金榜®版高等学校教材同步辅导系列

配高教社《微积分》（第二版）上册 同济大学应用数学系 编

微积分

同步辅导与课后习题详解

第二版 上册

金榜教学与研究专家委员会/编审

中国科学院 孙明彦/主编

吉林大学出版社

金榜®版高等学校教材同步辅导系列

微积分

同步辅导与课后习题详解

第二版 上册

金榜教学与研究专家委员会/编审

中国科学院 孙明彦/主编

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与课后习题详解:第2版.上册/
孙明彦主编.一长春:吉林大学出版社,2008.7
(金榜版高等学校教材同步辅导系列)
ISBN 978-7-5601-3882-4

Ⅰ.高… Ⅱ.孙… Ⅲ.微积分—高等学校—
教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第101387号

书名:金榜版高等学校教材同步辅导系列
微积分同步辅导与课后习题详解 第2版 上册
作者:孙明彦 主编

责任编辑、责任校对:黄凤新
吉林大学出版社出版、发行
开本:880×1230毫米 1/32
印张:297.5 字数:7488千字
ISBN 978-7-5601-3882-4

封面设计:金榜图文设计室
北京市后沙峪印刷厂 印刷
2008年7月 第1版
2008年7月 第1次印刷
总定价:567.90元

社址:长春市明德路421号 邮编:130021
发行部电话:0431-88499826
网址:http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

随着近几年大学连续扩招，大学生的就业压力越来越大，社会对高层次、高素质人才的需求倾向也逐步加大。这就要求大学生在学习生活中，必须越来越注重素质的培养和实际能力的提高。因此，大学生对各种基础教材、专业理论教材、教学辅导书、考试用书、工具书等学习用书的需求急剧增加。有鉴于此，我们组织全国多所知名重点大学的专家和教授，依据最新教材，编写了这套大学重点科目辅导系列丛书。本套丛书涉及的学科有数学、物理、力学、化学、电子、电气工程、工程、经济等，基本上覆盖所涉及专业的主干课程和基础课程。我们在编写此系列图书时，一方面坚持对学科内容的覆盖性；另一方面注重因材施教，准确把握不同层次学生的学习要求。

作为一种辅导性教材，本套丛书力求做到有的放矢，恰到好处。体例设计具有如下特色：

1. 知识点概括：每章首先介绍基本理论与方法，尽量避免使用抽象方法，尽可能用简单的方法，做到深入浅出。内容按照基础知识点、重要知识点和疑难知识点进行划分，方便学生对整章内容进行整体性地把握。

2. 易考题型解析及解题技巧总结：在此部分，我们列举了大量难度不等的易考常考题型，并针对每种题型给出解题思路和解题技巧，对学生的学习有着很强的启发性，能够帮助学生开阔思路、活跃思维、举一反三、触类旁通。书中例题都非常新颖，有着实际工程应用背景，很有参考价值，一改国内教材习题大同小异的弊病。

3. 课后习题详解：完全针对最经典教材最新版本的课后习题给予解答。解答过程中力求做到概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，必要时给以恰当的评注，更有助于学生深入思考以及远离解题误区。

由于编者水平有限，本书难免会有疏漏之处，恳请广大读者朋友批评指正。

联系我们：中国考试培训网 www.julian.com.cn。

编 者

目　录

预备知识

一、知识点概括

（一）基础知识点

1. 集合

(1) 定义

集合是具有某种相同性质的事物所组成的总体，组成集合的事物称为集合的元素. a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$.

(2) 子集：集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$.

(3) 常见的一些集合表示

实数集 $\mathbf{R}$，自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，复数集 $\mathbf{C}$，空集 $\varnothing$.

(4) 集合的运算

并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$；交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$；

差集 $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$；余集 $A^C = \{x \mid x \in I \backslash A, I$ 为全集$\}$；

直积 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

(5) 常用的运算律

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

对偶律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

(6) 区间

设 a 和 b 都为实数，且 $a < b$，称实数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间，记为 (a, b).

类似地可定义

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

半开区间 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.

无穷区间 $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$.

(7) 邻域:设 a、δ 是实数,且 $\delta>0$,则 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 定义为 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$.

类似可定义

去心邻域:$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$.

2. 映射

(1) 定义

两个非空集合 X、Y,在法则 T 下,X 中的每个元素 x 都在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应,则称 T 为从 X 到 Y 的映射,记作 $T: X \to Y$,元素 y 称为元素 x 的像,元素 x 称为元素 y 的一个原像.

集合 X 称为映射 T 的定义域,X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 T 的值域.

注意:一个映射必须具备的三要素 —— 定义域,值域,对应法则 T.

(2) 几类重要映射

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射,

T 为 X 到 Y 上的满射:Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像.

T 为 X 到 Y 的单射:X 中任意两个不同元素对应的像不相同.

T 为 X 到 Y 上的一一映射:T 既是满射,又是单射.

(3) 逆映射:对 X 到 Y 上的一一映射 T,将从 Y 到 X 上的映射称为 T 的逆映射.

(4) 复合映射:设有映射 $T_1: X \to Y_1$,$T_2: Y_2 \to Z$,且 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 T_1 和 T_2 可以定义出一个从 X 到 Z 的对应规则,它将每个 $x \in X$,映为 Z 的元素 $T_2[T_1(x)]$. 将这个映射称为映射 T_1 和 T_2 构成的复合映射,记作 $T_2 \circ T_1$.

3. 一元函数

(1) 定义

设数集 $D \subset \mathbf{R}$,则称 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射为定义在 D 上的一元函数,简称函数,记作 $y=f(x)$,$x \in D$.

D 称为定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

(2) 函数的性质

有界性:设 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在 $M>0$,使对任意 $x \in D$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

单调性:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$. 如果对于 I 上任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称

$f(x)$ 在区间 I 上是增加(或减少)的.

奇偶性:设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的定义域 D 上,对任意 $x \in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

周期性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个非零常数 T,使得对任意 $x \in D$,且 $x+T \in D$,有 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,通常将满足关系式的最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

(3) 反函数

设函数 $f: D \to f(D)$ 是一一映射,则称逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ 为函数 f 的反函数.

单调函数的反函数必存在.

(4) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D',函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D) \subset D'$,则将 $y=f[g(x)](x \in D)$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数,记作 $(f \circ g)(x)=f[g(x)]$.

(5) 函数的四则运算

函数的和,差,积,商,线性组合等.

(6) 基本初等函数

幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为常数).

指数函数:$y=a^{x}$($a>0$ 且 $a \neq 1$).

对数函数:$y=\log_a x$(a 是常数且 $a>0, a \neq 1$).

三角函数:$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$.

反三角函数:$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

(7) 初等函数:

初等函数:由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的可以用一个算式表示的函数.

双曲正弦:$y=\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

双曲余弦:$y=\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

双曲正切:$y=\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

反双曲正弦:$y=\operatorname{arcsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$.

反双曲余弦：$y = \operatorname{arccosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

反双曲正切：$y = \operatorname{arctanh}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

(二) 重要知识点

本章的很多概念是最基本的，后面的学习经常用到.

函数的概念的理解、根据实际问题建立函数关系式、函数的性质的使用、复合函数和反函数概念的理解以及基本初等函数的性质和图形的掌握都是重要的考试和考研的考查点.

(三) 疑难知识点

1. 逆映射一定是一一映射，不是一一映射的映射不存在逆映射. 反函数也是如此，反函数必须是单调函数.

2. 在讨论函数的奇偶性的时候，一定要注意定义域的对称性，如果定义域不是关于 y 轴对称，则不存在奇偶性的讨论.

二、易考题型解析及解题技巧总结

易考题型一　函数的奇偶性、周期性和有界性的考查

例题 1　(1997 年，数学三)

若 $f(-x) = f(x)\ (-\infty < x < +\infty)$，在 $(-\infty, 0)$ 内，$f'(x) > 0$，$f''(x) < 0$，则在 $(0, +\infty)$ 内有(　　)

A. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.　　B. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

C. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.　　D. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

【解析】　这是函数奇偶性的性质的考查，由 $f(-x) = f(x)$ 可知 $f(x)$ 为偶函数，偶函数关于 y 轴对称，故在 $(-\infty, 0)$ 内，$f'(x) > 0$，即函数是增加的，可得在 $(0, +\infty)$ 内，函数是减少的，即 $f'(x) < 0$. 对于 $f''(x)$，$f''(x)$ 是表示函数凸凹性的，在 $(-\infty, 0)$ 内，$f''(x) < 0$，由对称性知，在 $(0, +\infty)$ 内，$f''(x) < 0$.

故选 C.

例题 2　(2008 年，数学三)

$f(x)$ 是周期为 2 的连续函数，

(1) 证明对任意实数都有 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 证明 $g(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

【解析】　只对第二问，利用周期性的定义，证明 $g(x+2) = g(x)$ 即可.

由 $g(x+2)=\int_0^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$

$=\int_0^{x}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$

$=g(x)+\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t.$

而$\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_0^{2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$

$=2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-\int_x^{x+2}\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\int_x^{x+2}\mathrm{d}t$

$=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s=0.$

故 $g(x+2)=g(x)$，即 $g(x)=\int_0^{x}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

例题 3 （2004 年，数学三）

函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（　　）

A. $(-1, 0)$.　　　　B. $(0, 1)$.

C. $(1, 2)$.　　　　D. $(2, 3)$.

【解析】 对函数而言，有界性的定义为，在定义域上，如果存在 $M>0$，对任意定义域上的 x，有 $|f(x)|\leqslant M$.

对本题而言，在 A、B、C、D 个四个区间上 $f(x)$ 是连续的，而在 $x=0,1,2$ 处无定义，则只要判断每个区间在 x 趋近这几个点时的左极限或右极限存不存在即可，而 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\dfrac{\sin2}{4}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{\sin2}{4}$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\dfrac{\sin3}{18}$，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\infty$，$f(x)$ 只在 $(-1, 0)$ 内有界.

故选 A.

【解题技巧总结】 函数的奇偶性、周期性和有界性的考查通常会和后面章节的知识相关联，如一阶和二阶导数，极限的求解，积分的简单求解等，所以，必须掌握奇偶性、周期性和有界性的概念，然后结合后面的知识进行求解.

有界性：在定义域上，如果存在 $M>0$，对任意定义域上的 x，有 $|f(x)|\leqslant M$.

奇偶性：$f(x)$ 的定义域必须关于原点对称，偶函数即 $f(-x)=f(x)$，奇函数即 $f(-x)=-f(x)$.

周期性:存在非零常数 T,对定义域上的任意 x,且 $x+T\in D$ 时,$f(x+T)=f(x)$ 成立.

三、课后习题详解

1. 设 $A=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}$、$B=\{x\mid 0<x<2\}$ 是实数域中的两个子集,写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$ 的表达式.

【解】 $A=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant 1-x^2\leqslant 1\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{x\mid 0<x<2\}$

$\therefore A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$

$A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

$A\backslash B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$

$B\backslash A=\{x\mid 1<x<2\}$

2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应,则称集合 A 与 B 等势. 例如,设 A 是正奇数集合,B 是正偶数集合,如果定义从 A 到 B 的映射 T:$T(2n+1)=2n+2$,其中 n 为任一自然数,则 T 是 A 与 B 之间的一一对应,因此这两个集合等势. 试说明下列数集是等势的:

(1) 整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$;

(2) 区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$.

【解】 (1) 令 $T:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$. $T(m)=\begin{cases}2m-1, 当\ m=1,2,\cdots,\\ -2m, 当\ m=0,-1,-2,\cdots;\end{cases}$

则 T 为 $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{N}$ 之间的一一对应,故 $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{N}$ 等势.

(2) 令 $T:(1,2)\to(3,5)$. $T(x)=2x+1, x\in(1,2)$

T 为 $(1,2)$ 与 $(3,5)$ 之间的一一映射,故区间 $(1,2)$ 与 $(3,5)$ 等势.

3. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$;　　(2) $y=\sqrt{x^2-9}$;

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

【解】 (1) 自然定义域 $D=\{x\mid x+2\neq 0\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

(2) 自然定义域 $D=\{x\mid x^2-9\geqslant 0\}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

(3) 自然定义域 $D=\{x\mid 1-x^2\neq 0$ 且 $x+1\geqslant 0\}=(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(4) 自然定义域 $D=\{x\mid [x+1]\neq 0\}$

$\because [x]$ 的意思是不大于 x 的最小整数,故 $[x+1]=0$ 的 x 范围是 $0\leqslant x+1<1$,即 $-1\leqslant x<0$

$\therefore D=\{x \mid x<-1$ 或 $x \geqslant 0\}=(-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$.

4. 下列函数 f 和 φ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}, \varphi(x)=1$;

(2) $f(x)=x, \varphi(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=1, \varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(4) $f(x)=1, \varphi(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【解】 (1) $f(x)$ 的定义域 $D=\{x \mid x \neq 0\}$, $\varphi(x)$ 的定义域 $D=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,定义域不相同,故 f 和 φ 不相同.

(2) $f(x)$ 的定义域 $D=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$, $\varphi(x)$ 的定义域 $D=\{x \mid x^2 \geqslant 0\}=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,但 $\varphi(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$,值域不相同,故 f 和 φ 不相同.

(3) $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,值域都是 1,故 f 和 φ 相同.

(4) $\varphi(x)$ 的定义域 $D=\{x \mid \cos x \neq 0\}$,而 $f(x)$ 定义域为 $x \in \mathbf{R}$,二者定义域不相同,故 f 和 φ 不相同.

5. 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $y=x+x^2-x^3$;　　(2) $y=a+b\cos x$;

(3) $y=x+\sin x+e^x$;　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】 (1) $y=x+x^2-x^3$ 的定义域 $x \in \mathbf{R}$,令 $f(x)=x+x^2-x^3$

则 $f(-x)=-x+x^2-x^3$.

$\because f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$,

$\therefore y=x+x^2-x^3$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2) $y=a+b\cos x$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$

令 $f(x)=a+b\cos x$,则 $f(-x)=a+b\cos x$.

$\because f(-x)=f(x), f(-x) \neq -f(x)$,

$\therefore y=a+b\cos x$ 是偶函数.

(3) $y=x+\sin x+e^x$ 的定义域 $x \in \mathbf{R}$

令 $f(x)=x+\sin x+e^x$,则 $f(-x)=-x-\sin x+e^{-x}$.

$\because f(-x) \neq -f(x), f(-x) \neq f(x)$,

$\therefore y=x+\sin x+e^x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$,设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 则 $f(-x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.

$\because f(-x)=f(x), f(-x) \neq -f(x)$,

$\therefore y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 为偶函数.

6. 证明:两个偶函数之积是偶函数,两个奇函数之积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

【证明】 (1) 设 $f(x),g(x)$ 均为定义在 D 上的偶函数.

令 $h(x) = f(x)\cdot g(x), x\in D$

对 $\forall x\in D, h(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = h(x)$

$\therefore$ 两个偶函数之积仍为偶函数.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 D 上的奇函数.

令 $h(x) = f(x)\cdot g(x), x\in D$

对 $\forall x\in D, h(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = -f(x)\cdot[-g(x)] = f(x)\cdot g(x) = h(x)$

$\therefore$ 两个奇函数之积是偶函数.

(3) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是定义在 D 上的奇函数和偶函数.

令 $h(x) = f(x)\cdot g(x), x\in D$

对 $\forall x\in D, h(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = -f(x)\cdot g(x) = -h(x)$

$\therefore$ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任何函数,证明:

(1) $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数;

(2) 定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数和一个奇函数的和.

【证明】 (1) 对 $\forall x\in(-l,l)$ $\varphi(-x) = f(-x) + f(x) = \varphi(x)$,故 $\varphi(x)$ 是偶函数.

对 $\forall x\in(-l,l), \psi(-x) = f(-x) - f(x) = -f(x) + f(-x) = -\psi(x)$

故 $\psi(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 上的任何函数.

令 $\varphi(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, x\in(-l,l)$

$\psi(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}, x\in(-l,l)$

$\because \varphi(-x) = \varphi(x), \psi(-x) = -\psi(x)$

$\therefore \varphi(x)$ 为偶函数, $\psi(x)$ 为奇函数.

又 $\because f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

$\therefore$ 定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

8. 证明:(1) 两个增加(减少)的函数之和是增加(减少)的;

(2) 两个增加(减少)的正值函数之积是增加(减少)的;

(3) 两个增加的函数的复合函数是增加的.又问两个减少的函数的复合函数情况如何?

【证明】 (1) 设 $f(x),g(x)$ 是 $x\in D$ 上的增加的函数.

即对 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时

有 $f(x_2)-f(x_1)>0, g(x_2)-g(x_1)>0$

令 $h(x)=f(x)+g(x), x\in D$

则
$$\begin{aligned}h(x_2)-h(x_1)&=[f(x_2)+g(x_2)]-[f(x_1)+g(x_1)]\\&=[f(x_2)-f(x_1)]+[g(x_2)-g(x_1)]>0\end{aligned}$$

$\therefore h(x_2)-h(x_1)>0$

$\therefore h(x)$ 为增加的函数,即两个增加的函数之和是增加的.

同理可证:两个减少的函数之和是减少的.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x\in D$ 上的增加的正值函数.

即对 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时有

$$0<f(x_1)<f(x_2), 0<g(x_1)<g(x_2)$$

令 $h(x)=f(x)\cdot g(x), x\in D$

则
$$\begin{aligned}h(x_2)-h(x_1)&=f(x_2)g(x_2)-f(x_1)g(x_1)\\&=f(x_2)g(x_2)-f(x_2)g(x_1)\\&\quad+f(x_2)g(x_1)-f(x_1)g(x_1)\\&=f(x_2)[g(x_2)-g(x_1)]+g(x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0\end{aligned}$$

$\therefore h(x_2)-h(x_1)>0$

$\therefore h(x)$ 为增加的,即两个增加的正值函数之积是增加的.

同理可证:两个减少的正值函数之积是减少的.

(3) 设 $f(x),g(x)$ 是 $x\in D$ 上的增加的函数

即对 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2), g(x_1)<g(x_2)$

令 $h(x)=g[f(x)]$

则 $h(x_2)-h(x_1)=g[f(x_2)]-g[f(x_1)]>0 \quad (\because f(x_2)>f(x_1))$

$\therefore h(x_2)-h(x_1)>0$

$\therefore h(x)$ 为增加的,即两个增加的函数的复合函数是增加的.

对于两个减少的函数的复合函数,设 $f_1(x),g_1(x)$ 是 $x\in D$ 上的减少的函数.

则对 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时有,$f_1(x_1)>f_1(x_2), g_1(x_1)>g_1(x_2)$

令 $h_1(x)=g_1[f_1(x)]$

则 $h_1(x_2)-h_1(x_1)=g_1[f_1(x_2)]-g_1[f_1(x_1)]>0(\because f_1(x_2)$

$< f_1(x_1))$

故 $h_1(x)$ 是增加的，即两个减少的函数的复合函数也是增加的.

9. 求下列函数的反函数及反函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$；

(2) $y=\begin{cases}x^3, 当 -\infty < x < 1,\\ 2^{x-1}, 当 1\leqslant x < +\infty.\end{cases}$

【解】 (1) $\because y=\sqrt{1-x^2}$ 在定义域 $D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$ 上是单调增加的，即一一映射.

$\therefore$ 该函数的反函数存在

由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可得 $x=-\sqrt{1-y^2}$.

又 $\because$ 反函数的定义域为原函数的值域，即 $[0,1]$

$\therefore$ 反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1$.

(2) $\therefore y=\begin{cases}x^3, 当 -\infty < x < 1,\\ 2^{x-1}, 当 1\leqslant x < +\infty.\end{cases}$

在定义域 D 上为单调增加函数，即一一映射.

$\therefore$ 该函数的反函数存在.

而 $(-\infty,1)$ 对应的值域为 $(-\infty,1)$，$[1,+\infty)$ 对应的值域为 $[1,+\infty)$

$\therefore$ 由 $y=\begin{cases}x^3, -\infty < x < 1,\\ 2^{x-1}, 1\leqslant x < +\infty,\end{cases}$ 得 $x=\begin{cases}\sqrt[3]{y}, -\infty < y < 1,\\ 1+\log_2 y, 1\leqslant y < +\infty,\end{cases}$

$\therefore$ 反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, -\infty < x < 1,\\ 1+\log_2 x, 1\leqslant x < +\infty.\end{cases}$

10. 作出下列函数的图形：

(1) $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$； (2) $y=[x]-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$.

【解】 (1) $\because \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$

$$
\text{而 } y=\cos x\begin{cases} >0, & 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z} \\ =0, & x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z} \\ <0, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi, k\in \mathbf{Z} \end{cases}
$$

$$
\therefore y=\operatorname{sgn}(\cos x)=\begin{cases} 1, & 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z} \\ 0, & x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z} \\ -1, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi, k\in \mathbf{Z} \end{cases}
$$

$y=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 的图形如图 0－1 所示

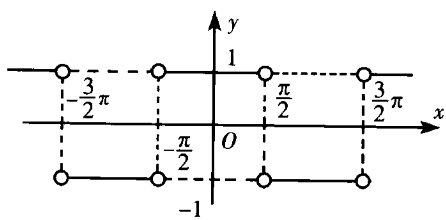

图 0－1

(2) $\because [x]=k, k\leqslant x<k+1, k\in \mathbf{Z}$

$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k, 2k\leqslant x<2k+2, k\in \mathbf{Z}$

$\therefore$ 当 $2k\leqslant x<2k+1$ 时，$[x]-2\left[\dfrac{x}{2}\right]=2k-2k=0$

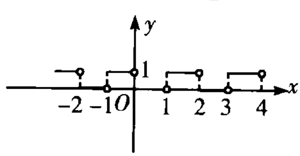

图 0－2

当 $2k+1 \leqslant 2k+2$ 时 $[x]-2\left[\dfrac{x}{2}\right]=2k+1-2k=1$

$\therefore y=[x]-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ 的图形如图 0－2 所示.

11. 给定函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$,令

$f_1(x)=-f(x);f_2(x)=f(-x);f_3(x)=-f(-x)$.

说明函数 $y=f_1(x),y=f_2(x),y=f_3(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形的位置关系.

【解】 $y=f_1(x)=-f(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称;

$y=f_2(x)=f(-x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称;

$y=f_3(x)=-f(-x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于原点中心对称.

12. 证明:

(1) $\sinh x+\sinh y=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$;

(2) $\cosh x-\cosh y=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$.

【证明】(1) 右边 $=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$

$$=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{\frac{-x-y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{\frac{-x+y}{2}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^y-e^{-y}-e^{-x})$$

$$=\frac{e^x-e^x}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\sinh x+\sinh y=\text{左边}.$$

证毕.

(2) 右边 $=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$

$$=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{\frac{-x-y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{\frac{-x+y}{2}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(e^x-e^y-e^{-y}+e^{-x})$$