新教材
新高考
与课堂同步

主编/申建春

30年 高考数学真题讲与练

必修 4 5

潇湘数学教育工作室 策划

做新题不如做高考题 做真题更切中高考题

国防科技大学出版社

高考数学

30 年真题讲与练

必修 4 5

顾　问　赵雄辉

策　划　潇湘数学教育工作室

主　编　申建春

副主编　周大明　曾红斌　李文英　李桂初

编委会主任　袁箭卫

编委会副主任　邓集柏　于真灵　黎书柏　张志华

编　委　唐绍伦　蒲宏金　邓交练　李　宇　黎尚清　李先红　邓成林　肖春龙　左新安

刘合平　李松云　胡良美　李清汉　李绵勇　赵永益　张有才　谷田中　罗利平

杨建军　罗自力　漆辉超　李　忠　李万春　刘永忠　杨清国　周　鹏　黄营林

张建忠　李　闯　徐　旺

国防科技大学出版社

·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

高考数学30年真题讲与练/申建春主编.——长沙：国防科技大学出版社，2010.4

ISBN 978-7-81099-631-0

Ⅰ.高… Ⅱ.申… Ⅲ.数学课－高中－解题－升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第067635号

高考数学
30年真题讲与练 必修4 5

主　　编　申建春

责任编辑　卢天贶

策　　划　潇湘数学教育工作室

出版发行　国防科技大学出版社

印　　刷　湖南省书报刊发行业协会湘联印刷厂

开　　本　880毫米×1230毫米　1/16

印　　张　34

字　　数　1200千

定　　价　全套90元

版　　次　2010年5月第1版

印　　次　2010年5月第1次印刷

高考数学题不神秘

数学题浩如烟海，谁也不能做完！

高考数学题不断推陈出新，永无止境！

高考数学题是关注度最高的数学题，高中学生在做，老师在做，专门研究高考数学的人也在做！

揭开高考数学题神秘的面纱，就能帮助同学们学好数学，高考中得高分.

有些高考题源自教材.以教材上的习题为原型，适当加以改编形成高考题.这是高考题的重要来源，每年的高考题中都可以找到这样的题.因此，同学们要认真做好书本上的题，最好能举一反三、触类旁通.这样，解起高考题来就不陌生，就能得心应手，就能发挥自己的最佳水平.

有些高考题源自历年的高考题.从1977年恢复高考至今，已有30多年了，而根据高考要求，许多基本内容没有变化，也是需要同学们掌握的.这样，在对一些基本内容的考查上，每年难以有新题出现，必然就会有许多似曾相识的高考题.

如果在学习某一内容时，将历年与这个内容相关的高考题拿来作为练习题，好处则是妙不可言.

一则了解高考在这个内容上到底考什么.知道了高考考什么，就明确了学习的方向，知道学习中应该在哪方面下力气，做到有的放矢，事半功倍.

二则了解高考在这个内容上需要掌握哪些解题技巧.掌握了解高考题的技巧，必能迅速找到解题思路，提高解题速度与正确率，高考数学就能得高分.

三则可以了解高考在这个内容上命题的变化趋势.这一点很重要，掌握了高考题命题的变化趋势，做题就不会盲目，就能心中有数，就能战无不胜.

四则可以了解各省市命题的特点.其实，你只要细心多做同一年几个省市的高考数学题，就会发现许多有趣而有用的命题特点.这些命题特点，对同学们参加自己省市的高考非常有帮助.因为同一内容的命题可以从很多方面入手，各省市会互相借鉴的，也会按一定的时间间隔重复出现的.因此，多做历年高考真题，是把握高考题的有效途径.

有些同学喜欢做新题，认为新题有可能会切中高考题.其实，这种想法不正确，至少可以说不全正确.同学们做题都是有限的，你认为是新题，可能是因为你不能浏览所有的中学数学习题，才会感觉是新题.做新题不如做高考题！每年各省市的高考数学题中都有个别新题，全国每年有近40套高考数学题，新题就尽在高考题中！

因此，做真题更能切中高考题！

本书就是根据上面的理念，由全国著名的、专门从事高考数学研究的潇湘数学教育工作室策划，组织了历年把关的、优秀的高三数学老师进行编写.

本书的每节由“方法指引”“真题讲解”“高考直击”三个栏目组成，每个栏目各有特色，同学们使用时，要把握好栏目的作用.

“方法指引”提示本节高考的主要内容，指点解答高考题所需要的主要技巧与方法.

“真题讲解”选用与本节内容紧密联系的高考真题，选题力求从易到难，题型全面；解题方法既考虑教材上的通用方法，又注意一些特殊技巧.每个题都给出了详细解答，以便给同学们提供解题示范，增加高考解题中的得分点.大部分题在解完后，有一个“说明”.“说明”旨在指点解题方法的思考过程、解题技巧，提醒容易出现错误的地方，网罗同类型的高考题.

“高考直击”选用的题目也是与本节内容相关的高考题，既有与“真题讲解”中类似的题，也有不同类型的题，力求将历年高考题的类型全面涉及.

“参考答案”是“高考直击”中练习题的答案.如果题目十分简单，则只给出答案.如果题目有一定的难度，则给出了详细解答.还有部分题在解答后面有“说明”，以便同学们更能全面地思考问题.

教材上有些小节的内容没有单独的高考题，我们在编写时就没有单独设立这节，而是将这节内容编在与之有紧密联系的章节里.

在使用本书时，有些章节由于高考内容比较多，题目相对较多；有些章节内容比较少，题目就相对少.因此，有些小节内容可以在学习完新课时就可立即使用本书，有些内容需要学完一章的内容后才能使用本书.同学们可以灵活使用.

大家在使用本书时，有什么好的建议，或者发现书中的一些错误，请及时转告我们，以便在修订时进一步完善.电子邮箱：shenjch66@126.com.

做新题不如做高考题！

做高考题更能切中高考题！

做高考题高考必能得高分！

最后，祝愿同学们用了本书，高考得高分.这是你的心愿，也是我们的心愿.

目　录

必修 4

必修 5

必修4

第一章　三角函数

第一节　同角三角函数的关系及诱导公式

方法指引

任意角的三角函数的定义与诱导公式在高考试题中都是以选择题、填空题形式出现的，内容涵盖教材中的所有内容. 解答这类问题的基本方法就是灵活运用三角函数定义与诱导公式进行准确计算.

真题讲解

一、选择题

1.（2008，全国Ⅱ文(1)）若 $\sin\alpha<0$ 且 $\tan\alpha>0$，则 α 是（　　）.

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

解　C.

由 $\sin\alpha<0$ 知，α 在第三象限或第四象限.

由 $\tan\alpha>0$ 知，α 在第一象限或第三象限.

因此，α 在第三象限.

说明　由三角函数值的正负判断角所在的象限，高考题中经常出现. 解答的方法就是根据角所在象限的三角函数值符号判断.

2.（2005，全国Ⅲ理(1)）已知 α 是第三象限的角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是（　　）.

A. 第一或第二象限的角

B. 第二或第三象限的角

C. 第一或第三象限的角

D. 第二或第四象限的角

解　D.

因为 α 是第三象限角，所以 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

则 $-\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi(k\in\mathbf{Z})$，当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限. 故 $\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限或第四象限.

说明　也可取特殊值验证. 如取 $\alpha=240°$，则 $\frac{\alpha}{2}=120°$ 在第二象限. 但选择支上还有一个象限，故再取加 360° 的角，即 $\alpha=600°$，则 $\frac{\alpha}{2}=300°$ 在第四象限. 故 $\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限或第四象限.

3.（2002，北京春季(5)）若角 α 满足条件 $\sin2\alpha<0$，$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，则 α 在（　　）.

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解　B.

由 $\sin2\alpha<0$ 知，2α 在第三象限或第四象限，取 $2\alpha=240°$，则 $\alpha=120°$ 在第二象限，满足 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$.

说明　如取 $2\alpha=300°$ 在第四象限，则 $\alpha=150°$ 在第二象限，也满足 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$. 在用特殊值验证时，有时可多取一个，更能保证所得结论的准确性.

4.（2000，广东(4)）已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是（　　）.

A. 若 α,β 是第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

B. 若 α,β 是第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

C. 若 α,β 是第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

D. 若 α,β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

解　D.

在 A 中，取 $\alpha=60°,\beta=30°$，满足 $\sin60°>\sin30°$，但不满足 $\cos60°>\cos30°$.

在 B 中，取 $\alpha=120°,\beta=150°$，满足 $\sin120°>\sin150°$，但不满足 $\tan120°>\tan150°$.

在 C 中，取 $\alpha=210°,\beta=240°$，满足 $\sin210°>\sin240°$，但不满足 $\cos210°>\cos240°$.

因此，D 正确.

5.（2001，安徽、北京春季（8））若 A、B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角，则点 $P(\cos B-\sin A,\sin B-\cos A)$ 在（　　）.

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解　B.

取 $A=45°$，$B=60°$，则

$\cos B-\sin A=\cos60°-\sin45°=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<0$，

$\sin B-\cos A=\sin60°-\cos45°=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}>0$.

因此，点 P 在第二象限.

6.（2009，全国Ⅰ文（1））$\sin585°$ 的值是（　　）.

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解　A.

$\sin585°=\sin225°=-\sin45°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

说明　求大于 $90°$ 角的三角函数值，先利用诱导公式将角化为锐角，然后根据锐角三角函数值写出答案. 注意：在用诱导公式时，一定要注意符号的选择.

7.（2009，重庆文（6））下列关系式中正确的是（　　）.

A. $\sin11°<\cos10°<\sin168°$

B. $\sin168°<\sin11°<\cos10°$

C. $\sin11°<\sin168°<\cos10°$

D. $\sin168°<\cos10°<\sin11°$

解　C.

$\cos10°=\sin80°$，$\sin168°=\sin12°$，

而 $\sin11°<\sin12°<\sin80°$，故

$\sin11°<\sin168°<\cos10°$.

说明　比较正弦、余弦角的函数值，应将函数化为同一种函数进行比较.

8.（2009，全国Ⅱ文（4））已知 $\triangle ABC$ 中，$\cot A=-\dfrac{12}{5}$，则 $\cos A=$（　　）.

A. $\dfrac{12}{13}$　　B. $\dfrac{5}{13}$　　C. $-\dfrac{5}{13}$　　D. $-\dfrac{12}{13}$

解　D.

因为 $\cot A=-\dfrac{12}{5}$，则 $90°<A<180°$.

又 $\dfrac{\cos A}{\sin A}=-\dfrac{12}{5}$，则 $\sin A=-\dfrac{5}{12}\cos A$.

而 $\sin^2A+\cos^2A=1$，则 $\left(-\dfrac{5}{12}\cos A\right)^2+\cos^2A=1$，

$\cos^2A=\dfrac{144}{169}$，$\cos A=\pm\dfrac{12}{13}$.

但 $90°<A<180°$，故 $\cos A=-\dfrac{12}{13}$.

说明　利用 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 求一个函数值时，会出现正负两个值，具体选哪一个，要根据 A 所在的象限选择. 如上面 $90°<A<180°$，则选择了负值.

9.（2007，全国Ⅰ理（1））α 是第四象限角，$\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，则 $\sin\alpha=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{5}{13}$　　D. $-\dfrac{5}{13}$

解　D.

因为 α 是第四象限角，所以 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$.

又因为 $\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，所以 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{12}$，

即 $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=-\dfrac{5}{12}$，解得 $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$.

10.（2008，四川理（3））$(\tan x+\cot x)\cos^2x=$（　　）.

A. $\tan x$　　B. $\sin x$　　C. $\cos x$　　D. $\cot x$

解　D.

$$(\tan x+\cot x)\cos^2x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cos^2x=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}\cdot\cos^2x=\cot x.$$

11.（2007，浙江文（2））已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\tan\varphi$（　　）.

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

解　C.

因为 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $-\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$\tan\varphi=\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

12.（2007，陕西文（4））已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为（　　）.

A. $-\frac{3}{5}$　B. $-\frac{1}{5}$　C. $\frac{1}{5}$　D. $\frac{3}{5}$

解 A.

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$$
$$=2\sin^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}.$$

13.(2008,四川延考文(5))已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$(　　).

A. 2　B. -2　C. 3　D. -3

解 C.

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3.$$

14.(2008,浙江理(8))若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$,则 $\tan\alpha$(　　).

A. $\frac{1}{2}$　B. 2　C. $-\frac{1}{2}$　D. -2

解 B.

因为 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$,所以 $\cos\alpha=-\sqrt{5}-2\sin\alpha$.

那么,$\sin^2\alpha+(-\sqrt{5}-2\sin\alpha)^2=1$,

解得 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\tan\alpha=2$.

15.(1990,全国理(6))函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是(　　).

A. $\{-2,4\}$　B. $\{-2,0,4\}$

C. $\{-2,0,2,4\}$　D. $\{-4,-2,0,4\}$

解 B.

若 x 在第一象限,

$$y=\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{\tan x}+\frac{\cot x}{\cot x}=4.$$

若 x 在第二象限,

$$y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{-\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{-\tan x}+\frac{-\cot x}{\tan x}=-2.$$

若 x 在第三象限,

$$y=\frac{\sin x}{-\sin x}+\frac{-\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{\tan x}+\frac{\cot x}{\cot x}=0.$$

若 x 在第四象限,

$$y=\frac{\sin x}{-\sin x}+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\tan x}{-\tan x}+\frac{-\cot x}{\cot x}=-2.$$

因此,$y\in\{-2,0,4\}$.

说明 本题看起来复杂,做起来简单. 含有绝对值符号的三角函数式,一定要讨论绝对值符号内三角函数式的值的正负性.

二、填空题

16.(2004,湖北文(13))$\tan2010°$的值为________.

解 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\tan2010°=\tan(6\times360°-150°)$$
$$=-\tan150°=\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

17.(2009,北京文(9))若 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$,$\tan\theta>0$,则 $\cos\theta=$________.

解 $-\frac{3}{5}$.

因为 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$,$\tan\theta>0$,所以 θ 为第三象限角.

故 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

18.(2006,上海理(6))如果 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$,且 α 是第四象限的角,那么 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$________.

解 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

因为 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$,α 为第四象限角,

所以 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

故 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

19.(2006,重庆文(13))已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$,则 $\tan\alpha=$________.

解 -2.

因为 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$,所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,

则 $\tan\alpha=-2$.

20.(2002,北京文(13))$\sin\frac{2}{5}\pi$,$\cos\frac{6}{5}\pi$,$\tan\frac{7}{5}\pi$ 从小到大的顺序是________.

解 $\cos\frac{6}{5}\pi<\sin\frac{2}{5}\pi<\tan\frac{7}{5}\pi$.

因为 $0<\sin\frac{2}{5}\pi<1$,

$$\cos\frac{6}{5}\pi=\cos\left(\pi+\frac{1}{5}\pi\right)=-\cos\frac{1}{5}\pi<0,$$

$\tan\frac{7}{5}\pi=\tan\left(\pi+\frac{2}{5}\pi\right)=\tan\frac{2}{5}\pi>1$,

所以 $\cos\frac{6}{5}\pi<\sin\frac{2}{5}\pi<\tan\frac{7}{5}\pi$.

说明　比较三角函数值的大小可抓住一些特殊值，如0,1等作为中间量进行比较.

高考直击

一、选择题

1.(2001,全国理(1))若 $\sin\theta\cos\theta>0$,则 θ 在(　　).

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第一、四象限　　D. 第二、四象限

2.(2007,北京理(1))已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$,那么角 θ 是(　　).

A. 第一或第三象限角　　B. 第二或第三象限角

C. 第三或第四象限角　　D. 第一或第四象限角

3.(2004,辽宁(1))若 $\cos\theta>0$,且 $\sin2\theta<0$,则角 θ 的终边所在象限是(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4.(1988,全国文(一)(9)) $\sin\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$ 的值等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.(1998,全国理(1)) $\sin600°$ 的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.(2007,湖北文(1)) $\tan690°$ 的值为(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

7.(2005,湖南文(2)) $\tan600°$ 的值是(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

8.(2001,全国文(1)) $\tan300°+\cot405°$ 的值为(　　).

A. $1+\sqrt{3}$　　B. $1-\sqrt{3}$

C. $-1-\sqrt{3}$　　D. $-1+\sqrt{3}$

9.(1991,全国理(1))已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,并且 α 是第二象限的角，那么 $\tan\alpha$ 的值是(　　).

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

10.(2009,陕西文(2))若 $\tan\alpha=2$,则 $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ 的值为(　　).

A. 0　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{5}{4}$

11.(2003,北京春季理(6))若 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，且 $A<B<C\left(C\neq\frac{\pi}{2}\right)$,则下列结论中正确的是(　　).

A. $\sin A<\sin C$　　B. $\cos A<\cos C$

C. $\tan A<\tan C$　　D. $\cot A<\cot C$

12.(2004,北京春季文(5))已知 $\sin(\theta+\pi)<0$, $\cos(\theta-\pi)>0$,则下列不等关系中必定成立的是(　　).

A. $\sin\theta<0,\cos\theta>0$　　B. $\sin\theta>0,\cos\theta<0$

C. $\sin\theta>0,\cos\theta>0$　　D. $\sin\theta<0,\cos\theta<0$

13.(2005,北京理(6))已知 $\sin(\theta+\pi)<0$, $\cos(\theta-\pi)>0$,则下列不等关系中必定成立的是(　　).

A. $\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$　　B. $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$

14.(2009,辽宁文(8))已知 $\tan\theta=2$,则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=$(　　).

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

15.(2005,北京理(5))对任意的锐角 α,β,下列不等关系中正确的是(　　).

A. $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$

B. $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

C. $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$

D. $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

二、解答题

16.(1979,全国文(二))化简：$[(1+\sin^2\theta)^2-\cos^4\theta][(1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta]$.

第二节 三角函数的图象和性质

方法指引

三角函数的图象与性质是历年高考的重要内容，主要考查以下几个方面的知识.

1. 周期性

函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 的最小正周期分别是 $2\pi, 2\pi, \pi, \pi$，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(y=A\cos(\omega x+\varphi))$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ $(y=A\cot(\omega x+\varphi))$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

2. 单调区间

在解决三角函数的单调区间时，一般画出草图，依据图象确定.

3. 奇偶性

运用函数奇偶性的定义判断.

解决本节问题时，请注意三角函数图象的运用. 因此，必须熟练掌握三角函数图象的画法，特别是正弦与余弦函数图象的画法.

4. 对称性

三角函数图象关于点成中心对称，也可关于直线成轴对称. 这些都可以根据前面学过的函数的对称性方面的知识解决，在后面的讲解中你可以体会解决的方法.

真题讲解

一、选择题

1. (2005，浙江文(1))函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

解 B.

最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

说明 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2. (2004，全国Ⅲ理(2))函数 $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ 的最小正周期是(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

解 C.

因为 $\left|\sin\left(\frac{1}{2}(x+2\pi)\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)\right|$

$$=\left|-\sin\frac{x}{2}\right|$$

$$=\left|\sin\frac{x}{2}\right|,$$

所以 2π 是函数的一个最小正周期.

说明 这是根据三角函数周期定义得出的，如何知道用 $x+2\pi$ 代替 x 呢？这是观察函数表达式得到的，如果用 $x+\pi$ 代替 x，则

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)\right|=\left|\left(\sin\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi\right)\right|$$

$$=\left|\cos\frac{1}{2}x\right|\neq\left|\sin\frac{1}{2}x\right|.$$

因此，π 不是 $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ 的周期.

3. (2009，江西文(4))函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$ 的最小正周期为(　　).

A. 2π　　B. $\frac{3\pi}{2}$

C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

解 A.

$y=\cos x+\sqrt{3}$，所以最小正周期是 2π.

说明 将函数表达式化为熟悉的基本函数形式，是求三角函数周期的基本方法.

4. (2006，北京文(2))函数 $y=1+\cos x$ 的图象(　　).

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

解 B.

函数 $y=\cos x+1$ 的图象可以看成是由函数 $y=\cos x$ 的图象向上平移一个单位得到的，而函数 $y=\cos x$ 的图象关于 y 轴对称，则 $y=\cos+1$ 的图象也关于 y 轴对称.

说明 还可以这样思考：$\cos(-x)+1=\cos x+1$，因此，$y=\cos x+1$ 是偶函数，则图象关于 y 轴对称.

5. (2006，江苏(1))已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\sin x-|a|$，$x\in\mathbf{R}$ 为奇函数，则 $a=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

解 A.

因为 $f(-x)=\sin(-x)-|a|=-\sin x-|a|$，$f(x)$ 是奇函数，则 $\sin x-|a|=-(-\sin x-|a|)$，即 $|a|=0$，$a=0$.

6.（2003，全国文(8)）函数 $y=\sin(x+\varphi)$（$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $\varphi=$（　　）.

A. 0　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

解　C.

将 4 个选择支中的答案代入 $y=\sin(x+\varphi)$ 中，只有当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，才有 $y=\cos x$ 是偶函数. 因此 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

7.（2007，北京文(2)）设 M 和 m 分别表示函数 $y=\frac{1}{3}\cos x-1$ 的最大值和最小值，则 $M+m$ 等于（　　）.

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -2

解　D.

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant1$，

所以 $M=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$，

$$m=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}, M+m=-2.$$

8.（2007，浙江理(5)）若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ $\left(\text{其中 }\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则（　　）.

A. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

解　D.

由题意知：$\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=2$.

又由 $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow2\sin\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

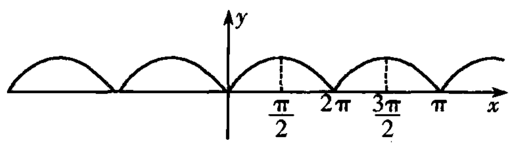
因 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

9.（2007，全国Ⅱ理(2)）函数 $y=|\sin x|$ 的一个单调增区间是（　　）.

A. $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

解　C.



作出函数 $y=|\sin x|$ 的图象如上图，发现函数在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是增函数，而在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 内有增有减，在 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 内是减函数.

说明　画三角函数的图象是判断函数单调区间的一个好方法. 但在画图象时，一定至少要画出一个周期内的图象，不然容易出错. 函数 $y=|\sin x|$ 的周期是 π，但由于所给区间不是一个周期内，所以多画了一个周期，便于看出单调区间.

10.（2003，上海理(13)）下列函数中，既为偶函数又在 $(0,\pi)$ 上单调递增的是（　　）.

A. $y=\tan|x|$　　B. $y=\cos(-x)$

C. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=\left|\cot\frac{x}{2}\right|$

解　C.

选择支提供的 4 个函数都是偶函数，只有 $y=\cos(-x)$ 在 $(0,\pi)$ 内是增函数.

11.（2007，福建文(5)）函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（　　）.

A. 关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称　　B. 关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

C. 关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称　　D. 关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

解　A.

由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow x=\frac{k}{2}\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

令 $k=1$ 得 $x=\frac{\pi}{3}$，

所以函数图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称.

说明　还可以这样思考：如果图象关于 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，则以 $\frac{2\pi}{3}-x$ 代替 x，函数值 y 是 $-y$，即 $y=0$.

$$\begin{aligned}\sin\left[2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\frac{\pi}{3}\right]&=\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2x\right)\\&=\sin\left[2\pi-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-y.\end{aligned}$$

因此，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称.

如果以 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 为对称中心，则以 $\frac{\pi}{2}-x$ 代替 x，函数值是 $-y$，得到

$$\sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left[\pi-\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\neq -y.$$

因此，函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称.

如果以 $x=\frac{\pi}{4}$ 为对称轴的话，则用 $\frac{\pi}{2}-x$ 代替 x，则函数值应是 y，由上知，其函数值不等于 y；如果以 $x=\frac{\pi}{3}$ 为对称轴的话，则用 $\frac{2\pi}{3}-x$ 代替 x，函数值应该是 y，由上知，函数值不是 y.

判断三角函数的对称性，有以下两种情况.

(1) 以点 (a,b) 为对称中心时，则原来函数中的 x 用 $2a-x$ 代替，得到的函数值是 $2b-y$.

(2) 以直线 $x=a$ 为对称轴时，则原来函数中的 x 用 $2a-x$ 代替，得到的函数值不变.

12. (2008，安徽文(8)) 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴方程可能是(　　).

A. $x=-\frac{\pi}{6}$　　B. $x=-\frac{\pi}{12}$

C. $x=\frac{\pi}{6}$　　D. $x=\frac{\pi}{12}$

解　D.

因为对称轴经过图象的最高点或最低点，所以只要将各选项中的 x 值代入函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 中求出 y 值，然后排除 $y\neq\pm1$ 者即可.

当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$y=\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=0$；

当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$y=\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}$；

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y=\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$y=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

因此，$x=\frac{\pi}{12}$ 是函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的对称轴.

说明　也可以根据第10题的方法判断. 第11题与第10题类似的，解法也可以相同. 因此，高考题都有很多惊人的相似.

13. (2009，全国Ⅰ文(10)) 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

解　A.

用 $\frac{8\pi}{3}-x$ 代替 x，函数值是 $-y$，

即 $2\cos\left[2\left(\frac{8\pi}{3}-x\right)+\varphi\right]=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x+\varphi\right)$

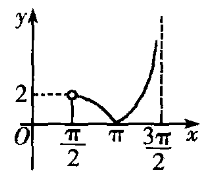
$$=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x+\varphi\right)$$

那么，$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x+\varphi\right)=-2\cos(2x+\varphi)$，

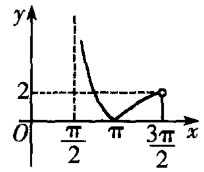
即 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\cos(2x+\varphi)$.

显然，当 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，即 $|\varphi|=\frac{\pi}{6}$ 是使上式成立的最小值.

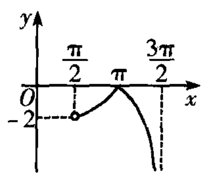
14. (2008，江西理(6)) 函数 $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象大致是(　　).



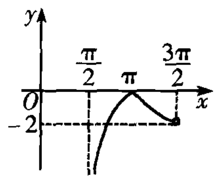
A



B



C



D

解　D.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，

函数 $y=\tan x+\sin x+\tan x-\sin x=2\tan x$；

当 $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，

函数 $y=\tan x+\sin x-\tan x+\sin x=2\sin x$.

观察4个选择支，只有D正确.

说明　对含有绝对值符号的三角函数，先要脱去绝对值符号.

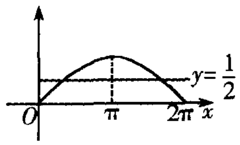
15. (2008，浙江文(7)) 在同一平面直角坐标系中，函数 $y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)(x\in[0,2\pi])$ 的图象和直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

解　C.

因为函数 $y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}$，作出函数

$y=\sin\frac{x}{2}(x\in[0,2\pi)$和$y=\frac{1}{2}$的图象，如右图，可知有2个交点.



说明　由上知，$y=\sin\frac{x}{2}$，

则$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$，

那么$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$或$\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

当$k=0$时，$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}$，$x=\frac{\pi}{3}$或$x=\frac{5\pi}{3}$.

而$\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\in[0,2\pi)$，因此，$x=\frac{\pi}{3}$或$x=\frac{5\pi}{3}$符合题设要求.

当k为不等于0的整数时，求得的$x\notin[0,2\pi)$.

因此，函数$y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)(x\in[0,2\pi))$的图象和直线$y=\frac{1}{2}$的交点个数是2.

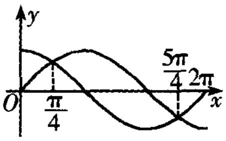
16.（2002，全国理(4)）在$(0,2\pi)$内，使$\sin x>\cos x$成立的x的取值范围为（　　）.

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

解　C.

作出函数$y=\sin x$，$y=\cos x$在$x\in(0,2\pi)$内的图象，如右图.从图象上可以发现，当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$时，$\sin x>\cos x$.



说明　对一些简单的三角函数不等式，可利用图象找出解集.当然，本题也可以这样思考：当$\cos x>0$时，则$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$或$x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$时，原不等式转化为$\tan x>1$，则$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$或$x\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$.因此，$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

若$\cos x<0$，则$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，原不等式转化为$\tan x<1$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$或$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right)$或$x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

因此，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right)$.

若$\cos x=0$，则$x=\frac{\pi}{2}$或$x=\frac{3\pi}{2}$.

综合上述，$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

这样解显然有点复杂.

二、填空题

17.（2008，江苏(1)）$f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为$\frac{\pi}{5}$，其中$\omega>0$，则$\omega=$________.

解　10.

由$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{5}\Rightarrow\omega=10$.

18.（2002，上海理(10)）设函数$f(x)=\sin 2x$，若$f(x+t)$是偶函数，则t的一个可能值是________.

解　$\frac{\pi}{4}$.

$f(x+t)=\sin(2x+2t)$，$f(-x+t)$

$=\sin 2(-x+t)=\sin(-2x+2t)$.

因为$f(x+t)$是偶函数，

所以$\sin(2x+2t)=\sin(-2x+2t)$

$=\sin[\pi-(-2x+2t)]$.

则$2x+2t=\pi-(-2x+2t)$，$t=\frac{\pi}{4}$.

说明　本题有很多种填法，只要一个正确就行了.上述解法就是取了一个最简单的.

由$\sin(2x+2t)=\sin(-2x+2t)$可得，$2x+2t=(2k+1)\pi-(-2x+2t)$，$t=\frac{(2k+1)\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

19.（1998，全国理(19)）关于函数

$f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，有下列命题：

①由$f(x_1)=f(x_2)=0$可得x_1-x_2必是π的整数倍；

②$y=f(x)$的表达式可改写为$y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

③$y=f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称；

④$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称.

其中正确的命题的序号是________.

（注：把你认为正确的命题的序号都填上）

解　②③.

在①中，由$f(x_1)=0$得，$4\sin\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

即$\sin\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

那么$2x_1+\frac{\pi}{3}=k_1\pi$，$x_1=\frac{k_1\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k_1\in\mathbf{Z}$.

同理，$x_2=\frac{k_2\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k_2\in\mathbf{Z}$.

因此，$x_1-x_2=(k_1-k_2)\cdot\frac{\pi}{2}$. 但是，$k_1-k_2$ 不一定是2的倍数，故①不一定正确.

又 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=4\cos\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left[-\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

因此，②正确.

函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象若以点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 为对称中心，则在此函数中，x 用 $-\frac{\pi}{3}-x$ 代替，得到的函数值一定要是 $-y$.

$4\sin\left[2\left(-\frac{\pi}{3}-x\right)+\frac{\pi}{3}\right]=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-y$.

因此，③正确.

函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象若以直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，则在此函数中，x 用 $-\frac{\pi}{3}-x$ 代替，得到的函数值一定要是 y.

由上计算可知，得到的函数值是 $-y$，而不是 y，故④不正确.

综合上述，正确的是②③.

20.（2008，四川延考理（15））已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调增加，在 $\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$ 上单调减少，则 $\omega=$________.

解 $\frac{1}{2}$.

由题意 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{4}{3}\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\frac{4}{3}\pi\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{3}{2}k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}$.

又 $\omega>0$，令 $k=0$ 得 $\omega=\frac{1}{2}$.（如 $k>0$，则 $\omega\geqslant2,T\leqslant\pi$ 与已知矛盾）

说明 为什么发现了 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=1$？

因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\omega}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调增加，在 $\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$ 上单调减少，所以函数在 $x=\frac{4\pi}{3}$ 处取得最大值1. 发现了这一点，就可以为求 ω 建立方程.

如果运用不等式组 $\begin{cases}f(0)>f\left(\frac{4\pi}{3}\right),\\ f\left(\frac{4\pi}{3}\right)>f(2\pi)\end{cases}$ 求 ω 的话，得到的只是 ω 的一个取值范围，不能求出具体值.

21.（2006，福建文（16））已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2，则 ω 的最小值是________.

解 $\frac{3}{2}$.

由题意得 $\omega x=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\omega x=\frac{3\pi}{2}$，又因为 $\omega>0$，

解得 $x=\frac{3\pi}{2\omega}$ 或 $x=-\frac{\pi}{2\omega}$，又 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$

所以 $0<\frac{3\pi}{2\omega}\leqslant\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega\geqslant6$

或 $-\frac{\pi}{3}\leqslant-\frac{\pi}{2\omega}<0\Rightarrow\omega\geqslant\frac{3}{2}$.

22.（2008，辽宁理（16））已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上有最小值，无最大值，则 $\omega=$________.

解 $\frac{14}{3}$.

因为 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 有最小值，无最大值，故

$f\left(\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$，

即 $\sin\left(\omega\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

又 $\omega>0$，故 $\omega\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{14}{3}$.

三、解答题

23.（1980，全国理（六））设三角函数

$f(x)=\sin\left(\frac{k}{5}x+\frac{\pi}{3}\right)$，其中 $k\neq0$.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 极大值 M、极小值 m 与最小正周期；

（Ⅱ）试求最小的正整数 k，使得当自变量 x 在任意两个整数间（包括整数本身）变化时，函数 $f(x)$ 至少有一个值是 M 与一个值是 m.

解 （Ⅰ）$M=1,m=-1,T=\frac{2\pi}{\left|\frac{k}{5}\right|}=\frac{10\pi}{|k|}$.

（Ⅱ）$f(x)$ 在它的每一个周期中都恰好有一个值是

M 与一个值是 m，而任意两个整数间的距离都 $\geqslant 1$. 因此要使任意两个整数间函数 $f(x)$ 至少有一个值是 M 与一个值是 m，必须且只须使 $f(x)$ 的周期 $\leqslant 1$，即

$\frac{10\pi}{|k|}\leqslant 1$，$|k|\geqslant 10\pi\approx 31.4$.

可见，$k=32$ 就是这样的最小正整数.

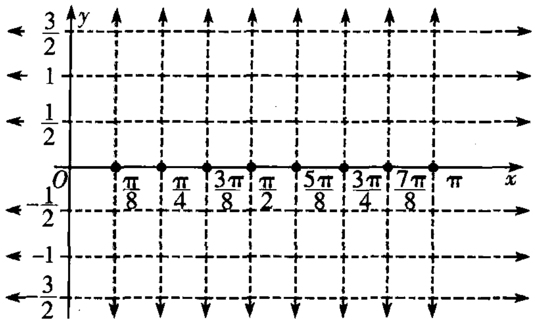
说明　关键是理解自变量 x 在任意两整数间变化的意义是周期不大于 1，从而建立关于 k 的不等式.

24.（2005，全国文(17)）设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ $(-\pi<\varphi<0)$，$y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

（Ⅰ）求 φ；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间；

（Ⅲ）画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象.



解　（Ⅰ）因为 $x=\frac{\pi}{8}$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的对称轴，所以 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=\pm 1$.

那么，$\frac{\pi}{4}+\pi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 $-\pi<\varphi<0$，$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$，$y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

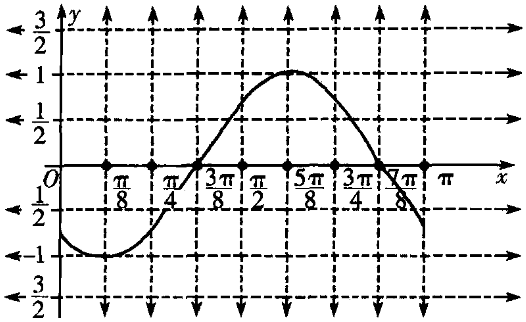
由题意得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（Ⅲ）由 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 知

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

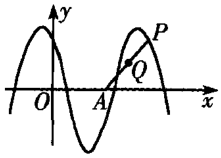
故函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象是



25.（2007，江西文(18)）如图，函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ $\left(x\in\mathbf{R},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0,\sqrt{3})$，且该函数的最小正周期为 π.

（Ⅰ）求 θ 和 ω 的值；

（Ⅱ）已知点 $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，点 P 是该函数图象上一点，点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点，当 $y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，求 x_0 的值.



解　（Ⅰ）将 $x=0$，$y=\sqrt{3}$ 代入函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ 得，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

又因为最小正周期是 π，则 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，$\omega=\pm 2$.

当 $\omega=-2$ 时，函数图象就不是题中的图象，因此，$\omega=2$.

因此，$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（Ⅱ）因为点 $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点，$y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以点 P 的坐标是 $\left(2x_0-\frac{\pi}{2},\sqrt{3}\right)$.

又因为点 P 在 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上，

所以 $\cos\left(4x_0-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，

所以 $\frac{7\pi}{6}\leqslant 4x_0-\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{6}$，从而 $4x_0-\frac{5\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$ 或 $4x_0-\frac{5\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$，即 $x_0=\frac{2\pi}{3}$ 或 $x_0=\frac{3\pi}{4}$.

高考直击

一、选择题

1. (2007,江苏(1))下列函数中,周期为$\frac{\pi}{2}$的是( ).

A. $y=\sin\frac{x}{2}$　　B. $y=\sin2x$

C. $y=\cos\frac{x}{4}$　　D. $y=\cos4x$

2. (1988,全国文(一)(8))函数

$y=3\cos\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期是( ).

A. $\frac{2}{5}\pi$　B. $\frac{5}{2}\pi$　C. 2π　D. 5π

3. (2004,北京春季理(1))在函数$y=\sin2x$,$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan\frac{x}{2}$中,最小正周期为π的函数是( ).

A. $y=\sin2x$　　B. $y=\sin x$

C. $y=\cos x$　　D. $y=\tan\frac{x}{2}$

4. (2006,江西文(2))函数$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$的最小正周期为( ).

A. $\frac{\pi}{2}$　B. π　C. 2π　D. 4π

5. (2007,江西文(2))函数$y=5\tan(2x+1)$的最小正周期为( ).

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. π　D. 2π

6. (2008,天津理(3))设函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$,$x\in\mathbf{R}$,则$f(x)$是( ).

A. 最小正周期为π的奇函数

B. 最小正周期为π的偶函数

C. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

D. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

7. (2004,辽宁(7))已知函数

$f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-1$,则下列命题正确的是( ).

A. $f(x)$是周期为1的奇函数

B. $f(x)$是周期为2的偶函数

C. $f(x)$是周期为1的非奇非偶函数

D. $f(x)$是周期为2的非奇非偶函数

8. (1997,全国理(10))函数$y=\cos^2x-3\cos x+2$的最小值为( ).

A. 2　B. 0　C. $-\frac{1}{4}$　D. 6

9. (2000,上海文(13))函数

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$是( ).

A. 增函数　　B. 减函数

C. 偶函数　　D. 奇函数

10. (2005,福建文(4))函数$y=\cos2x$在下列哪个区间上是减函数( ).

A. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

11. (1988,全国文(一)(13))函数

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$在闭区间( ).

A. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数

B. $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是增函数

C. $[-\pi,0]$上是增函数

D. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上是增函数

12. (2006,全国Ⅰ理(5))函数$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调增区间为( ).

A. $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$

B. $(k\pi,(k+1)\pi),k\in\mathbf{Z}$

C. $\left(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

13. (2004,天津理(9))函数$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)(x\in[0,\pi])$为增函数的区间是( ).

A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

14. (2005,全国Ⅱ文(4))已知函数$y=\tan\omega x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是减函数,则( ).

A. $0<\omega\leqslant1$　　B. $-1\leqslant\omega<0$

C. $\omega\geqslant1$　　D. $\omega\leqslant-1$