教育部審定

漢譯温德華士三角法

太倉顧裕魁譯述
紹興壽孝天
　　駱師曾挍訂

上海商務印書館印行

温德華士三角法

序言

美人温德華士氏。(Wentworth)近世算學大家也。其所著算學各書爲我國各學校所採用者。已不止一種。蓋以温氏之書。說理則明晰。選材則詳備。敎者易於敎。學者易於學。以視他種敎科書。實有比較的優點也。惟原書概爲英文。在已通英文者。不難就原書而研求。在未通英文者。同抱此研求之志。而爲文字所阻。致不得一窺美備之著作。亦爲憾事。三角一法。在算學中。程度已高。學校中習是法者。大都爲中學以上已通英文之生徒。故各學校用温氏書。多直接用原書講授。似無藉乎譯本。雖然。學堂之高等生。無慮不能讀温氏書。而喜讀温氏書者。必不以學校高等生爲限。爲普及計。則譯本之不可少者一。各種術語。中西本難强同。但誦習西書。知彼而不知此。於應用必多窒礙。爲貫通計。則譯本之不可少者二。夫學術之爲物。傳播愈多其途。則昌明愈趨於速。本館前於温氏之書。如代數學。如幾何學。已先後譯成漢文。豈好爲騈枝哉。誠欲使不能讀原書者。有捷徑以探其奥。已曾讀原書者。可對照而會其通云爾。今此三角法之譯。亦猶前志也。印旣成。用述其原意如此。

目　次

平　面　部

第壹編　銳角之三角函數

第貳編　直角三角形

第叁編 測角法

第肆編　斜角三角形

第伍編　雜題

第陸編 表之構造

球面部

第柒編 球面直角三角形

第捌編 球面斜角三角形

第玖編　球面三角法之應用

溫德華士三角法

平面部

第壹編

銳角之三角函數

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF ACUTE ANGLES

第一章

角之測法

ANGULAR MEASURE

測量長度時。恆用粍,呎等爲單位。故測量角度時,亦有種種單位。

常度或**六十分法**(common or sexagesimal system) 分圓周爲360等份。以每等份所對之圓心角爲單位角。而名之爲**度**(degree)。每度再分爲**六十分**(minute)。每分再分爲**六十秒** (second)。度分與秒。各以記號表之。如6度5分7秒。書作6° 5′ 7″。

〔注意〕 六十分法者。古代巴比倫天文家用以定360日爲一年者也。

眞弧度法 (circular system)於圓周上截一與半徑等長之弧。而取其所對之圓心角。定爲角之單位。名之曰**本位弧** (radian)。

360° 內本位弧之數。等於圓周內所含半徑長之倍數。此數不關圓之大小。皆爲 2π。(卽 2×3.1416)。已於幾何學內證明。故本位弧在任何圓內。恆爲同度之角。

圓周爲其半徑之 2π 倍。

於是 2π 本位弧 $=360°$

而 π 本位弧 $=180°$

故 1 本位弧 $=\dfrac{180°}{\pi}=57°\ 17'\ 45''$

而 1 度 $=\dfrac{\pi}{180}$ 本位弧 $=0.017453$ 本位弧。

由最後之二方程式。乃有由本位弧求度。或由度求本位弧兩種之變換。

如 2 本位弧 $=2\times\dfrac{180°}{\pi}=2\times(57°\ 17'\ 45'')=114°\ 35'\ 30''$

〔注意〕 眞弧度法。始用於十八世紀之初。此法於高等數學內。最爲便利。蓋其本位弧。僅以眞數表之。如 $\angle\pi$。意謂本角爲 π 本位弧。又 $\angle 3$ 爲 3 本位弧。

十八世紀之末。度量衡悉改粎制。其時有人提議。分直角爲 100 等份。定爲單位。而名之爲**度** (grade)。每度又分爲 100 分。每分爲 100 秒。是之謂**百分法** (centesimal system)。然此法於實際上。未聞有用之者。

例題 I.

〔設 $\pi=3.1416$〕

1. 化下列諸角爲眞弧度。而以 π 之分數式。表示其結果。

$60°, 45°, 150°, 195°, 11° 15', 123° 45', 37° 30'$。

2. 於 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{15}{16}\pi$, $\frac{7}{15}\pi$ 本位弧內，各有若干度。

3. 改 $1°$ 爲本位弧。其小數部分若干。又 $1'$ 若何。

4. 一個本位弧內有若干秒。

5. 試以本位弧表示八角形及十二角形之一內角。

6. 於 50 呎半徑之圓周上。截取 10 呎之弧。問此弧所對之圓心角若干度。

7. 地球赤道半徑約 3963 哩，設於赤道上有相距 1000 哩之兩點。問經度之差。

8. 設赤道上兩點之經度差爲 $1°$。問兩點間相距若干哩。

9. 設 $1°$ 之圓心角所乘之弧爲 1 呎，求圓半徑。

10. 由地球之旋轉，而移赤道上一點，於其周上經過與地球半徑相等之距離，問須幾小時。

11. 設時鐘分針之長爲 $3\frac{1}{2}$ 呎。問其極端於 5 分鐘內所行之長。

(令 $\pi=\frac{22}{7}$。下題仿此)。

12. 一輪每秒鐘旋轉 15 次，問旋過 4 本位弧。須時幾何。

第二章

三角函數

THE TRIGONOMETRIC FUNCTION

平面三角形邊角相關之理。卽以已知之任何三項。可以決定三角形之形狀及大小。惟已知三項中。至少必有一項爲邊。

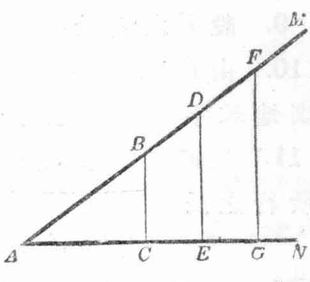
幾何學者。由已知之三項。表示其如何構造(construct)此三角形也。

三角法(trigonometry)者。由已知部分之眞數值。而表示其如何**計算**(compute)此三角形之未知部分也。

幾何學以普通法示三角形之邊角互相依屬。三角法始則於**直角三角形**(right triangle)內。示此依屬之眞相。於是乃用**各邊之比**(ratios of the sides)。以計算之。

設 MAN (1圖) 爲銳角。自一邊上之任何點 B, D, F。至又一邊作 BC, DE, FG 諸垂綫。則 ACB, AED, AGF 直角三角形。有 A 角爲公共。故互爲等角而相似。於是其各組相當邊之比相等。卽

1 圖



$$\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{AG}{AF};\ \frac{AC}{BC}=\frac{AE}{DE}=\frac{AG}{FG};\ \frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{FG}{AF}.$$

故此諸比。於 A 之值不變時。其值恆不變。

所以於銳角 A 之任何值，必有某數可以顯明所有公用銳角 A 之直角三角形內各邊互比之各值。

玆共有六個不同之比。

I. 對邊與斜邊之比。謂之 **A 之正弦** (Sine)。書作 $\sin A$.

II. 鄰邊與斜邊之比。謂之 **A 之餘弦** (Cosine)。書作 $\cos A$.

III. 對邊與鄰邊之比。謂之 **A 之正切** (Tangent)。書作 $\tan A$.

IV. 鄰邊與對邊之比。謂之 **A 之餘切** (Cotangent)。書作 $\cot A$.

V. 斜邊與鄰邊之比。謂之 **A 之正割** (Secant)。書作 $\sec A$.

VI. 斜邊與對邊之比，謂之 **A 之餘割** (Cosecant)。書作 $\csc A$.

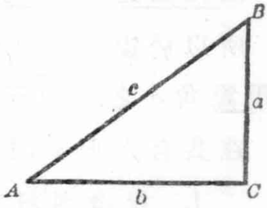
此六個比。謂之 A 角之三角函數。

此外尙有兩個函數，亦僅依屬於 A 角者。恆與上六個相幷而爲八個。

VII. **A 之正矢** (Versed sine)。爲 $1-\cos A$。書作 $\text{vers}\, A$.

VIII. **A 之餘矢** (Coversed sine)。爲 $1-\sin A$。書作 $\text{covers}\, A$

2 圖



於 ACB 直角三角形內(2 圖)。以 a, b, c, 表示銳角 A, B, 及直角 C 各對邊之長。而所表者為同類單位。則

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}},\qquad \cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}},$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}},\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}},$$

$$\text{vers } A=1-\frac{b}{c}=\frac{c-b}{c},\qquad \text{covers } A=1-\frac{a}{c}=\frac{c-a}{c}.$$

例題 II.

1. ABC 三角形(2 圖)內。餘一銳角 B 之各函數為何。

2. 試比較 A 及 B 之各函數。而示其

$\sin A=\cos B$ $\sec A=\csc B$

$\cos A=\sin B$ $\csc A=\sec B$

$\tan A=\cot B$ $\text{vers } A=\text{covers } B$

$\cot A=\tan B$ $\text{covers } A=\text{vers } B$

3. 設 a, b, c, 有下之各值。試求 A 之各函數值。

(i) 3, 4, 5. (iii) 8, 15, 17. (v) 3.9, 8, 8.9.

(ii) 5, 12, 13. (iv) 9, 40, 41. (vi) 1.19, 1.20, 1.69.

4. 欲 a, b, c (2 圖)三綫。爲直角三角形之三邊。則各綫必長若干而後可。又問 3 題內各數。是否卽所需之長。

5. 設 a, b, c, 有下之各值。試求 A 之各函數值。

(i) $2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2$, (iii) $pqr,\ qrs,\ rsp$,

(ii) $\dfrac{2xy}{x-y},\ x+y,\ \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, (iv) $\dfrac{mn}{pq},\ \dfrac{mv}{sq},\ \dfrac{nr}{ps}$.

6. 求證前題 (i) 及 (ii) 內 a, b, c 之值。爲合於直角三角形之三邊。

7. 欲令 5 題 (iii) 及 (iv) 內 a, b, c 之各值。爲直角三角形之各邊。問當立何種方程式。

已知 $a^2+b^2=c^2$, 求下列六題中 A 及 B 之函數。

8. $a=24,\ b=143$.

9. $a=0.264,\ c=0.265$.

10. $b=9.5,\ c=19.3$.

11. $a=\sqrt{p^2+q^2},\ b=\sqrt{2pq}$.

12. $a=\sqrt{p^2+pq},\ c=p+q$.

13. $b=2\sqrt{pq},\ c=p+q$.

已知 $a^2+b^2=c^2$, 求下列四題中 A 之函數。

14. $a=2b$.

15. $a=\frac{2}{3}c$.

16. $a+b=\frac{5}{4}c$.

17. $a-b=\frac{1}{4}c$.

18. 設 $\sin A=\frac{3}{8}$, 而 $c=20.5$, 求 a.

19. 設 $\cos A=0.44$, 而 $c=3.5$, 求 b.

20. 設 $\tan A=\frac{11}{3}$, 而 $b=2\frac{5}{11}$, 求 a.

21. 設 $\cot A=4$, 而 $a=17$, 求 b

22. 設 $\sec A=2$, 而 $b=20$, 求 c.

23. 設 $\csc A=6.45$, 而 $a=35.6$, 求 c.

有下列已知各件。求作一直角三角形。

24 $c=6, \tan A=\frac{3}{2}$.

25 $a=3.5, \cos A=\frac{1}{2}$.

26. $b=2, \sin A=0.6$.

27. $b=4, \csc A=4$.

28. 於直角三角形內 $c=2.5$ 哩, $\sin A=0.6, \cos A=0.8$, 求餘二邊。

29. 以分角器作 20°, 40°, 及 70° 之三角。由測其必需之綫。以決定其函數。并以所得值。與下表中所列較近各值比較之。

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
20°	0.342	0.940	0.364	2.747	1.064	2.924
40°	0.643	0.766	0.839	1.192	1.305	1.556
70°	0.940	0.342	0.747	0.364	2.924	1.064

30 由上表設 $A=20°, c=1$, 又設 $A=20°, c=4$, 試各求直角三角形之餘二邊。

31. 由直立竿之水平影長度竿長。測時得太陽之仰角之正切爲 0.82。同時有塔之水平影長 174.3 碼。求塔高。

〔增註〕 參攷例題 IX 圖解及增註。

第三章

以直綫表示函數法

REPRESENTATION OF THE FUNCTIONS BY LINES

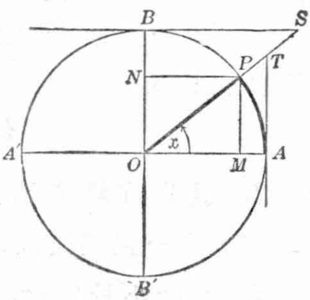
一角之函數均爲比故皆爲數。然亦可用直綫表之。其法先擇某長爲單位。乃造成一直角三角形。而其比式內之分母。均須與此單位相等。

其最便利之法如下。

以一點 O (3 圖) 爲心。及與長之單位相等者爲半徑。作一圓。又作一水平直徑 AA'。及其垂直徑 BB'。

其以 1 爲半徑之圓。謂之單位圓 (Unit circle)。設 AOP 爲一銳角。而其值 (度, 分, 秒) 以 x 表之。

3 圖



則此 x 角。可謂爲由 OP 直綫自最始位置 (initial position) OA, 至最終位置 (terminal position) OP, 在 O 點旋轉而成。

作 $PM \perp OA$, $PN \perp OB$.

於 rt. $\triangle\ OMP$ 內。其斜邊 $OP=1$.