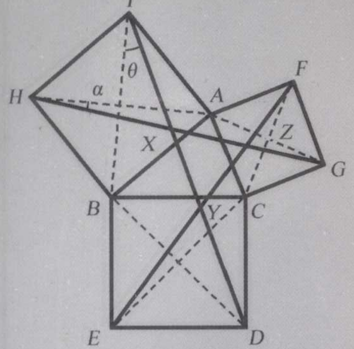
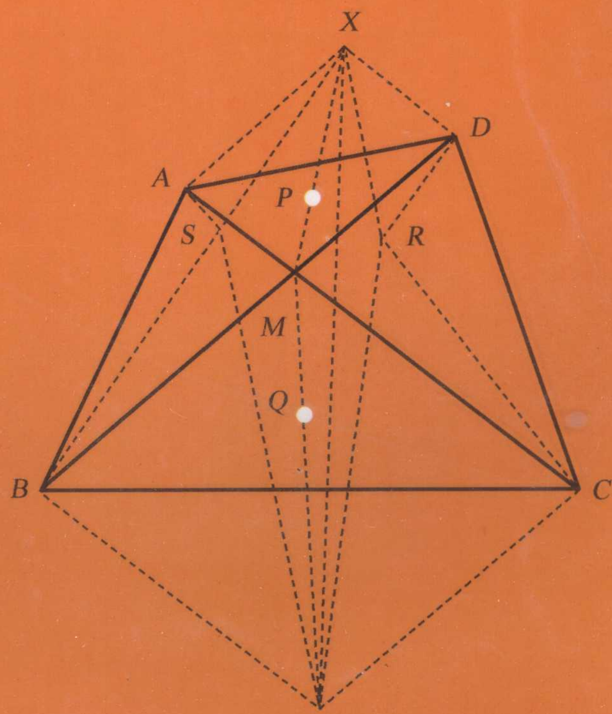


数学竞赛平面几何典型题及新颖解

万喜人 著

Shuxuejingsai Pingmianjihe
Dianxingti ji Xinyingjie



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHUXUEJINGSAI PINGMIANJIHE DIANXINGTI JI XINYINGJIE

数学竞赛平面几何典型题及新颖解

万喜人 著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书从国内外各级数学竞赛中精选提炼出百余道具有典型性的平面几何试题，分为十种题型，各题型由易到难分为A，B，C三类．每道题都有多种解法．在解题方法的使用上，更注重于常规的平面几何方法，每道题都有作者首创的解法，突出了“新颖”一词．本书以大量的具体的事例说明：可以采用常规的而又灵活的方法，简洁地解决平面几何难题，有利于拓展读者的视野，开启读者的思维，扎实地训练读者的基本功．

本书适合于优秀的初高中学生尤其是数学竞赛选手、初高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用，也适合于平面几何爱好者使用．

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛平面几何典型题及新颖解/万喜人著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.5

ISBN 978-7-5603-3033-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①万… Ⅲ.①平面几何-中学-解题 Ⅳ.①G634.635

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第101235号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 尹 凡
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787×960 1/16 印张23 字数421千字
版 次 2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3033-4
印 数 1～3 000册
定 价 48.00元

前　言

平面几何是训练学生严格、简洁、灵活的演绎推理能力的最好课程.在各种类别、层次的数学竞赛活动中,平面几何试题始终占据着重要的地位.全国高中数学联赛加试中规定有一道平面几何题,近十多年的IMO试题中,平面几何试题甚至占到了总量的三分之一.因此,对于有志在数学竞赛中取得好成绩的学生来说,过好平面几何这一关显得非常必要,同时也特别重要.

本书从上千道平面几何试题中精选提炼出具有典型性的试题一百余道,分为十种题型,各题型由易到难分为A,B,C三类.A类题指全国初中联赛级试题;B类题指全国高中联赛、省市高中竞赛、全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛试题等;C类题指IMO试题或预选题、世界各国数学奥林匹克试题、中国国家队选拔赛试题或训练题等.

每道题都有多种解法,部分题目还在前面有分析,后面有以总结归纳解题方法为主要内容的评注.在解题方法的使用上,更注重于常规的平面几何方法,突出了"新颖"一词,每道题都有作者首创的简洁、灵活的解法,而没有把推理过程冗长、运算量较大或者广为流传的解法全部罗列上.

有些平面几何试题,尽管已有多年的历史,但标准答案和其后各种书刊中的解法都是三角法、解析法等非几何解法,而本书给出了"纯几何法",且解法并不复杂(请参阅第21题、第35题,第66题等).

之所以注重使用常规的平面几何方法,是因为平面几何方法极富技巧性、趣味性,能更好地拓展学生的视野,开启学生的思维,扎实地训练学生的基本功,更有利于揭示几何试题的神秘性,消除学生的畏惧心理,从而渡过平面几何难关,这正是编写本书要达到的目的.

本书适合于初高中学生尤其是数学竞赛选手、初高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用,也适合于平面几何爱好者使用.

本书的编写,得到了湖南师范大学沈文选教授的大力支持和热情帮助,他对全书作了认真仔细的校正,并提供了一些精美的解法,在内容的整理编排过程中,自始至终给予作者技术指导.本书内容主要取材于1993年至2009年的《中等数学》杂志,在编写中参考了沈文选教授的相关著作.在此特向沈教授及书中问题的提出者、解答者、翻译者表示衷心的感谢.

本书是作者近二十年学习研究的成果，因为资料的积累经历多年，加之作者水平有限，书中难免有疏漏与不足之处，敬请同行和读者斧正（电话：13467566578，E-mail：wanxiren@yeah.net）.

万喜人

2009 年 9 月于长沙

目　录

1

线段、角相等或图形全等、相似

A 类题

❶ 过$\triangle ABC$顶点A，在$\angle A$内任引一射线，过B，C作射线的垂线BP，CQ，P，Q为垂足；又M为BC的中点．证明：$MP = MQ$．

（1995 年安徽省部分地区初中数学竞赛）

证法 1 如图 1.1，作$MD \perp AP$于D．因为

$$CQ \perp AP, BP \perp AP$$

所以
$$CQ \parallel DM \parallel BP$$

所以
$$\frac{QD}{DP} = \frac{CM}{MB} = 1, QD = DP$$

所以MD垂直平分PQ，从而$MP = MQ$．

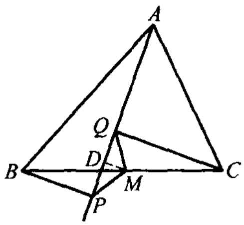


图 1.1

证法 2 如图 1.2，延长PM交CQ于D．因为

$$CQ \perp AP, BP \perp AP$$

所以
$$CQ \parallel BP$$

所以
$$\frac{DM}{MP} = \frac{CM}{MB} = 1$$

即
$$DM = MP$$

在$\mathrm{Rt}\triangle DQP$中，M为斜边PD的中点．所以

$$MP = MQ$$

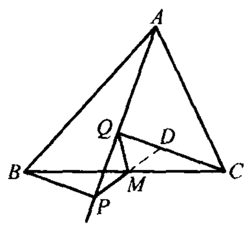


图 1.2

证法 3 如图 1.3，过M作$FE \perp CQ$，FE交直线BP，CQ分别于F，E．因为

$$CQ \perp AP, BP \perp AP$$

所以$QPFE$为矩形，$QE = PF$．因为

$$CQ \parallel BF$$

所以 $$\frac{EM}{FM}=\frac{CM}{BM}=1$$

即 $$EM=FM$$

又 $$\angle QEM=\angle PFM=90^\circ$$

所以 $$\triangle QEM\cong\triangle PFM$$

所以 $$MP=MQ$$

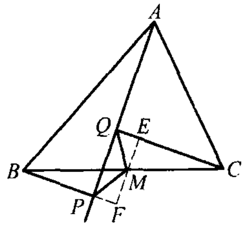


图 1.3

证法 4 如图 1.4,作 $BD\perp CQ$,交 CQ 的延长线于 D.

易知 $DBPQ$ 为矩形,$BP=DQ$.

因为 M 为 Rt$\triangle BDC$ 的斜边 BC 的中点,所以

$$MB=MD$$

$$\angle DBM=\angle BDM\Rightarrow\angle MBP=\angle MDQ$$

所以 $$\triangle MBP\cong\triangle MDQ$$

所以 $$MP=MQ$$

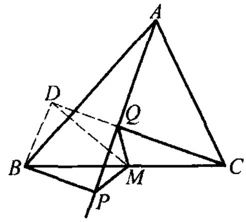


图 1.4

证法 5 如图 1.5,作 B,C 关于 AP 的对称点 E,F,连 BF,CE.则 BF,EC 是关于 AP 的对称线段,所以

$$EC=BF$$

因为 P,M,Q 分别为 BE,BC,CF 的中点.所以

$$MP=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}BF=MQ$$

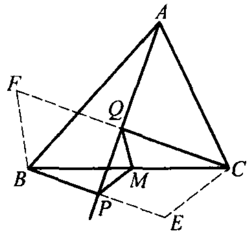


图 1.5

证法 6 如图 1.6,设 $\angle QCB=\angle PBC=\alpha$,$\angle PQM=\beta$,$\angle QPM=\gamma$.

在 $\triangle BPM$ 中

$$\frac{MP}{\sin\alpha}=\frac{BM}{\sin(90^\circ\pm\gamma)}=\frac{BM}{\cos\gamma}$$

在 $\triangle QMC$ 中

$$\frac{MQ}{\sin\alpha}=\frac{CM}{\sin(90^\circ\mp\beta)}=\frac{BM}{\cos\beta}$$

所以 $$\frac{MP}{MQ}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

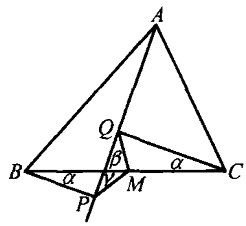


图 1.6

在 $\triangle MPQ$ 中

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

所以 $$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

即 $$\tan\beta = \tan\gamma$$

又 $0° \leqslant \gamma, \beta \leqslant 90°$，所以 $\beta = \gamma$，故 $MP = MQ$.

证法7 如图1.7，以 Q 为原点，CQ 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，则可设 $A(0,a)$，$B(b,c)$，$C(d,0)$. 于是

$$P(0,c), M\left(\frac{b+d}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

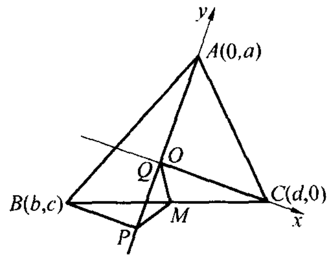


图1.7

所以

$$|MP|^2 = \left(\frac{b+d}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - c\right)^2 = \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$|MQ|^2 = \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

故 $$|MP| = |MQ|$$

❷ 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB = 2BC$，$\angle B = 2\angle A$，则 $\triangle ABC$ 是（　　）.

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不能确定

（1994年湖北黄冈市初中数学竞赛）

解法1 如图2.1，因 $AB > BC$，则 $\angle C > \angle A$. 可以在 AB 上取点 D，使 $\angle 1 = \angle A$. 则

$$\angle 2 = 2\angle A = \angle B$$

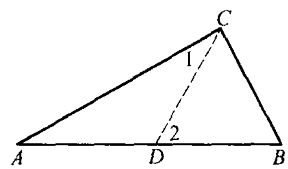


图2.1

所以 $$AD = CD = BC = \frac{1}{2}AB$$

故 $$AD = CD = DB$$

于是 $\angle C = 90°$，$\triangle ABC$ 是直角三角形. 选B.

解法2 如图2.2，取 AB 的中点 D，作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 E，连 ED. 则

$$\triangle BCE \cong \triangle BDE (\mathrm{SAS})$$

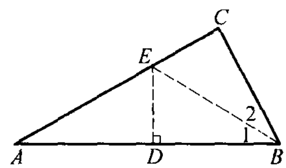


图2.2

因为 $$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle B = \angle A$$

所以 $\triangle EAB$ 是等腰三角形，有 $ED \perp AB$. 故

$$\angle C = \angle EDB = 90°$$

$\triangle ABC$ 是直角三角形,选 B.

解法 3 如图 2.3,因 $\angle 1 < \angle B$,则 $\angle 1$ 必为锐角,可以在 BC 的延长线上取点 D,使 $\angle 2 = \angle 1$.则

$$\angle DAB = 2\angle 1 = \angle B$$

$$AD = BD$$

由三角形内角平分线定理得

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = 2$$

即 $$AD = 2DC$$

所以 $$BD = 2DC$$

从而 $$BC = DC$$

又 $$\angle 1 = \angle 2$$

所以 $$AC \perp BD, \angle ACB = 90^\circ$$

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形,选 B.

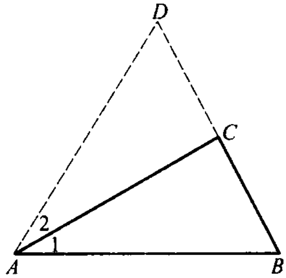


图 2.3

解法 4 如图 2.4,延长 BC 至 D 使 $BD = 2BC$,作 $BE \perp AD$ 于 E,交 AC 于 O,连 DO.则 $AB = BD$,所以 BE 是 AD 的中垂线.所以

$$OD = OA$$

$$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B = \angle 1$$

$$OB = OA$$

所以 $$OD = OB$$

又 $$BC = CD$$

所以 $$\angle BCA = 90^\circ$$

$\triangle ABC$ 是直角三角形,故选 B.

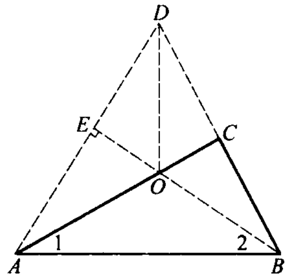


图 2.4

解法 5 如图 2.5,由熟知命题(参看 28 题)有

$$\angle B = 2\angle A \Leftrightarrow b^2 = a^2 + ac$$

又 $$c = 2a$$

所以 $$b^2 = 3a^2$$

有 $$c^2 = a^2 + b^2$$

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.选 B.

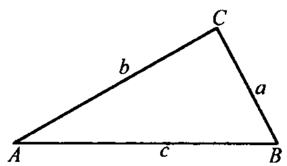


图 2.5

评注 此题是以我们熟悉的直角三角板为模型编拟出来的.下面,我们仿编了一组问题,供读者练习.

① 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=3\angle A$,$AB=2BC$,求证:$\angle C=90^\circ$.

② 在 $\triangle ABC$ 中,$3\angle B=2\angle C$,$AB=2BC$,求证:$\angle C=90^\circ$.

③ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C-\angle A=60^\circ$,$AB=2BC$,求证:$\angle C=90^\circ$.

④ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B-\angle A=30^\circ$,$AB=2BC$,求证:$\angle C=90^\circ$.

⑤ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C-\angle B=30^\circ$,$AB=2BC$,求证:$\angle C=90^\circ$.

⑥ 将上面各题中的条件 $AB=2BC$,更换为 $AC=\sqrt{3}BC$ 或 $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$,命题还成立吗?

❸ 已知在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=90^\circ$,$AB=AC$,D 为 AC 中点,$AE\perp BD$ 于 E,延长 AE 交 BC 于 F.求证:$\angle ADB=\angle CDF$.

(1999 年天津市初二数学竞赛)

证法 1 如图 3.1,作 $\angle BAC$ 的平分线交 BD 于 G.因为

$$\angle GAB=45^\circ=\angle C,AB=AC$$

又 $$\angle 1=\angle 2(AB\perp AD,AE\perp BD)$$

所以 $$\triangle AGB\cong\triangle CFA,AG=CF$$

又 $$AD=CD$$

$$\angle GAD=45^\circ=\angle C$$

所以 $$\triangle ADG\cong\triangle CDF$$

故 $$\angle ADB=\angle CDF$$

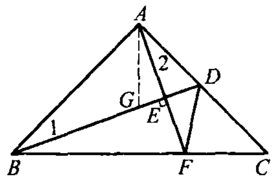


图 3.1

证法 2 如图 3.2,作 $CG /\!/ AB$ 交 AF 的延长线于 G.因为

$$AB=AC,\angle 1=\angle 2$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle CAG,\angle ADB=\angle G$$

又 $$DC=AD=CG$$

$$\angle DCF=45^\circ=\angle GCF$$

CF 公有,所以

$$\triangle DCF\cong\triangle GCF$$

$$\angle CDF=\angle G$$

所以 $$\angle ADB=\angle CDF$$

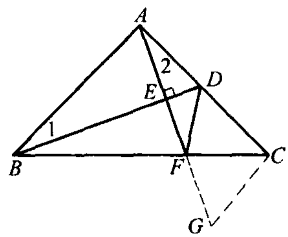


图 3.2

证法 3 如图 3.3,作 $FG\perp CD$ 于 G,设 $AB=2$,

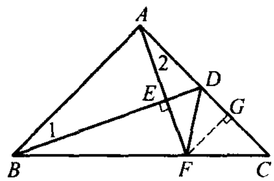


图 3.3

则 $AD = DC = 1$.因为

$$\angle 1 = \angle 2$$

所以 $$\text{Rt}\triangle ABD \backsim \text{Rt}\triangle GAF$$

所以 $$AG = 2FG$$

在 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中,$FG = GC$,所以

$$AG = 2GC$$

又 $$AG + GC = 2$$

可知 $$AG = \frac{4}{3}, GC = \frac{2}{3} = FG, DG = \frac{1}{3}$$

所以 $$\frac{FG}{DG} = 2 = \frac{AB}{AD}$$

所以 $$\text{Rt}\triangle ABD \backsim \text{Rt}\triangle GFD$$

所以 $$\angle ADB = \angle CDF$$

证法 4 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,因为 $AE \perp BD$,所以

$$DE \cdot BD = AD^2, EB \cdot BD = AB^2$$

所以 $$\frac{DE}{EB} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

考虑直线 AEF 截 $\triangle BCD$,由梅涅劳斯(Menelaus)定理得

$$\frac{DE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} = 1$$

又 $$\frac{CA}{AD} = 2$$

所以 $$\frac{BF}{FC} = 2$$

又因为 $$\frac{AB}{CD} = 2$$

所以 $$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CD}$$

又 $$\angle ABF = \angle C = 45^\circ$$

所以 $$\triangle ABF \backsim \triangle DCF$$

所以 $$\angle ADB = \angle BAF = \angle CDF$$

证法 5 可设 $\angle DAE = \angle ABE = \alpha, \angle BAE = \angle ADE = \beta$.

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理知

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

又 $$\frac{BF}{CF} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BC \cdot CF\sin\beta}{AC \cdot CF\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

所以 $$\frac{AB}{AD}=\frac{BF}{CF}$$

即 $$\frac{AB}{CD}=\frac{BF}{CF}$$

以下同证法 4.

4 如图 4.1,等腰 $\triangle ABC$ 中,P 为底边 BC 上任意一点,过 P 作两腰的平行线分别与 AB,AC 相交于 Q,R 两点,又 P' 是 P 关于直线 RQ 的对称点.证明:$\triangle P'QB\backsim\triangle P'RC$.

(2002 年全国初中数学联赛第二试(A))

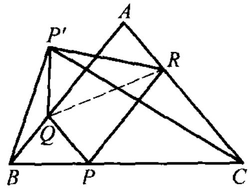


图 4.1

证法 1 利用全等三角形.

如图 4.1,联结 RQ.

因为 $AQPR$ 是平行四边形,P,P' 关于 QR 对称,所以
$$\triangle AQR\cong\triangle PRQ\cong\triangle P'RQ$$

所以 $$\angle AQR=\angle P'RQ,\angle P'QR=\angle ARQ$$

从而 $$\angle AQP'=\angle ARP'$$
$$\angle P'QB=\angle P'RC$$

又因为 $$PQ\parallel AC$$

所以 $$QB=QP=QP'$$

同理 $$RC=RP=RP'$$

即 $$\frac{QB}{RC}=\frac{QP'}{RP'}$$

所以 $$\triangle P'QB\backsim\triangle P'RC$$

证法 2 如图 4.1,联结 RQ.因为
$$PQ\parallel AC,PR\parallel AB$$

所以 $$\angle BQP=\angle A=\angle PRC=\angle QPR$$

设 $$\angle PRQ=\alpha$$

则 $$\angle QRP'=\alpha$$
$$\angle RQP'=\angle RQP=180^\circ-\angle A-\alpha$$

所以 $$\angle BQP'=360^\circ-\angle BQP-\angle RQP'-\angle RQP=$$
$$360^\circ-\angle A-2(180^\circ-\angle A-\alpha)=$$
$$\angle A+2\alpha=\angle CRP'$$

又 $$QB=QP=QP',RC=RP=RP'$$

所以 $$\triangle P'QB \backsim \triangle P'RC$$

证法 3 利用圆的知识.如图 4.2,联结 $P'P$.

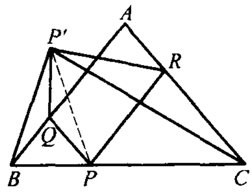


图 4.2

因为 $PQ \parallel AC$,P',P 关于 QR 对称,所以

$$QB = QP = QP'$$

即 Q 是 $\triangle P'BP$ 的外心.所以

$$\angle BQP' = 2\angle BPP'$$

同理 R 是 $\triangle P'CP$ 的外心.所以

$$\angle CRP' = \angle CRP + \angle PRP' = 2\angle CP'P + 2\angle PCP' = 2\angle BPP'$$

所以 $$\angle BQP' = \angle CRP'$$

又 $$QB = QP', RC = RP'$$

故 $$\triangle P'QB \backsim \triangle P'RC$$

❺ 如图5.1,在 $\triangle ABC$ 中,D 是边 AC 上一点.下面四种情况中,$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$ 不一定成立的情况是( ).

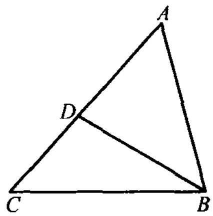


图 5.1

A. $AD \cdot BC = AB \cdot BD$ B. $AB^2 = AD \cdot AC$

C. $\angle ABD = \angle ACB$ D. $AB \cdot BC = AC \cdot BD$

(2001 年全国初中数学联赛)

解 应选 D.

易知 B,C 一定成立.下面用多种方法证明 A 成立,即证明:若 $AD \cdot BC = AB \cdot BD$,则 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$.

证法 1 如图 5.2,因 $\angle BDC + \angle C < 180°$,作 $\angle DBE = \angle C$,则边 BE 一定与 DC(或其延长线)相交于一点 E.这时

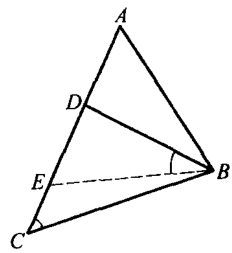


图 5.2

$$\triangle DBE \backsim \triangle DCB$$

所以 $$\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{BD}$$

又 $$AD \cdot BC = AB \cdot BD \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{AD}$$

所以 $$\frac{BE}{ED} = \frac{AB}{AD}$$

由三角形内角平分线性质定理的逆定理知

$$\angle DBE = \angle ABD$$

所以 $\angle ABD=\angle ACB$

从而 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$

证法 2 如图 5.3,作 $\triangle ABC$ 的外接圆,延长 BD 交圆于 E,联结 CE.因为

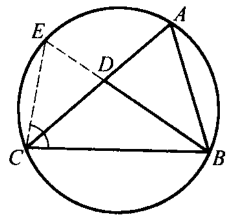


图 5.3

$$\triangle ECD \backsim \triangle ABD$$

所以 $$\frac{CE}{ED}=\frac{AB}{AD}$$

又 $$AD\cdot BC=AB\cdot BD\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{BD}$$

所以 $$\frac{CE}{ED}=\frac{BC}{BD}\Rightarrow\angle ECD=\angle BCD$$

又因为 $$\angle ECD=\angle ABD$$

所以 $$\angle ABD=\angle BCD$$

从而 $$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$$

证法 3 如图 5.4,作 $BE\perp AC$ 于 E,作 $DF\perp AB$ 于 F,则

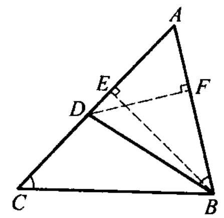


图 5.4

$$DF=AD\sin A, BE=AB\sin A$$

又因为 $$AD\cdot BC=AB\cdot BD$$

则 $$DF\cdot BC=BE\cdot BD$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle BDF \backsim \mathrm{Rt}\triangle CBE$$

从而 $$\angle ABD=\angle ACB$$

得 $$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$$

证法 4 如图 5.5,作 $\angle ABD'=\angle C$,BD' 交 AC 于 D'.假设 $AD'>AD$.作 $D'E/\!/BD$ 交 AB 的延长线于 E.因为

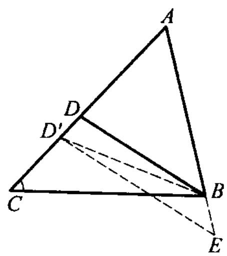


图 5.5

$$\triangle ABD' \backsim \triangle ACB$$

所以 $$AD'\cdot BC=AB\cdot BD'$$

又 $$AD\cdot BC=AB\cdot BD$$

所以 $$\frac{AD}{AD'}=\frac{BD}{BD'}$$

又由 $D'E/\!/BD$,知

$$\frac{AD}{AD'}=\frac{BD}{D'E}$$

所以 $$BD'=D'E$$

但 $\angle D'BE > \angle AD'B = \angle ABC > \angle ABD = \angle E$

所以 $D'E > BD'$.前后结论矛盾.所以

$$AD' \not> AD$$

同理 $AD \not> AD'$

故 $AD' = AD$

即 BD' 与 BD 重合.从而

$$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$$

证法 5 因为

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD} = \frac{BD}{\sin\angle A}, \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AB}{\sin\angle C}$$

又 $AD \cdot BC = AB \cdot BD$

所以 $\sin\angle ABD = \sin\angle C$

但 $0° < \angle ABD + \angle C < \angle ABC + \angle C < 180°$

所以 $\angle ABD = \angle C$

从而 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$

评注 有的同学不相信 A 也成立. A 为什么会成立呢?这是因为在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACB$ 中,除有明显的"边边角"条件外,还隐含有 $\angle ADB + \angle C < 180°$ 等条件.五种证法各有特色,请仔细体会.

❻ 设 P 为 $\square ABCD$ 内一点,$\angle BAP = \angle BCP$.求证:$\angle PBC = \angle PDC$.

(1979 年青岛市初中数学竞赛)

证法 1 如图 6.1,因 $\angle BAP = \angle BCP$,在 BC 上取点 E,使 $PE = PC$,构造等腰 $\triangle PCE$,连 AE,则 A,B,E,P 四点共圆.所以

$$\angle PBC = \angle PAE$$

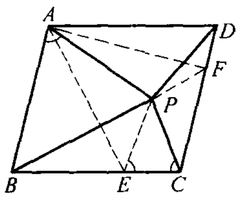


图 6.1

易知 $\angle PAD = \angle PCD$,在 CD 上取点 F,使 $PF = PC$,构造等腰 $\triangle PCF$,连 AF,则 P,A,D,F 四点共圆.所以

$$\angle PDC = \angle PAF$$

因为 $\angle APE = 180° - \angle ABC = 180° - \angle ADC = \angle APF$

$$PE = PC = PF$$

AP 为公共边,所以

$$\triangle APE \cong \triangle APF, \angle PAE = \angle PAF$$