高等学校经济管理学科数学基础系列教材

线性代数习题全解

◎ 张学奇　主编

中国人民大学出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

线性代数习题全解

◎ 张学奇 主编

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题全解/张学奇主编.
北京：中国人民大学出版社，2010
高等学校经济管理学科数学基础系列教材
ISBN 978-7-300-11897-0

Ⅰ.①线…
Ⅱ.①张…
Ⅲ.①线性代数-高等学校-解题
Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 048709 号

高等学校经济管理学科数学基础系列教材
线性代数习题全解
张学奇　主编
Xianxing Daishu Xiti Quanjie

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河汇鑫印务有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32 开本	**版　　次**	2010 年 4 月第 1 版
印　　张	4.5 插页 1	**印　　次**	2010 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	172 000	**定　　价**	10.00 元

前　言

本书是与高等学校经济管理学科数学基础系列教材《线性代数》(张学奇主编,中国人民大学出版社出版)相配套的习题全解,主要作为学生学习《线性代数》课程时演算习题的解题指导以及复习应试的参考书,同时也可供讲授《线性代数》课程的教师备课和批改作业时参考.

高等学校经济管理学科数学基础系列教材《线性代数》是依据经济类、管理类各专业对线性代数课程的教学基本要求,在总结线性代数课程教学改革成果,吸收国内外同类教材的优点,结合我国高等教育发展趋势的基础上编写的.《线性代数》教材中习题覆盖面宽、题型丰富、难易适度;按节配有适量的基本练习题,主要用于巩固和加深对基本概念、基本定理、基本方法的理解和掌握;按章配有总习题,总习题包括单项选择题、计算题和证明题,总习题是对单元基本教学内容理解和掌握的进一步强化,可供读者提高综合解题能力和检测对基本教学内容的掌握程度.

全书按教材章节顺序编排,与教材同步,对《线性代数》教材中各章的全部习题与总习题都给出了完整、典型、详实的解答,对重点习题给出了分析和解题指导,对提高学生的解题能力具有积极的促进作用.

本书由张学奇教授主编,参加本书编写的有:张学奇、贺家宁、岳卫芬.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请同行和读者批评指正!

编　者

2010 年 2 月

目　录

第一章 矩 阵

习题 1.1

1. 某工厂生产 A、B、C 三种产品，它们的成本包括三类：原料费、工资、管理费和其他费用，生产单位产品的成本（单位：元）见下表. 试将其用矩阵表示.

成本	产品		
	A	B	C
原料费	2	6	3
工资	6	8	5
管理费和其他费用	2	4	3

解 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&6&3\\6&8&5\\2&4&3\end{pmatrix}$.

2. 某班 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程(数学、计算机、英语)的期末考试成绩见下表. 试将其用矩阵表示.

学生	课程		
	数学	计算机	英语
甲	91	85	93
乙	78	81	72
丙	93	90	95
丁	65	76	78

解 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}91&85&93\\78&81&72\\93&90&95\\65&76&78\end{pmatrix}$.

3. 试确定 a，b，c 的值，使得

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\a+b&3&5\\1&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-1&0\\-2&3&5\\1&0&6\end{pmatrix}$$

解 由矩阵相等，得 $a=6$，$a+b=-2$，$c=2$，解得 $a=6$，$b=-8$，$c=2$.

习题 1.2

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 5 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 6 & 2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 3 & 6\\ -6 & 3 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3 & -8\\ 12 & -1 & -19\end{pmatrix}$$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1-4 & x_2+2\\ x_3+2 & x_4-4\end{pmatrix}，\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-x_1 & -2-x_2\\ -2-x_3 & -x_4\end{pmatrix}$$

利用矩阵相等的定义，得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

3. 计算下列矩阵的乘积：

(1) $\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 7 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$　　(2) $(1, 2, 3)\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}(-1, 2)$　　(4) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{pmatrix}^3$　　(6) $(1, -1, 2)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$

(7) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^4$

解 (1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times7+3\times2+1\times1 \\ 1\times7+(-2)\times2+3\times1 \\ 5\times7+7\times2+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$

(2) $(1, 2, 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10)$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, 2)=\begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times2 \\ 1\times(-1) & 1\times2 \\ 3\times(-1) & 3\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(6) $(1, -1, 2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=(5, 1, -3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=(15)$

(7) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=(a_{11}x_1^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+a_{22}x_2^2)$

(8) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 \end{pmatrix}$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，讨论以下等式是否成立：

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\therefore \boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$，但

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix}$$

故 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

(3) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix}$，而

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix}$$

故 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

5. 已知 n 阶方阵 A，B 可交换，即 $AB=BA$，证明：

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(3) $(AB)^3=A^3B^3$

证 因为 $AB=BA$，由矩阵乘法的运算规则可得：

(1) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$

(3) $(AB)^3=(AB)(AB)(AB)=A(BA)(BA)B=A(BA)^2B=A(AB)^2B$

$=A(AB)(AB)B=A^2(BA)B^2=A^3B^3$

6. 举出反例,说明下列命题是错误的：

(1) 若 $A^2=O$，则 $A=O$；

(2) 若 $A^2=A$，则 $A=O$ 或 $A=E$；

(3) 若 $AX=AY$，且 $A\neq O$，则 $X=Y$.

解 (1) 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=O$，但 $A\neq O$.

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=A$，但 $A\neq O$ 且 $A\neq E$.

(3) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则 $AX=AY$ 且 $A\neq O$，但 $X\neq Y$.

7. 求所有与 A 可交换的矩阵：(1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$；(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解 (1) 显然与 A 可交换的矩阵必为二阶方阵，设为 X，并令 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{XA}=\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$.

由可交换条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，可得 $b=0$，$a=d$（其中 a，d，c 为任意常数），即 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

(2) 显然与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为三阶方阵，设为 $\boldsymbol{X}$，并令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{XA}=\begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$.

由可交换条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，可得 $d=0$，$g=0$，$h=0$，$a=e=i$，$b=f$（其中 a，b，c，e，f，i 均为任意常数），即 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

8. 设 $f(x)=x^2-x+1$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 $f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$. 所以，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

10. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证 由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.

充分性 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

必要性 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}\Rightarrow\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$.

习题 1.3

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

解 (1) 由二阶行列式对角线法则得，$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=2\times7-3\times5=-1.$

(2) 由三阶行列式对角线法则，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$$
$$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$$
$$=-24+8+16-4=-4$$

(3) 利用行列式性质将行列式化为三角行列式，得

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}=12$$

(4) 第二行提取 2 后与第一行互换，再化简展开，得

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=-2\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=8$$

(5) 将行列式的第二、三、四列全加到第一列，并提取公因子，再化为三角行列式，得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-3$$

(6) 把第二、三、四行均加到第一行，并在第一行中提取 10，再化为三角行列式，得

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=160$$

(7) 这是一个第二行元素为 1、2、3、4 的范德蒙行列式，因此

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\\1^3&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(4-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdot(4-3)=12$$

(8) 由行列式展开定理，得

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2&3&0\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-3&2&3\\2&2&0\\3&0&3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-6&2&0\\2&2&0\\3&0&3\end{vmatrix}$$

$$=12\begin{vmatrix}-6&2\\2&2\end{vmatrix}=-192$$

2. 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix}x&x&2\\0&-1&1\\1&2&x\end{vmatrix}=0$　　　　(2) $\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=0$

解　(1) 因为 $\begin{vmatrix}x&x&2\\0&-1&1\\1&2&x\end{vmatrix}=-(x+2)(x-1)=0$，所以方程的解为 $x_1=1$，

$x_2=-2.$

(2) 因为 $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x+3 & x+3 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)(x^2-3)$$

所以方程的解为 $x_1=-3$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{3}$.

3. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$ (2) $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

证 (1) 将行列式的第二、三列加到第一列，则第一列元素全为零，有

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$$

(2) 由行列式性质，得

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & z+x & x+y \\ x & y+z & z+x \\ z & x+y & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & z+x & x+y \\ y & y+z & z+x \\ x & x+y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & x+y \\ x & y & z+x \\ z & x & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x & z & z+x \\ z & y & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & x+y \\ y & z & z+x \\ x & y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

4. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

解 (1) 把第二、三行均加到第一行，并在第一行中提取 $2(x+y)$，得

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$$

(2) 按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + (-b_4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

(3) 第二行乘 -1 加到第一行上，第四行乘 -1 加到第三行上，再由行列式性质得

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$=xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1-x&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=xy\begin{vmatrix}1&1\\1&1-x\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

(4) 按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix}a&b&0&0&0\\0&a&b&0&0\\0&0&a&b&0\\0&0&0&a&b\\b&0&0&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&b&0&0\\0&a&b&0\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}b&0&0&0\\a&b&0&0\\0&a&b&0\\0&0&a&b\end{vmatrix}=a^5+b^5$$

5. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}a_1-b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2-b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\3&2&3&\cdots&3\\3&3&3&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}&a_{n-1}\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

解 (1) 各列都加到第一列后，再从第一列中提取 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b$；然后，第一行乘以 -1 后加到其余各行，得

$$\begin{vmatrix}a_1-b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2-b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2-b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&\cdots&a_n-b\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -b\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$$

(2) 将第三行的 (-1) 倍分别加到其余各行后，再按第三列展开，得

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3\end{vmatrix}=3!\ (n-3)!$$

(3) 设所给的行列式为 D，把第一列加到第二列，依次把第 $j-1$ 列加到第 j 列($j=1, 2, \cdots, n$)，得

$$\begin{vmatrix}-a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1}\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}na_1a_2\cdots a_{n-1}$$

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$，计算 $|3\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2+b^2$，而 $|3\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=3^2|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=9|\boldsymbol{A}|^2=9(a^2+b^2)^2$.