高等院校“十一五”规划教材

过程设备设计力学基础

李国成　蒋文春　编著

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

高等院校“十一五”规划教材

过程设备设计力学基础

李国成　蒋文春　编著

中国石化出版社

内 容 提 要

本书为过程装备与控制工程专业的基础理论教学用书，全面系统地阐述了过程设备设计相关的力学知识与基本理论。全书共分六章，主要内容包括：弹性力学基础、塑性力学简介、薄板理论、旋转薄壳理论、外压壳体的稳定性分析和压力容器的低周疲劳。

本书结构紧凑、内容翔实、深入浅出。除侧重基本理论外，还特别注意理论与工程应用的结合，并辅以适当的例题和习题。

本书可供从事过程工业设备设计、制造、维护、管理及安全评定等方面的工程技术人员使用，也可供大专院校相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

过程设备设计力学基础 / 李国成，蒋文春编著．—北京：中国石化出版社，2010.9

高等院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-5114-0599-9

Ⅰ.①过… Ⅱ.①李… ②蒋… Ⅲ.①化工过程-化工设备-设计-力学-高等学校-教材 Ⅳ.①TQ051.02

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 187185 号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编：100011 电话：(010)84271850

读者服务部电话：(010)84289974

http://www.sinopec-press.com

E-mail:press@sinopec.com.cn

河北天普润印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 8.5 印张 200 千字

2010 年 10 月第 1 版 2010 年 10 月第 1 次印刷

定价：16.00 元

前 言

《过程设备设计》是过程装备与控制工程专业学生最重要的专业课程之一，是一门以固体力学作为基础的课程。然而，鉴于专业课程学时的限制，目前已有教材中所涉及的力学基础知识普遍过于简单，不利于学生对设计思想和技术的理解和掌握。本书是对有关过程设备设计方面的力学基础知识的整合、深化和补充，既保持了固体力学体系的系统性和连续性，又避免了个别内容的交叉和重复；内容精炼、结构紧凑、重点突出、深度适宜，与当前已有相关教材中的力学内容相比，不仅强化了基础，而且还大大地减少了篇幅，有效地增加了教学信息量，对提高教学质量、促进教学改革起到了一定的积极作用。

本书在内容编排上，力求浅入深出、循环渐进、概念明确、思路清晰、重点突出，对重点、难点在表达方式上作了改进，例如：对弹性力学平面问题重点突出应力解法，而对空间轴对称问题则侧重位移解法；为阐明工程中对拉弯组合应力的限制条件，在分析得出梁在拉弯组合作用下达到塑性极限状态时的破坏条件的同时，导出了相应的强度条件，并标绘在以拉、弯无量纲应力为坐标的图中，有利于学生对工程设计条件的理解；在介绍圆板轴对称弯曲的叠加解法时，提出了载荷分解和区域分割两种方法；在旋转薄壳边缘问题的求解中，通过引入作用与反作用关系，增强了对“横推力”概念的理解，有效地改善了原有解法中存在的不足。

本书除侧重基本理论外，还特别注重理论与工程应用的紧密结合，并辅以大量的例题和习题。例题和习题联系工程实际，有利于增强学生的工程意识和工作能力的培养。

为了照顾初学者的水平，书中的某些理论分析和公式推导比较详细，这对于已具备这方面知识的读者显得有些繁琐，而对于相关数学知识欠缺的读者又觉得有些困难。这类读者可以越过这些内容阅读其他部分。

本书第 1 ~ 2 章由蒋文春编写；第 3 ~ 6 章由李国成编写；全书由李国成统稿。

本书在编写过程中，得到了中国石化出版社领导和责任编辑的大力支持和悉心指导，在此一并表示诚挚的感谢!

由于作者水平所限，书中的不足和错误在所难免，恳切希望广大读者朋友批评指正。

目　　录

第 1 章 弹性力学基础

本章在阐述弹性力学的基本概念和分析方法基础上，重点介绍压力容器设计中经常遇到的弹性力学平面问题和空间轴对称问题。

§1.1 弹性力学的任务、分析方法及有关概念

§1.1.1 弹性力学的任务与基本假设

弹性力学是研究可变形固体(简称变形体或物体)在弹性范围内由于外力的作用或温度的变化而产生的应力、应变和位移及其分布规律的一门学科，是固体力学的一个重要分支，其基本任务是解决工程实际结构中的强度、刚度和稳定性问题。

就其任务而言，弹性力学与材料力学是相似的，因此材料力学中有关材料的均匀连续假设和各向同性假设，以及关于变形体的小变形假设也适用于弹性力学。即：

(1) 均匀连续假设　即认为整个物体体积内毫无空隙地充满了均匀的同种物质，由此所有物理量，如应力、应变、位移和密度等，都可以表示成坐标的连续函数。

(2) 各向同性假设　即认为物体内各质点的物理性质，如弹性模量、泊松比和弹性极限等，在各个方向都相同，不随方向的变化而变化。

(3) 小变形假设　假定变形体在外部载荷作用下的变形与其本身尺寸相比很小，以至于在考虑各部分的受力平衡时，可以不考虑由于变形引起的尺寸改变。换句话说，可以用变形前的尺寸代替变形后的尺寸，反之亦然；在考虑几何关系时，可以略去位移项的高阶微量，使方程成为线性。

§1.1.2 弹性力学的研究对象和分析方法

弹性力学与材料力学虽都属于固体力学的范畴，但在研究对象和分析方法上二者是不同的。材料力学仅限于研究细长的杆状构件和比较简单的杆件系统，并且除了上述对变形体所作的基本假设外，还采用了关于截面变形或应力分布之类的假设，如梁弯曲问题中的直法线假设等，因此可采用截面法来建立分析求解的基本方程；而弹性力学适于研究各种三维实体结构，但因其几何形状和受力的复杂性，一般不能采用截面变形或应力分布之类的假设，只能从微小的单元体入手来建立分析求解的基本方程。

一般来说，弹性力学所研究的问题都属于超静定问题，亦即只通过静力平衡条件是不能求解的。因此，用弹性力学求解实际问题，必须首先从静力学、几何学和物理学三个方面来分析建立弹性力学的基本方程：

(1) 取微小单元体，用静力条件建立平衡微分方程；

(2) 分析微小线单元的变形，建立表示应变—位移关系的几何方程；

(3) 由广义胡克定律，得到表示应力—应变关系的物理方程。

此外，在物体的表面上，还必须给出应力边界条件和位移边界条件。

然后，联解三个方面的基本方程，并利用边界条件，才能给出各种实际问题的定解。

弹性力学有数学弹性力学和适用弹性力学之分，前者在以上所作的基本假设前提下进行数学推演，求解各类问题，这也就是本章的内容；后者则通过引入某些附加假设，使一些常见的工程结构问题得到简化，如板、壳等。关于板、壳问题的分析见本书第3章和第4章。

§1.1.3 有关基本概念

弹性力学中经常用到的有关基本概念有：外力、内力与应力、位移和应变。

1. 外力

通常作用于物体的外力可分为体力和面力两种：体力是分布在物体体积内的作用力，亦即单位体积所受的力，例如重力、磁力和惯性力等；面力是分布在物体表面上的作用力，亦即单位面积所受的力，例如流体压力和接触力等。物体内任一质点 P 处的体力，可用它沿坐标 x、y、z 方向的三个分量来表示，记为 F_x、F_y、F_z；物体表面某点处的面力，也可用它沿坐标 x、y、z 方向的三个分量来表示，记为$\overline{F}_x$、$\overline{F}_y$、$\overline{F}_z$。外力分量沿坐标的正方向为正，反之为负。

2. 内力与应力

物体受外力作用或温度变化时，其内部相邻部分之间就产生了相互作用力。这种由于外力或温度变化而产生的物体内部相互作用的力就称之为内力。内力可用截面法求得。用截面法求内力时，无论保留物体的哪一部分，所得的内力大小和正负号应该相同。为此，如定义外法线沿坐标正方向的截面为正面，反之为负面，那么可规定内力的正负号为：正面上与坐标同向的内力为正，负面上与坐标反向的内力为正，否则为负。

内力在各点的集度即为应力，通常用它沿作用截面的法线和切线方向上的分量，即正应力 σ 和剪应力 τ 来表示。因为这些分量与物体的形状改变和材料的强度有直接的关系。

为了描述物体受外力后内部任意一点 P 处的应力状态，可过 P 点从物体内截取一无限小的六面体，棱边平行于坐标轴，长度分别为：$PA=\mathrm{d}x$、$PB=\mathrm{d}y$、$PC=\mathrm{d}z$，如图1-1所示。从极限的角度，该六面体的六个面都为过同一点 P 的面，相平行的两个面表示过该点的同一截面的不同侧向。六面体的每一截面上的应力都可以分解成与三个坐标轴平行的一个正应力和两个剪应力。为了表明各应力分量的作用面和作用方向，在正应力 σ 上加一个坐标角码，例如 σ_x 是指作用在垂直于 x 轴的截面上，并与 x 轴平行的正应力；在剪应力 τ 上加两个坐标角码，前一个角码表示作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表示作用方向沿着哪一个坐标轴，例如 τ_{xy}是指作用在垂直于 x 轴的截面上，方向与 y 轴平行的剪应力。由于应力是内力在各点的集度，所以应力的正负号规定与内力类同。亦即，正面正方为正，负面负向为正，否则为负。图1-1中所示的所有应力分量均为正向。

在图1-1所示的九个应力分量中，六个剪应力之间具有一定的互等关系。如以图中过六面体前后两截面中心的直线为矩轴，可写出力矩的平衡方程为

$$2\tau_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}x}{2}-2\tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

由此可得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

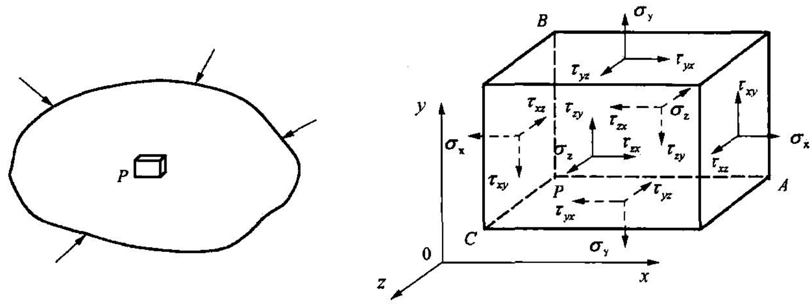

图 1－1　变形体内某点 P 的应力

同样可列出其余两个相似的方程，简化得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\ \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

这就是所谓的剪应力互等定律，即作用于两垂直面上与两面交线垂直的剪应力，大小相等、正负号相同。因此，剪应力的两个角码可以对调。于是，九个应力分量中只有六个是独立的，即三个正应力 σ_x、σ_y、σ_z 和三个剪应力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。

与材料力学的分析相似，利用静力平衡，过 P 点所作的任意斜截面上的应力，都可用上述六个应力分量来确定。所以，这六个应力分量确定了 P 点的应力状态。应力分析的目的就是确定物体在外力作用下各点的六个应力分量，进而求得相应的应力强度，以作为机械设计的依据。

3. 位移和应变

在外力或温度变化作用下，物体内部各质点将产生位置的变化，即发生了位移。如果物体发生位移后仍保持各质点间初始状态的相对位置，则物体实际上只发生了刚体位移。如果物体发生位移后改变了各质点间初始状态的相对位置，则物体同时也产生了形状的变化，其中包括体积改变和形状畸变。

物体内任一质点 P 的位移，可用它沿坐标 x、y、z 方向的三个分量来表示，记为 u、v、w。位移分量沿坐标轴正方向为正，反之为负。

由于物体变形后的形状可以用它各微小部分的长度和角度来表示，因此其体积改变和形状畸变，可归结为长度和角度的改变。如分析物体内某质点 P 处的变形，可过 P 点沿坐标轴 x、y、z 方向取三个微小线单元 PA、PB、PC，如图 1－1 所示。变形后，PA、PB、PC 的长度以及它们之间的夹角一般都将改变，各线单元每单位长度的伸长或缩短称为正应变，用字母 ε 表示；各线单元之间的角度变化（以弧度为单位）称为剪应变，用字母 γ 表示。在正应变 ε 上加一个坐标角码表示伸缩的方向，如 ε_x 表示沿 x 方向线单元 PA 的正应变；在剪应变 γ 上加两个坐标角码，以表示沿这两个坐标方向线单元的角度变化，如 γ_{yz} 表示沿 y 与 z 两方向线单元 PB 与 PC 之间的角度变化。应变的正负号规定为：正应变以伸长为正，缩短为负，剪应变以直角变小时为正，变大时为负。实际上这些规定与相应应力的正负号规定是一致的。

一般而论，物体内任意一点处的外力、应力、应变和位移是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

§1.2　弹性力学的平面问题

严格地讲，任何物体都是空间物体，它所承受的外力一般都是空间力系。因此，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。然而，如果所研究的物体具有某种特殊的形状，且承受的是某种特殊的外力，则可把空间问题作为平面问题处理。这样，可使分析和计算大大简化，而所得结果仍能满足工程上的精度要求。

弹性力学平面问题不但在工程实际中具有重要意义，而且通过平面问题可看到解决具体问题的方法，从而进一步掌握弹性力学的基本概念。

平面问题分平面应力和平面应变两种情况，以下将逐一讨论它们的几何特征、受力特点、基本方程和求解方法。

§1.2.1　平面应力与平面应变

1. 平面应力问题

设有很薄的等厚度板件，如图1－2所示，其周界上受有平行于板面且沿厚度不变化的面力作用，同时体力也平行于板面且沿厚度不变化。如设板件的厚度为t，并建立图示坐标，则在板面上应有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\ (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\ (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0$$

由于板很薄，外力又沿厚度不变化，所以可认为沿整个板厚的所有各点，都有

$$\sigma_z=0,\ \tau_{zx}=0,\ \tau_{zy}=0$$

这样，六个应力分量只剩下平行于xy面的三个应力分量，即σ_x、σ_y和τ_{xy}，而且它们只是坐标x、y的函数，而与z无关。这类问题即为平面应力问题。

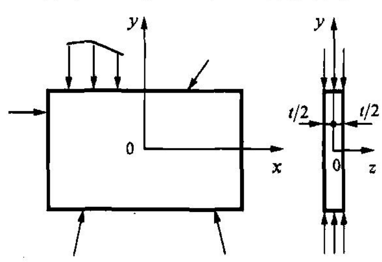

图1－2　平面应力问题示例

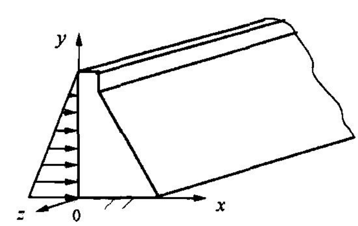

图1－3　平面应变问题示例

2. 平面应变问题

与平面应力问题相反，设有无限长的等截面柱体，或有限长但纵向完全约束的等截面柱体，如重力水坝，如图1－3所示，受有平行于横向截面且沿长度不变化的外力作用。如取图示坐标，根据其几何特征和受力特征，显然像这样一类问题，其体内各点均不会发生纵向(z向)位移，且各横向截面(xy面)的形变相同，亦即有

$$w\equiv0,\ u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y)$$

这也表明，物体内任一纵向纤维既不会伸长也不会缩短，且与横向截面始终保持垂直，无角度变化，故有

$$\varepsilon_z=0,\ \gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$$

因而这类问题被称为平面位移问题或平面应变问题。根据物理方程，对于平面应变问题也有 $\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$，但 σ_z 一般不等于零。这样六个应力分量只剩下四个，即 σ_x、σ_y、σ_z 和 τ_{xy}，且它们也仅仅是坐标 x、y 的函数。

有许多实际问题，虽不是无限长，如高压管道、重力坝等，但实践证明，对于远离两端的部位，按平面应变问题进行分析，得出的结果具有足够的精度，能满足工程要求。

§1.2.2　平面问题的基本方程

1. 平衡微分方程

对于平面应力问题，假想从图 1-2 所示的薄板中沿 x、y 方向截取长度分别为 dx、dy 的微小正六面体，如图 1-4 所示。由于应力是位置坐标 x、y 的函数，因此作用于微元体正、负面上的应力存在微小差异。如设作用于 x 轴负面上的应力为 σ_x、τ_{xy}，则由于 x 坐标的微小变化，正面上的应力为 $\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$、$\tau_{xy}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$；同理，作用于 y 轴正、负面上的应力分别为 σ_y、τ_{yx} 和 $\sigma_y+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$、$\tau_{yx}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$。因为该六面体是微小的，所以各面上所受的应力可认为是均布的。如考虑体力，体力只有沿 x、y 方向的分量 F_x、F_y，并且也可认为在整个微元体中是均布的。

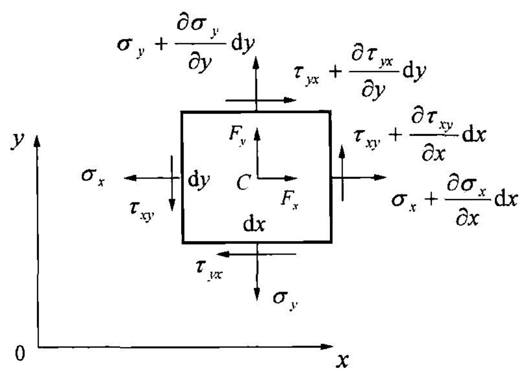

图 1-4　平面问题微体受力图

对于平面应变问题，由于外力不沿长度变化，所以微元体在 xy 平面内的受力与平面应力问题是完全相同的，不同的是在长度方向还作用有正应力 σ_z，但因它不沿长度变化而自成平衡，所以平面应变问题也仅需分析微元体在 xy 平面内的受力。

为方便计算，取微元体厚度为单位 1。根据力的平衡条件，图 1-4 所示的微元体可列出以下独立的静力平衡方程。

如沿 x 方向取力的平衡 $\sum F_x=0$，可得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy-\sigma_x dy+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx-\tau_{yx}dx+F_x dxdy=0$$

约简后两边同除以 $dxdy$，得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0$$

同理，沿 y 方向取力的平衡 $\sum F_y=0$，可得

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_y=0$$

此外还有一个力矩平衡方程，如将微元体上所有各力对过形心 C 且垂直于 xy 面的直线取矩 $\sum M_c=0$，可以得到 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。这也再次证明了剪应力互等定律。

于是，平面问题的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+F_y=0\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

以上在建立平衡微分方程时，采用了物体变形前的尺寸，因为这里讨论的是小变形问题，亦即物体受力后各点的位移都远远小于其原来的尺寸，且应变和转角都远小于1。这样用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸不会引起显著的误差，但方程却得到大大简化，在以后建立任何平衡方程时，都将同样处理。

式(1－1)中两个微分方程式包含有 σ_x、σ_y 和 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 三个未知量，所以属于静不定问题，必须考虑变形关系和物理方程才能求解。

2. 几何方程

由于两种平面问题都仅需考虑 xy 面内的变形，故过物体内的任一质点 P，沿 x、y 方向取微小线单元 $PA=\mathrm{d}x$ 和 $PB=\mathrm{d}y$，如图1－5所示。假定物体变形后，P、A、B 分别移动到 P'、A'、B'。由于 A 点的 x 坐标较 P 点有微小增量 dx，如设 P 点移至 P' 点的位移为 u、v，则 A 点移至 A' 点的位移为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$、$v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$；同样，因 B 点的 y 坐标较 P 点存在微小增量 $\mathrm{d}y$，所以 B 点移至 B' 点的位移为 $u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$、$v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。

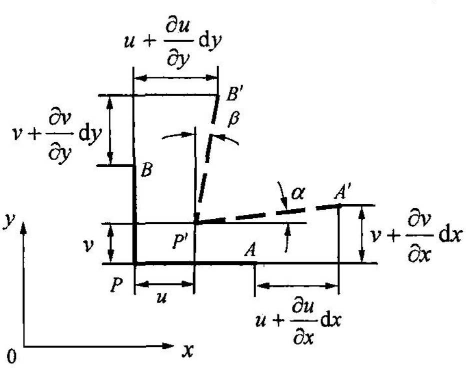

图1－5 任意一点 P 处的变形

由于线单元 PA 和 PB 变形后的转角 α、β 都很小，所以线单元 PA 的正应变 ε_x 为

$$\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}\approx\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

线单元 PB 的正应变 ε_y 为

$$\varepsilon_y=\frac{P'B'-PB}{PB}\approx\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)-v}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

又在小变形情况下，变形后的应变是远小于1的，所以线单元 PA 的转角 α 为

$$\alpha\approx\mathrm{tg}\alpha=\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-v}{(1+\varepsilon_x)\mathrm{d}x}\approx\frac{\partial v}{\partial x}$$

线单元 PB 的转角 β 为

$$\beta\approx\mathrm{tg}\beta=\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)-v}{(1+\varepsilon_y)\mathrm{d}y}\approx\frac{\partial u}{\partial y}$$

故线单元 PA 与 PB 之间的角度变化，亦即剪应变 γ_{xy} 为

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

综上可得，平面问题的几何方程为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-2}$$

3. 物理方程

在完全弹性的各向同性体内，应力和应变分量之间的关系，根据广义胡克定律可写成

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}\\
\gamma_{zx}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

式中 E 为材料的弹性模量；μ 为泊松比。

对于平面应力问题，$\sigma_z=0$、$\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。由式(1-3)中的第一、二、四式得

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

此即平面应力问题的物理方程。此外，式(1-3)中的第三式成为

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$$

可以用来求薄板厚度的改变。又由式(1-3)中的第五、六式，可得 $\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$。

对于平面应变问题，$\varepsilon_z=0$、$\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$。式(1-3)中的第三式成为

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$$

将上式代入式(1-3)中的第一、二式，并注意到第四式仍适用，经整理即得平面应变问题的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\\
\varepsilon_y&=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

此外，由式(1-3)中的第五、六式，也有 $\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。

比较式(1-4)和(1-5)可见两种平面问题的物理方程在形式上是相似的，仅系数不同。

如果在平面应力问题的物理方程(1-4)中，将 E 换为$\frac{E}{1-\mu^2}$、μ 换为$\frac{\mu}{1-\mu}$，即可得到平面应变问题的物理方程(1-5)；反之，如果在平面应变问题的物理方程(1-5)中，将 E 换为$\frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}$、$\mu$ 换为$\frac{\mu}{1+\mu}$，就得到平面应力问题的物理方程(1-4)。这说明平面应力问题和平面应变问题仅物理方程的系数不同，二者可以互换。故以下讨论，如不特别说明，均以平面应力问题为例。

以上导出的平衡微分方程(1-1)、几何方程(1-2)和物理方程(1-4)或(1-5)是弹性力学平面问题的基本方程。八个基本方程式恰好含有三个应力分量(σ_x, σ_y, τ_{xy})、三个应变分量(ε_x, ε_y, γ_{xy})和两个位移分量(u, v)，基本方程式的数目与未知量的数目相等，因此在适当的边界条件下是能够得出具体问题的解答的。

§1.2.3 平面问题的边界条件

弹性力学问题的边界条件有位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件三种。

1. 位移边界条件

若物体在边界上的位移分量$\bar{u}$、$\bar{v}$是边界坐标的已知函数，则作为基本方程解的位移分量u、v，在相应的边界上必须等于给定的位移，即要求

$$u=\bar{u},\ v=\bar{v} \tag{1-6}$$

式(1-6)就是平面问题的位移边界条件。

2. 应力边界条件

若物体在边界上的面力分量$\overline{F}_x$、$\overline{F}_y$ 是边界坐标的已知函数，则作为基本方程解的应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}，在边界上应与给定的面力之间满足平衡关系。因此应力边界条件可由边界上的微体平衡条件得出。

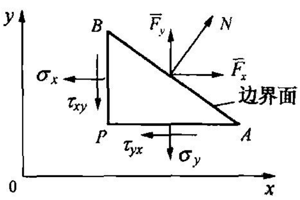

图1-6 应力边界

在边界上截取微小单元体，如图1-6所示。用 N 表示边界面 AB 的外法线方向，并令其方向余弦为

$$\cos(N,\ x)=l$$
$$\cos(N,\ y)=m$$

设边界面 AB 的长度为 ds，则截面 PA 和 PB 的长度分别为 mds 和 lds。同样为方便计算，可取微元体厚度为单位1。取 x 方向力的平衡$\sum F_x=0$，可得

$$\overline{F}_x\mathrm{d}s-\sigma_x l\mathrm{d}s-\tau_{yx}m\mathrm{d}s=0$$

两边同除以 ds，则得

$$l\sigma_x+m\tau_{yx}=\overline{F}_x$$

同理，取 y 方向力的平衡$\sum F_y=0$，可得

$$m\sigma_y+l\tau_{xy}=\overline{F}_y$$

于是物体边界上各点的应力分量与面力分量之间的关系，亦即平面问题的应力边界条件为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} &= \overline{F}_x \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} &= \overline{F}_y \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

当边界垂直于某一坐标轴时，应力边界条件的形式将大为简化。在垂直于 x 轴的边界上，$l=\pm 1$，$m=0$，应力边界条件简化为

$$\sigma_x=\pm\overline{F}_x,\ \tau_{xy}=\pm\overline{F}_y$$

在垂直于 y 轴的边界上，$l=0$，$m=\pm 1$，应力边界条件简化为

$$\tau_{yx}=\pm\overline{F}_x,\ \sigma_y=\pm\overline{F}_y$$

可见，在这种特殊情况下，应力分量的边界值就等于对应的面力分量的值，但其正负号应按应力分量的正负号规定确定。

3. 混合边界条件

当物体的一部分边界具有已知位移，而另一部分边界具有已知面力时，则已知位移的边界可应用式(1-6)，已知面力的边界可应用式(1-7)。

此外，还可能在同一部分边界上出现混合边界条件，即两个边界条件中的一个是位移边界条件，另一个则是应力边界条件。

§1.2.4　圣维南原理

在求解弹性力学中问题时，欲使应力分量、应变分量和位移分量完全满足基本方程并不困难，但要使边界条件也得到完全满足却往往是很困难的。另外，在很多工程结构计算中，都会遇到这样的情况：在物体的一小部分边界上，仅仅知道物体所受面力的合力，而其分布方式并不明确，因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件。在这些情况下，圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理可以这样来陈述：如果把物体的一小部分边界上的面力，换为分布不同但静力等效(亦即主矢相等，主矩也相等)的面力，那么离该边界近处的应力将会有显著的改变，而离该边界远处的应力所受的影响可以不计。

在实际问题的分析中，圣维南原理主要用于以下两种情况：

① 对于复杂的应力边界，可用静力等效的分布面力代替；

② 当位移边界不易满足时，其约束反力也可用静力等效的分布面力代替。

应当说明，圣维南原理只能用于物体的次要边界，亦即相对物体周界很小的边界，不得用于主要边界，否则会失去解答的真实意义。

§1.2.5　平面问题的解法

在弹性力学中，求解未知的应力分量、应变分量和位移分量，通常有位移解法和应力解法两种。

1. 位移解法

位移解法是以位移分量作为基本未知函数，综合运用平衡方程、几何方程和物理方程，得到只包含位移分量的微分方程。然后，由这些微分方程和边界条件求出位移分量，再由几何方程求出应变分量，由物理方程求出应力分量。

现在来导出按位移解法求解平面问题所需的微分方程和边界条件。

对于平面应力问题，可由物理方程(1-4)解出应力分量，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

将几何方程(1-2)代入，即得用位移表示的应力公式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$$

再将上式代入平衡微分方程(1-1)，整理可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+F_x=0\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+F_y=0\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

这就是按位移解法求解平面问题时所需的基本微分方程。

由微分方程(1-9)确定的位移解答在已知位移边界上应满足的条件仍为式(1-6)。当已知应力边界时，可将用位移表示的应力公式代入式(1-7)，简化后可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+m\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\overline{F}_x\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+l\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\overline{F}_y\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

此即用位移表示的应力边界条件，也就是按位移解法求解平面问题时所用的应力边界条件。

对于平面应变问题，只需在以上方程中将 E 换为$\dfrac{E}{1-\mu^2}$、μ 换为$\dfrac{\mu}{1-\mu}$即可。

2. 应力解法

应力解法是以应力分量作为基本未知函数，综合运用平衡方程、几何方程和物理方程，得到只包含应力分量的微分方程。然后，由这些微分方程和应力边界条件求出应力分量，再由物理方程和几何方程依次求出应变分量和位移分量。

现在来导出按应力解法求解平面问题所需的基本微分方程。

为了消去位移分量，将几何方程(1-2)中的 ε_x 对 y 求二阶导数，ε_y 对 x 求二阶导数，然后相加得

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

由几何方程(1-2)中的第三式可见，这个等式右边括号中的表达式就等于 γ_{xy}，于是有

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{1-11}$$