实际问题，从而进一步促进数学的发展。这就是数学发展的规律性的表现。因此，研究数学发展规律，总结数学方法论的成果，用来指导数学科学研究，有重要的意义和作用。特别，在现代科学技术中普遍应用数学方法。例如，数理逻辑就是用数学方法来研究逻辑问题。而数理逻辑在电子计算机科学，在现代科学技术如自动化系统中又有重要的应用。所以数学方法论的研究对现代科学技术的发展、普及和应用都有重要的意义。

此外，根据现代教学论的要求，中学数学教学的目的任务，必须使学生学好数学基础知识，培养学生数学能力，发展智力；特别要培养学生独立获取知识的能力和创造思维能力；还要培养学生辩证唯物主义世界观，良好的学习态度、学习方法和习惯。因此，在中学数学教学中运用数学方法论的理论观点来指导教学，潜移默化，使学生有正确的学习数学观点，逐步掌握数学思想方法和高效率的学习方法，借以提高学生学习、研究数学科学知识的能力和解决数学问题的能

力，对于提高中学数学教学质量和效率，培养符合现代社会需要的人才有重要的意义。

# 第一章　数学观

## §1·1　数学的起源与发展

研究数学方法论既要以数学发展史中，数学科学的发明创造的事实和方法为依据，又要有正确的数学观为指导。因此，为了讨论数学方法论问题做好准备并探讨数学发展规律以及数学思想和方法对数学发展的作用，本节先回顾数学的起源与发展概况。

数学已有几千年的发展历史，它是一门产生较早的古老科学，也是现代仍在迅猛发展的科学，它已成为一门分支众多，体系庞大，用途极广的科学。在数学的起源与发展过程中，它的对象不断扩大，内容不断丰富，方法不断更新。用简短的篇幅来描述数学的发展过程是不可能的；这里只是以数学的对象、数学思想方法的重大发明创造来说明数学发展的概况。根据数学对象、思想、方法的重大发展来看，数学发展史大致上可分为下面四个时期：（1）数学萌芽时期；（2）常量数学时期；（3）变量数学时期；（4）近代和现代数学时期。下面分别介绍各个时期的年代、数学研究的主要对象、重大发明、数学思想方法及其特点。

### 一、数学萌芽时期

1．年代　公元前四世纪以前．

2．对象　主要是研究解决生活和农业生产上的实际计算和测量问题．例如天文历算，土地测量和水利工程计算等．

3．主要发明　总结出比较完整的实际计算和测量方法，形成了自然数和分数以及一些简单图形的概念，创立了初步的算术和几何。

在这个时期中，中国、巴比伦、埃及、希腊、印度的数学都有类似上述的成果。例如中国约在公元前十一世纪以前的殷虚甲骨文卜辞中就有很多记数的文字，所记的数中，大于10的自然数都用十进位制。可见在当时，人们已认识较大的自然数并创造了十进制记数系统。又如中国汉朝时代写的一本书《周髀》中记载有西周开国时期（公元前1000年）用矩（两条互相垂直的尺）来测量的方法。又如在中国战国时期（公元前四世纪左右）的一本书《考工记》里记载有许多关于分数、角度、标准量器的资料。另外，中国早已有六艺（礼、乐、射、御、书、数）的教学内容，其中“数”已成为专门的知识，主要内容是整数四则运算。可见，数及数的运算等算术内容已基本形成。在几何方面，《周髀》这本书记载有直角三角形的“勾三、股四、弦五”边长关系，即勾股定理的特殊情况。此外，约在公元前四世纪写成的《墨经》一书中，记有许多几何名词的定义。例如：

〔经〕平，同高也。（即以同样高低来定义平）；

〔经〕直，参也。（参就是三，即以三点共线定义直）

〔经〕圆，一中，同长也。（圆的定义）；

可见，这个时期的几何不仅具有较多的实际测量和计算的知识，而且已经抽象出一些几何图形的概念。

4．这个时期数学特点　这个时期的数学还未成为独立的一门科学；实际计算和测量的知识与其他解决实际问题的知识混在一起；数学研究的对象是具体实物中的量和形。对

于一些数和形的概念的认识还不能完全脱离实物形象和具体经验。例如“平，同高也”以同高低来定义平，还未脱离水平面或地平面的感性认识。又如“勾三、股四、弦五。”只是勾股定理的一个特殊情况，还未上升为一般的规律。

## 二、常量数学时期

1．年代　公元前五世纪到十七世纪初。

2．对象　这个时期的数学是在萌芽时期形成的算术、几何知识基础上，进一步补充、发展、完善；并用逻辑方法（主要是演绎法）把过去积累的数学科学成果整理成为一门独立的系统的科学，它有了自己独立的研究对象和方法。这个时期数学研究的对象主要是客观事物相对停止状态下保持不变的量和形。相对于以后数学发展到研究函数（变量）来说，这个时期数学研究的主要对象是常量。因此，这个时期叫做常量数学时期。

3．主要发明

希腊欧几里得(约公元前330到前275年)的《原本》（中国最初译成《几何原本》)反映了这个时期数学的重大贡献。《原本》共十三篇包含467个命题。第一至第四篇是讲直边形和圆的基本性质；第五篇讲比例论；第六篇讲相似形；第七、八、九篇讲数论；第十篇讲不可公度量的分类；第十一、十二、十三篇讲立体几何及穷竭法。从上述内容看，《原本》系统地论述了初等几何的科学内容和代数的一些重要成果。更重要的是《原本》以一些概念的描述以及一些公设、公理为基础，定义其他概念并运用演绎方法推导出其它命题。例如，由平行公理可推出平行线性质定理和判定定理，进一步

推出三角形内角和定理等等。把全部几何知识整理成为演绎数学体系；首创了数学公理方法。这对以后数学的发展有很大的促进作用。

在这个时期，中国数学也有专著，若《算经十书》共十本，其中以《九章算术》为代表。《九章算术》共246个实际问题，分为方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等九章。这些多数是实际应用的名称。可见，这时期我国数学仍然按应用问题把数学知识分类整理。在各类问题的数学内容与方法中，有许多在当时是世界最先进的水平。例如约在公元前100年写的《周髀算经》已经叙述了勾股定理及其应用。约在公元100年完成的《九章算术》已有分数四则运算法则（包括约分、分数大小比较，求分数的平均数），还有各种比例问题解法，各种直线形和圆形面积公式和一些体积公式，还有二次、三次方程的正根求法，解多元一次方程组以及正负数的表示法和加减法。其中所用到的数学方法，在当时都达到了世界先进水平。又如公元260年左右，刘徽著的《九章算术注》，提出了割圆术。即以圆内接正多边形穷竭圆，求出$\pi = 3.1416$，创造了极限的思想和方法。又如约在公元450年写成的《孙子算经》中，提出“物不知数”问题及解法。即今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？答二十三。这是世界最早提出来的联立一次同余式问题，其解法被称为“中国剩余定理”。又如约公元470年，祖冲之（429—500年）求得$3.1415926 < \pi < 3.1415927$，并提出$\pi$的约率为$\frac{22}{7}$，密率为$\frac{355}{113}$。祖暅（5—6世纪）提出“幂势既同则积不容异”的原理。（即祖暅原理：

夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任何平面所截得的两个截面的面积都相等，那么这两个几何体的体积相等。”可见，中国古代数学早已有微积分思想和方法的萌芽。又如五世纪末，张丘建著的《张丘建算经》载百鸡问题，提出求不定方程正整根的方法。又如贾宪（11世纪）著《黄帝九章算法细草》中，提出二项式定理系数表，即贾宪三角。由于此表载于杨辉的书中，被后人称为“杨辉三角”。又如公元1086年沈括（1031—1095年）著的《梦溪笔谈》中，求高次等差级数和的“隙积术”，也就是级数求和的方法。又如公元1247年秦九韶（1198—1261年）著《数书九章》提出了一般高次方程的数值解法。这些成果都是中国古代数学的光辉成就。

在这个时期，外国古代数学也环绕研究算术问题的一般解法，即方程的解法，亦取得许多成果。为了得到求解公式，用字母表示数，创造了数学专门的符号体系；完善了解方程的理论和方法；出现和发展了新的数学分支——代数。

“代数”这个名词，英文是“*algebra*”，起源于九世纪花剌子模的一本关于代数的著作：《*al—Jabrw—Mugabab*”》，意思是整理（即把方程一边的负项移到另一边）和对比（即把方程两边相同的项消掉）。可见，代数最初研究的对象是方程及其解法。后来由于解方程遇到许多矛盾，需要扩充数的概念；包括引入负数、无理数和虚数，每一次引入新数都要重新定义数的运算，建立新的运算法则并研究运算规律。由于方程的理论要建立在数系的基础上，于是，以后代数研究的对象转变为数的运算。关于数及其运算的理论在这个时期还在探索阶段，直到十九世纪才完善起来。

关于数的概念的扩充，首先是从正数扩充到正负数及其运算。中国在公元260年左右，刘徽写的《九章算术注》里，就有正负术：同名相除，异名相益，正无入正之，负无入负之。讲的是下面正负数加减法法则：$(+a)-(+b)=+(a-b)$，$(-a)-(-b)=-(a-b)$；$(+a)-(-b)=+(a+b)$，$(-a)-(+b)=-(a+b)$，$0+(+a)=+a$，$0+(-a)=-a$。印度古代也用负数表示欠债。在公元628年左右，印度人婆罗摩笈多（*Brahmagupta*，约598—665年）也提出负数的四则运算。

至于无理数的发现，希腊毕达哥拉斯（*Pythagoras*，公元前585—前500年）学派在公元前五世纪提出毕达哥拉斯定理（即中国勾股定理）以后他的学派成员依怕索（*Hippasus*，公元前五世纪人）发现单位正方形的对角线不能用任何数（当时只知有理数）来表示。从此，发现了不可约几何量。这是无理数产生的客观来源。

中国和印度，早已把数的平方根看作数来进行计算。如刘徽采用$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}$和$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$来求不尽根。印度人婆什迦罗（*Bhaskara* 1114—1185年）也把$\sqrt{3}$、$\sqrt{12}$等看作数来运算。方法是$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\times 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$。这些都是无理数产生的萌芽。关于无理数的问题，在数学发展史中曾引起很大的争论，到了十九世纪才由德国数学家外尔斯托拉斯（*Weierstrass*，1815—1897年）、戴德金（*Dedekind*，1831—1916年），康托尔(*Cantor*，1829—1920年)用不同的形式（分别用极限、有理数分割、节套原理）来建立实数的

理论。

复数也是由于解方程出现了矛盾提出来的。意大利卡当（*Cardan*，1501—1576年）于公元1545年著《重要的艺术》一书中，解方程$x(10-x)=40$得$x=5\pm\sqrt{-15}$。它认为，不管$\sqrt{-15}$的意义怎样，所得结果是对的。他把这种数称为“虚伪的数”。问题提出后，经过许多争论，后来意大利帮别利（*Bombelli*，1526—1572年）解三次方程都用了复数，而且规定了复数四则运算法则。在当时，由于复数只是在解方程时出现的一种数的形式，未曾发现它的现实内容。法国笛卡尔（*Descartes*，1596—1650年）用方程来研究几何问题时，也摒弃复根，提出了“虚数”这个名称。但是，这种形式的数已被承认为一种新数了。直到18世纪，人们用复数来表示向量，复数有了实际意义，发挥了它的威力，复数才得到发展，而且出现了数学的一个庞大分支——复变函数。

随着方程理论和数的概念的发展，代数中逐步创造了一套完善的数学专用符号体系。现用的中学代数中的符号主要是韦达（*Vieta*，1540—1603）的著作中提出来的。

在这个时期发明的另一个数学新学科就是三角。三角这个名称，英文是*trigonometry*，这个词是从希腊文“τρlraυσγ（三角形）”和“μ∈τρσl（测量）”二个词组成的。从这个名称也可看出三角这门学科起源于三角形的测量和计算。因此，这个学科也叫做三角术。实际上，三角术是由于天文测量的需要而产生的。最初是研究球面三角形的测量问题，后来才把平面三角形解法作为研究的主要对象。中国在公元前1100年左右，商高用矩尺测量的方法，也就是利用了